الإحصـــاء للتجــاريـين

مدخل حديث

الإحصـــاء للتجــاريـين

مدخل حديث

تأليف

جـورج كانافـوس
George C. Canavos

دون ميلـــر
Don M. Miller

تعريب

أ.د. سلطان محمد عبد الحميد
أستاذ ورئيس قسم الإحصاء التطبيقي والتأمين
كلية التجارة - جامعة المنصورة

مراجعة

أ.د. محمـد توفيـق البلقيني
أستاذ الإحصاء الاكتواري
وكيل كلية التجارة - جامعة المنصورة



ص.ب: ١٠٧٢٠ - الرياض: ١١٤٤٣ - فاكس ٤٦٥٧٩٣٩
المملكة العربية السعودية - هاتف ٤٦٥٨٥٢٣ - ٤٦٤٧٥٣١

الطبعة الإنجليزية

Modern Business Statistics
By: George C. Canavos & Don M. Miller

ردمك: ٠-٥١٦-٢٤-٩٩٦٠

الرياض – المملكة العربية السعودية ، ص.ب ١٠٧٢٠ – الرمز البريدى١١٤٤٣
فاكس ٤٦٥٧٩٣٩ ، هاتف ٤٦٤٧٥٣١/٤٦٥٨٥٢٣
البريد الإلكترونى: Email: marspub1@zajil.net

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

المحتــويــات

رقم الصفحة

مقـدمـة

هذا الكتاب هو إستجابة لما يشهده العالم من ثورة في علم الإدارة، فكثير من الشركات الكبرى في العالم يرجع نجاحها في جزء كبير منه إلى إهتمامها بتبني المفاهيم الحديثة في الإدارة، ومن أهم هذه المفاهيم الإهتمام برغبات المستهلكين وتحسين جودة المنتج، من خلال تكريس الإبداع والتحسين المستمر في العمليات الإنتاجية. والتفكير الإحصائي يدرك ويقر بوجود الاختلافات في كل الظواهر، وأن دراسة تلك الاختلافات يجعلنا نتمكن من اكتشاف وفهم مصادر تلك الاختلافات، وهو أمر هام تتوقف عليه القرارات التي تؤدي إلى تحسين العملية. هذا الكتاب يقدم التفكير الاحصائي وعناصره الأساسية في الفصل الأول، بهدف تفهم ثم تحسين أنشطة إدارة الأعمال، ويتكامل هذا المفهوم من خلال باقي فصول الكتاب، بالاضافة إلى ذلك، فهو يشتمل على مناقشة مستفيضة لطرق الرقابة الإحصائية على العمليات وتصميم التجارب وهما يؤصلا ويرسخا التفكير الإحصائي من أجل تحسين الجودة.

وقد شمل هذا الكتاب خمسة عشر فصلاً، جاءت على النحو التالي:

* **الفصل الأول والثاني** يضعا اللبنات الأولى لمادة هذا الكتاب. في الفصل الأول قدمنا فكرة الاختلاف، مع شرح وتوضيح أهمية التعرف على مصادره الممكنة. في الفصل الثاني، قدمنا أساليب تلخص البيانات وتكشف عن خصائصها وصفاتها المناسبة. ومفاهيم هذا الفصل تضع الأساس لما يسمى بالإستدلال الاحصائي.

* **الفصل الثالث والرابع** يهتما بالاحتمال. الفصل الثالث غطى المفاهيم الأساسية للاحتمال والتي نعتقد بأنها ضرورية لفهم الأستدلال الاحصائي. فمثلاً ركزنا على مفهوم الاحتمال المشترك والاحتمال الشرطي فقط، لما لهما من ضرورة لتعريف الحوادث المستقلة وغير المستقلة احصائياً. في الفصل الرابع تم تغطية التوزيعات الاحتمالية: ذو الحدين، الطبيعي. بواسون، الأسى. مع الأخذ في الاعتبار أننا في آخر توزيعين، ركزنا على تطبيقات الانتظار في صفوف وعلى حالات الموثوقية. خلال هذا الفصل، بينا أهمية استخدام البرامج الاحصائية الجاهزة مثل MINITAB, BMDP, SPSS, SAS بدلاً من الجداول الاحصائية في سياق الحديث عن تلك التوزيعات.

* **الفصل الخامس** وفيه تم توسيع مفهوم توزيع المعاينة والذي نوقش بإيجاز في الفصل الأول، وبينا أهمية توزيع المعاينة بالنسبة للاستدلال الاحصائي. ويعتبر هذا الفصل كنقطة تحول من دراسة

الاحتمالات إلى دراسة الاستدلال الأحصائي. شمل هذا الفصل كل من توزيع T، توزيع كاى تربيع.

* **الفصل السادس والسابع** يقدما المفاهيم الأساسية للإستدلال الاحصائي. في هذه الفصول تمت مناقشة الاستدلال الاحصائي المتعلق بمجتمع واحد (متوسط ونسبة) ثم بمجتمعين (متوسطين ونسبتين). وفي جميع الحالات كنا نناقش الأوضاع التي فيها يكون الأنحراف المعياري في المجتمع (أو في المجتمعين) معلوماً أو مجهولاً.

* **الفصل الثامن** وفيه استكملنا مناقشة موضوع تصميم التجارب الذي قدمنا له في الفصل الأول. في هذا الفصل، قدمنا أسلوب تحليل التباين لمقارنة متوسطات عدة مجتمعات (عمليات)، في حالة عينات مستقلة وفي حالة عينات مختارة في قطاعات. هذا الفصل جدير بالملاحظة والاهتمام، لأنه يركز على التفسير البياني ولأنه يوجه الإهتمام تجاه بعض الكميات مثل متوسط المربعات للمعالجات ومتوسط مربع الخطأ.

* **الفصل التاسع والعاشر** ويحتويا على معالجة شاملة لتحليل الانحدار البسيط والمتعدد، بجانب تفسير مخرجات بعض البر امج الاحصائية الجاهزة.

* **الفصل الحادي عشر والثاني عشر** غطياً مفهومين هامين خاصة في علم الإدارة وهما: التنبؤ بتحليل السلاسل الزمنية وطرق الرقابة الإحصائية على العمليات. المادة العلمية في الفصل الثاني عشر تتناسب بصفة خاصة مع ما يجرى هذه الأيام من تحسين الجودة المستمر للخدمة وللمنتج، وهى تضع الأساس لمبادئ إدارة الجودة الشاملة.

* **الفصل الثالث عشر** يغطى التجارب العاملية، مع التركيز بشدة على مبادئ التصميم أكثر من التحليل. تصميم التجارب اداة هامة لفحص كفاءة تأثير تغيرات العملية المحتملة.

* **الفصل الرابع عشر والخامس عشر** شملا موضوعات تقليدية مثل إختبارات جودة المطابقة، جداول الاقتران، الطرق اللامعلمية. الفصل الرابع عشر جدير بالدراسة والاهتمام لإستمراره في إستخدام التفسير البياني بجانب الإستدلال الاحصائي، وكذلك لأنه تضمن إجراء ليليفورس لأختبار فرض الأعتدالية، (أي خضوع الظاهرة للتوزيع الطبيعي). وإختبار ليليفورس مفيد جداً وبصفة خاصة عندما يكون حجم العينة صغيراً إلى حد ما أو بدرجة مناسبة. الفصل الخامس عشر يقارن بين أساليب الإستدلال الإحصائي البارامترية واللابارامترية، وقد شمل هذا الفصل على اختبارات: ويلكوكسن، كروسكال-واليس، فريدمان.

وإننا إذ نقدم هذه الترجمة لكتاب: Modern Business Statistics، فإننا نرجو أن نكون قد أضفنا كتاباً جديداً في الاحصاء إلى المكتبة العربية، نأمل أن يستفيد منه القارئ العربي في مجالات بحوثه المختلفة.

الفصل الأول

مقدمة للإحصاء والتفكير الإحصائي

INTRODUCTION TO STATISTICS AND STATISTICAL THINKINING

محتويات الفصل:

الفصل الأول

مقدمة للإحصاء والتفكير الإحصائي

INTRODUCTION TO STATISTICS AND STATISTICAL THINKINING

(١-١) مقدمة Introduction :

لماذا ينبغي على كل طلاب إدارة الأعمال أن يدرسوا مقرراً أو إثنين في علم الإحصاء؟ السبب وراء ذلك أن التفكير الإحصائي والقدرة على تفسير البيانات بكفاءة عالية أصبحت أمرا حيوياً وهاماً للمديرين والعاملين في مجال الإدارة. إن صناعة القرارات الجيدة تتطلب معرفة شاملة لبيئة القرار، فقدرة المدير على تحسين الأنشطة التي هو مسئولا عنها تكون محدودة بعمق المعرفة عن هذه الأنشطة. ونحن نسمي ذلك بالمعرفة الشخصية للموضوع. التفكير الإحصائي وتحليل البيانات بكفاءة ربما يكونا أفضل الوسائل لزيادة المعرفة الشخصية بموضوع البحث. وهكذا نجد أن التفكير الإحصائي وتحليل البيانات بكفاءة يساعد المديرين والعاملين في اتخاذ أفضل القرارات لتحسين أداء كل من النظام والعاملين به.

يمكن للتحليل الإحصائي أن يقدم خلفية من المعلومات التي عن شأنها أن تحسن من فهم المرء للبيئة المحيطة به، ومن ثم تساعده في اتخاذ قرارات معينة. ونطاق التحليل الإحصائي يمتد من بداية تلخيص البيانات إلى التعرف على النظام الذي تسير عليه البيانات والذي يؤدي إلى إستنتاجات تتعلق بمصادر هذه البيانات. والتحليل الإحصائي السليم هو طريقة موضوعية لفهم البيانات، أما الإستخدام غير المناسب للطرق الإحصائية فيكون عادة نتيجة لتفكير إحصائي غير سليم. على المدى الطويل، يزودنا التفكير الإحصائي بالفهم الأساسي للطرق الإحصائية وينقلنا من مرحلة البيانات الخام إلى إكتشاف النماذج والعلاقات. معظم محتويات النصف الأخير من هذا الكتاب تقدم تنويعات مختلفة من الطرق الإحصائية.

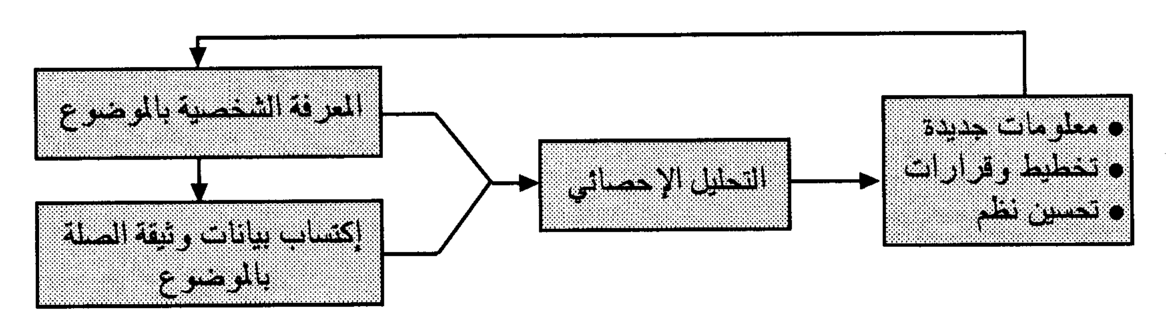
هل الإحصاء شيق وممتع؟ من خبرتنا وجدنا أن الطلاب ترى في علم الإحصاء أنه ممل ومجهد عندما يدرس كمادة منفصلة، وأنهم يفشلوا في إدراك علاقته بالعمل الذي سوف يقومون به في المستقبل. يجب على الطالب أن يفكر في التحليل الإحصائي على أنه ركن أساسي في التطبيقات في كل فروع علم الإدارة. المحلل المالي عليه أن يدمج معرفته بالنواحى المالية مع التحليل الاحصائي حتى يمكنه تقييم القرارات الإستثمارية. مدير التسويق عليه أن يدمج معرفته بالتسويق مع الدراسة الإحصائية قبل أن يقترح استراتيجية تسويقية جديدة. هذه الأمثلة توضح أن الإحصاء يدعم فروع العلم المستخدمة لتحسين المعرفة الشخصية للفرد، وسيجد الطلاب أن الإحصاء مثيراً عندما يطبقونه على موضوعات تكون محل اهتمامهم.

ربما تكون الفرصة الكبيرة في تعظيم المنفعة من الدراسة الإحصائية تكمن في عملية إختيار البيانات، فكلما كانت البيانات أكثر ملائمة ومناسبة لحالة معينة، كلما كان التحليل أكثر فائدة ومنفعة. الحصول على البيانات ثم تحليلها توفر المعرفة الشخصية للمستخدم وتمده بالمعلومات التي يحتاجها في عملية التخطيط أو اتخاذ القرارات.

من أساسيات تحليل البيانات أن نفهم الإختلاف أو التغير بها، فالإختلاف أمر حتمي في جميع أوجه حياتنا. أنظر حولك، هل كل الناس لهم نفس الطول بالضبط؟ بالطبع لا، فبعضهم قصير وبعضهم طويل والبعض بين الإثنين. هل يسجل اللاعب مارادونا نفس العدد من الأهداف في كل مباراة يلعبها؟ بالطبع لا. هل محتوى الأوزان في علب البان الأطفال متطابقة تماما؟ بالطبع لا، هذا إذا كنا نقيس بدقة متناهية. هل يمكنك أن تتوقع الإختلاف في إجمالي المبيعات السنوية لمجموعة من مندوبي البيع متساوي الكفاءة؟ بالتأكيد لا. فأيا كانت الظاهرة التي تمثلها البيانات، فلا بد من وجود اختلاف بين قيم تلك البيانات. فهم الإختلاف ومعرفة أسبابه هو مفتاح فهم نظام البيانات. بتقييم الإختلاف في البيانات المتعلقة بالموضوع، يكون من الممكن إكتشاف ووصف وفهم اسلوب تغير الظاهرة والعلاقات التي بين متغيراتها.

نحن الآن جاهزين لتعريف التفكير الإحصائي **Statistical thinking** على أنه عملية التفكير التي تدرك وتقر أن الإختلاف موجود في كل الظواهر وأن دراسة هذا الإختلاف يؤدي إلى معرفة جديدة وقرارات أفضل وسوف نناقش هذه المبادئ بالتفصيل الكامل في الفصل (١-٥).

شكل (١-١) يوضح استخدام التحليل الإحصائي واقترانه بالمعرفة الشخصية بالموضوع باعتبارهما مرتبطان بالتخطيط الإداري وباتخاذ القرارات وتحسين النظم. لاحظ أن الشكل يعبر عن عملية مستمرة من التحسين. وكلما إكتسبنا معلومات أفضل عن الظاهرة من خلال التحليل الإحصائي، فإننا نزيد من معرفتنا الشخصية بالموضوع ومن ثم يصبح من الممكن أن نتعلم أكثر في الجولة التالية.



شكل (١-١): إستخدام الإحصاء في الإدارة

(١-٢) العناصر الأساسية في التحليل الإحصائي: The Fundamental Elements of Statistical Analysis

في هذا الفصل، نناقش العناصر الأساسية الشائعة في كل الدراسات الإحصائية ولتوضيح هذه العناصر، نقدم هذا المثال الواقعي.

مثال (١-١)

أراد مدير شركة تأمين أن يتفهم بصورة جيدة قرارات الشراء بالنسبة لعملائه. لقد رغب في معرفة ما إذا كان كل من الجنس والدخل هما من العوامل المحددة لسياسة الشراء وما إذا كان نوع

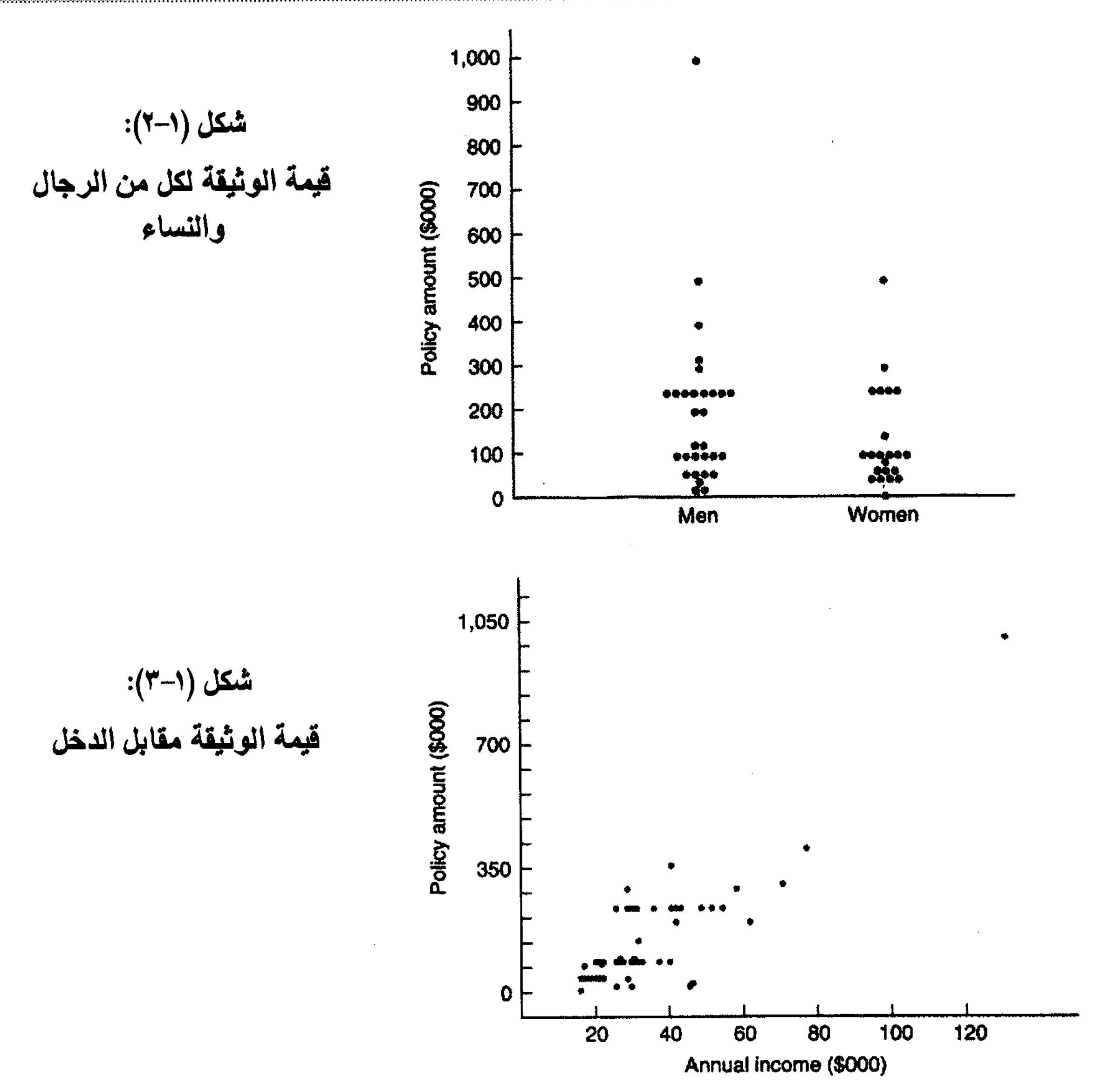
وثيقة التأمين (مؤقتة أم شاملة)، لها تأثير في عملية الشراء. يعتقد المدير أن هذه المعلومات ربما تساعده في تخطيط السياسة البيعية فيما بعد. بيانات عن هذه الدراسة تم الحصول عليها بإختيار عينة عشوائية من ملفات العملاء بالشركة حجمها 51ملف. بالنسبة لكل ملف (عميل) سجل (1)نوع الوثيقة. (2)قيمة الوثيقة. (3)جنس العميل (ذكر /أنثى). (4)حجم الدخل السنوي للعميل. البيانات موضحة في الجدول المرفق.

تأمل قليلا في بيانات الجدول، ما الذي تراه؟ لأول وهله، ترى اختلافات في حجم الدخل وإختلافات في قيم الوثائق. وبنظره فاحصة، يتضح أن العملاء ذوي الدخول المرتفعة يميلوا إلى تملك وثائق ذات قيم كبيرة. شكل (١-٢) يصور بيانيا قيم وثائق التأمين للذكور والإناث. يلاحظ ان هناك تباين واضح بين قيم الوثائق لكل من الذكور والإناث وهو ما يظهره التشتيت الرأسي عند كلا المجموعتين من البيانات. نلاحظ أيضا ان قيمة الوثيقة بالنسبة للرجال تميل إلى حد ما لأن تكون أكبر من قيمة الوثيقة بالنسبة للنساء. في شكل (١-٣) وضعت قيمة الوثيقة على المحور الرأسي مقابل وضع الدخل السنوي للعميل على المحور الأفقي. من الواضح أن العملاء ذوي الدخول السنوية المرتفعة يميلوا لتملك وثائق تأمين ذات قيمة أكبر. ومع ذلك فهناك تداخل إلى حد بعيد بين الدخول المنخفضة للعملاء مع الدخول المرتفعة للعملاء.

الأشكال (١-٢)، (١-٣) تشير إلى أن قيمة الوثيقة للعميل ترتبط بعلاقة مع كل من حجم الدخل السنوي ومع الجنس. هذه البيانات تم تحليلها بصورة أكثر تفصيلا في الفصل الثاني.

Customer	Gender	Policy Amount ($000)	Type of Policy	Annal Income ($000)	Customer	Gender	Policy Amount ($000)	Type of Policy	Annal Income ($000)
1	1	75	1	46.0	27	0	400	1	78.5
2	0	250	1	52.0	28	1	100	0	32.7
3	0	250	1	42.5	29	1	150	0	33.5
7	1	100	1	31.0	30	0	100	1	22.0
5	1	100	0	40.5	31	1	250	1	48.8
6	1	50	0	20.0	32	0	300	1	29.0
7	0	100	1	57.5	33	0	50	1	18.0
8	0	25	0	30.0	34	1	100	0	34.4
9	1	50	1	21.0	35	1	75	0	22.8
10	1	80	0	18.0	36	0	250	0	31.4
11	0	250	1	43.5	37	1	500	1	41.7
12	1	50	1	17.0	38	0	100	1	20.8
13	0	50	1	19.0	39	1	250	0	57.7
14	1	250	1	30.0	40	0	125	0	27.3
15	0	500	1	85.0	41	0	250	1	40.2
16	0	200	0	62.0	42	1	100	1	27.0
17	0	250	1	26.0	43	0	320	0	67.5
18	1	250	1	29.0	44	1	300	0	57.0
19	0	40	0	26.0	45	0	200	1	42.1
20	1	15	0	17.0	46	0	100	1	37.5
21	0	25	1	44.0	47	0	100	1	26.0
22	0	250	1	36.0	48	1	100	1	23.0
23	0	50	1	21.0	49	0	100	1	29.5
24	0	50	1	29.0	50	0	125	1	31.0
25	1	50	1	23.0	51	0	250	1	30.5
26	0	1,000	1	126.0					

Gender: 1 = female, 0 = male; type of policy: 1 = term, 0 = universal.



شكل (١-٢):
قيمة الوثيقة لكل من الرجال والنساء

شكل (١-٣):
قيمة الوثيقة مقابل الدخل

إلى هذه النقطة يمكن اضافة الملاحظات التالية:

1. 80% من الرجال يمتلكون وثائق مؤقتة، بينما 25% فقط من النساء يمتلكون هذه الوثيقة، أي أن نوع الوثيقة يعتمد إلى حد ما على الجنس.
2. متوسط قيمة الوثيقة للرجال 202,000$ مقابل 142,000$ للنساء وهذا يتفق مع النتيجة السابقة المستمدة من شكل(١-٢).
3. قيمة الوثيقة في المتوسط، تميل إلى الزيادة بمقدار 7100$ كلما زاد الدخل السنوي بمقدار 1000$. هذه النتيجة تحددت من خلال استخدام تحليل الإنحدار وهو موضوع الفصول التاسع والعاشر.

وسوف نناقش من الآن العناصر الأساسية في أي دراسة إحصائية. وعادة نستخدم مثال عن التأمين لتوضيح ذلك. معظم البيانات ينظر إليها على أنها مدخلات ومخرجات عملية ما. بصفة عامة، يمكن تعريف العملية **process** على أنها مجموعة من الحالات تتفاعل معا بصورة متكررة لتحويل المدخلات إلى مخرجات. في مثال التأمين نجد أن المدير قد سحب بطريقة عشوائية عينة من 51 ملف من كل ملفات العملاء. الملف يمثل المخرجات للعديد من العمليات.

تتعامل الدراسات الإحصائية مع بيانات تتعلق ببعض مجتمعات موضع إهتمام وعادة تتكون هذه المجتمعات من العنصر البشري، من أشياء، من قياسات طبيعية عن كميات هامة. مصطلح مجتمع **population** يشير إلى مجموعة ما من مثل هذه العناصر والتي نرغب في معرفة وفهم المزيد عنها. وفي بعض الأحيان يستخدم مصطلح **universe** بديلا لذلك. في بعض الدراسات الإحصائية، قد نرغب في التعرف على مجتمع، عند وقت معين من الزمن. في مثل هذه الحالات، فإن المجتمع يتكون من مجموعة العناصر بالكامل عند هذا الزمن. من ناحية أخرى مجموعة المخرجات أو النواتج الخاصة يمكن النظر إليها على أنها عينة من المخرجات أو النواتج الممكنة والتي ظهرت من عملية ما إذا ما استمرت بدون تغيير. فمثلا، لنفرض أننا سجلنا أزمنة الإنتظار لبعض المرضى في أحد العيادات الطبية في شهري مايو ويونيو. هذه النواتج تمثل عينة من نشاط العيادة خلال فترة الملاحظة والتسجيل. في الواقع، نحن نرغب في معرفة ما يتعلق بأزمنة الإنتظار لكل المرضى في شهري مايو ويونيو إذا ما استمرت ظروف العمل بالعيادة دون تغير.

ما الذي نريد أن نعرفه عن المجتمع أو العملية؟ كما ذكرنا من قبل، المعرفة الشخصية بالموضوع ترشدنا إلى تحديد الخصائص التي يجب ملاحظتها ودراستها. ولتقرير أي المتغيرات يجب قياسها ودراستها، ينصح أولا بالتفكير في الخصائص موضوع الإهتمام بصورة عامة. فمثلا، مدير العمليات بأحد البنوك ربما يكون مهتما بتقييم ومن ثم بتحسين إنتاجية فريق العمل المساعد له أو مدير فريق البيسبول ربما يرغب في توصيف مدى قوة لاعبيه. . تعيين هذه المتغيرات ربما يكون غامض جدا عند قياسها. فالقياس يتطلب تعريف وتحديد عملي، تعريف واضح ودقيق بدرجة كافية. المتغير الإحصائي هو تحديد عملي للصفة موضوع الإهتمام. ففي مثال الإنتاجية، يمكن لمدير العمليات بالبنك أن يسجل عدد العمليات التحويلية لكل موظف. بالنسبة لتوصيف مهارة اللاعيبين، يمكن للمدير أن يضع عدد الأهداف التي يسجلها اللاعب كمعيار لدرجة الآداء.

كما ذكرنا من قبل، البيانات المشاهدة تأتى من القياسات المسجلة عن بعض الخصائص محل الإهتمام. هذه القياسات يمكن أن تتحقق إما عن طريق الآلات أو عن طريق ما يسجله الإنسان. فمثلا في عملية التعبئة، وزن العبوات عادة ما يقاس بالآلات، بينما في الإستقصاءات، تسجل أراء المستجوبين من قبل الباحثين.

بفرض أنك ترغب في تسجيل بعض المتغيرات الإحصائية في عينة من المجتمع. العينة الجيدة هي التي تعكس الملامح الآساسية للمجتمع الذي تسحب منه. أهم خطوة هو أن تكون قائمة من مفرادات المجتمع الذي ستسحب منه العينة. هذه القائمة هي الإطار **frame**، أي أن الإطار هو قائمة بمفردات المجتمع. ولكي يتحقق تمثيلا ملائما للمفردات، يكون من المهم أن تختار مفردات العينة من إطار يكون معداً بطريقة جيدة. لذلك يكون من المهم أن يكون الإطار قريبا جدا من المجتمع. ومع ذلك فمن النادر أن تكون هناك إمكانية لتكوين إطار جيد وسليم وعلينا أن نبذل كل الجهد لتحقيق إطار جيد. في مثال التأمين على الحياة، كان الإطار هو قائمة بملفات العملاء المتاحة لدى المدير. هذه الملفات ربما لا تشمل الوثائق الجديدة أو ربما لم يستبعد منها الوثائق المنتهية.

لنفرض أنك ترغب في دراسة عملية ما بدلا من المجتمع، في هذه الحالة يتكون الإطار من كل نواتج العملية الممكنة خلال فترة زمنية للدراسة. في مثال العيادة الطبية، يتكون الإطار من ازمنة الإنتظار لكل المرضى اللذين زاروا العيادة في مايو ويونيو.

في واقع الأمر، فليس من الممكن في كل الحالات أن نحصل على البيانات من كل مفردات الإطار (إذا تم ذلك، فإننا نسمي ذلك تعداد **Census**)، لأن ذلك سيكون مكلفا جدا وأن الوقت المستغرق لأداء ذلك سيكون طويلا، بدلا من ذلك نركن إلى العينة. العينة **Sample** هي مجموعة فرعية من المجتمع. وبالنسبة للعملية، العينة هى مجموعة فرعية من مخرجات (نواتج) العملية خلال فترة زمنية ما. مفردات العينة تسمى وحدات المعاينة **Sampling units**. (في بعض الحالات تسمي وحدات تجريبية **experimental units**)، بعض الناس لا يثق في النتائج المبنية على عينة، هل أنت كذلك؟ هناك بعض الحكمة من عدم الثقة هذه، لأن العينة يمكن أن تعطي نتائج مضللة. ولكن مما لاشك فيه أن إعتبارات التكلفة والوقت غالبا ما تجعل العينة امرا ضروريا وأحيانا يكون المتاح فقط هو معلومات عن عينة.

افترض أن تعداد أمكن تنفيذه بدقة وبنفس الطرق التي استخدمت في المعاينة، أي نفس الباحثين، نفس الأدوات، أسئلة البحث... إلخ. مثل هذا التعداد يسمى عينة 100٪. الفرق بين نتائج المعاينة ونتائج العينة 100٪ يسمي بخطأ المعاينة **Sampling error** وخطأ المعاينة هو حقيقة في حياتنا وجزء أساسي من الاستنتاج الإحصائي. وهذا الخطأ عادة ما يظهر في نتائج الاقتراعات السياسية ضمن عبارة مثل:"42٪ من الناخبين تفضل المرشح A، بهامش خطأ قدرة: موجب أو سالب 3%. هذا يعني أن النسبة الفعلية للعينة 100% يمكن أن تقل إلى 39% أو تزيد وتصل إلى 45% بسبب خطأ المعاينة. هذا المصدر من الخطأ لا يمكن تجنبه، لذا يكون من المهم تقدير حجم خطأ المعاينة المقترن بأي دراسة إحصائية. كثيرا من الطرق الأحصائية تشمل اساليب لتقدير حجم خطأ المعاينة، بشرط أن العينة تكون قد تم اختيارها بوسيلة ملائمة. (إجراءات سحب العينة ستناقش في الفصل (١-٤)).

افترض أنه كان ممكنا ملاحظة عينة 100%. قبل أن نتعلم كيف نحصل منها على المعلومات، يجب علينا أولا تلخيص البيانات وتنظيمها وعرضها بيانيا بصورة ذات معني مفيد. بالطبع، عقولنا لا يمكن أن تعالج وبكفاءة كم هائل من المعلومات وبالتالي علينا بتلخيصها حتي نجد لها معنى. فمثلا، افترض أن مدير شركة التأمين في مثال (١-١) كان قد سجل قيم وثائق التأمين لكل 1250عميل وهم عملاء الشركة. لكي يستخدم هذه المعلومات بكفاءة عالية، عليه بتلخيصها بطريقة ما. المؤشر (أو المعلمة) **parameter** هو رقم واحد يلخص بعض أوجه (صفات) المجتمع أو العملية. كان هناك مؤشران موضع اهتمام مدير شركة التأمين هما متوسط قيمة الوثيقة للعملاء الرجال ومتوسط قيمة الوثيقة للعملاء النساء. كان هناك أيضا مؤشران آخران موضع اهتمام هما نسبة الرجال ونسبة النساء اللذين يملكون وثائق مؤقته في مقابل وثائق شاملة. مدير شركة التأمين حصل على معلومات من عينة لكي يفهم تلك المؤشرات التي تميز المجتمع. مؤشر عملية ما هو رقم واحد يلخص بعض أوجه سلوك العملية. فمثلا، متوسط العملية هو متوسط كل المخرجات التي يجب أن تنتج اذا استمرت العملية كما هي دون تغير. مفهوم مؤشر عملية ما يكون في بعض الآحيان إفتراضياً لأن النواتج المحتملة للعينة 100% يكون مستحيلا. المؤشرات محل الأهتمام في مثال العيادة الطبية يمكن أن تشمل متوسط وقت الآنتظار لكل مريض، نسبة المرضى اللذين يصلوا متأخرين.

ومثلما كان التلخيص ضروريا اذا كانت كل البيانات متاحة، يكون أيضا من الضروري تلخيص بيانات العينة. مصطلح إحصاء **Statistic** هو كمية عددية تلخص بيانات العينة. فمثلا، متوسط العينة هو إحصاء. حيث أن هدف أي دراسة إحصائية هو التعرف على مؤشرات(معالم) المجتمع أو العملية،

فإن التحليل عادة يركز على الإحصاءات التي تناظر هذه المؤشرات. فمثلا، حيث أن مدير شركة التأمين يرغب في معرفة متوسط قيمة الوثيقة للرجال وللنساء من العملاء، فإنه يقدر تلك المتوسطات من العينة.

لاحظنا في مثال التأمين، أنه عند كل زيادة في الدخل 1000$، تزيد قيمة وثيقة التأمين بمتوسط 7100$. هذه النتيجة تحققت عن طريق بناء علاقة إحصائية. النموذج الإحصائي **Statistical model** هو معادلة رياضية توضح كيف يرتبط متغير رئيسي واحد بعلاقة مع متغير واحد أو أكثر، مع فرض اهمال متغيرات اخرى ضعيفة التأثير. المعادلة التالية كانت قد قدمت في مثال التأمين لتصور العلاقة بين قيمة الوثيقة والدخل في العينة:

قيمة الوثيق = -75000+7.1× الدخل

هذه العلاقة الإحصائية تعطي نموذجا يفسر الإختلاف بين قيم الوثائق للعملاء بدلالة دخل العميل تحت إفتراض إهمال العوامل الأخرى والتي يمكن أن تؤثر بقدر ضئيل في قيمة الوثيقة. هذه المعادلة تبين أن قيمة وثيقة العميل يمكن أن نحصل عليها تقريبا عن طريق ضرب الدخل السنوى في (7.1) ثم طرح 75000$. فمثلا هذه المعادلة تتنبأ أن عميلا دخله السنوي 40000$ تكون قيمة الوثيقة له 209000$ (75000+7.1× 40000=209000 –). بالمثل تتنبأ أن عميلا له دخل سنوي 50000$ تكون له وثيقة قيمتها 280000$.

استخدام معلومات العينة لمعرفة ما يتعلق بالمجتمع يسمى بالإستنتاج الإحصائي **Statistical Inference** (غالبا ما نختصر هذا المصطلح إلى كلمة إستنتاج). في هذا الكتاب نفحص نوعين من الإستنتاج الإحصائي: التقدير **estimation** وإختبارات الفروض **hypothesis testing**. في التقدير نستخدم إحصاء العينة لتقدير (أو تخمين) قيمة مؤشر المجتمع أو العملية. في مثال التأمين، متوسط قيمة الوثيقة المقدر للنساء كان 142600$. بالمثل، تزيد قيمة الوثيقة بمتوسط مقدر بـ 7100$ لكل زيادة سنوية في الدخل تساوى 1000$. في إختبارات الفروض، نحن نقيم فاعلية أو مشروعية إدعاء ما (يسمى فرضاً) يتعلق بقيمة تخص مؤشرا ما. في مثال التأمين، ربما نرغب في فحص أو أختبار الإدعاء القائل " متوسط قيمة الوثيقة للرجال يتساوى مع متوسط قيمة الوثيقة للنساء".

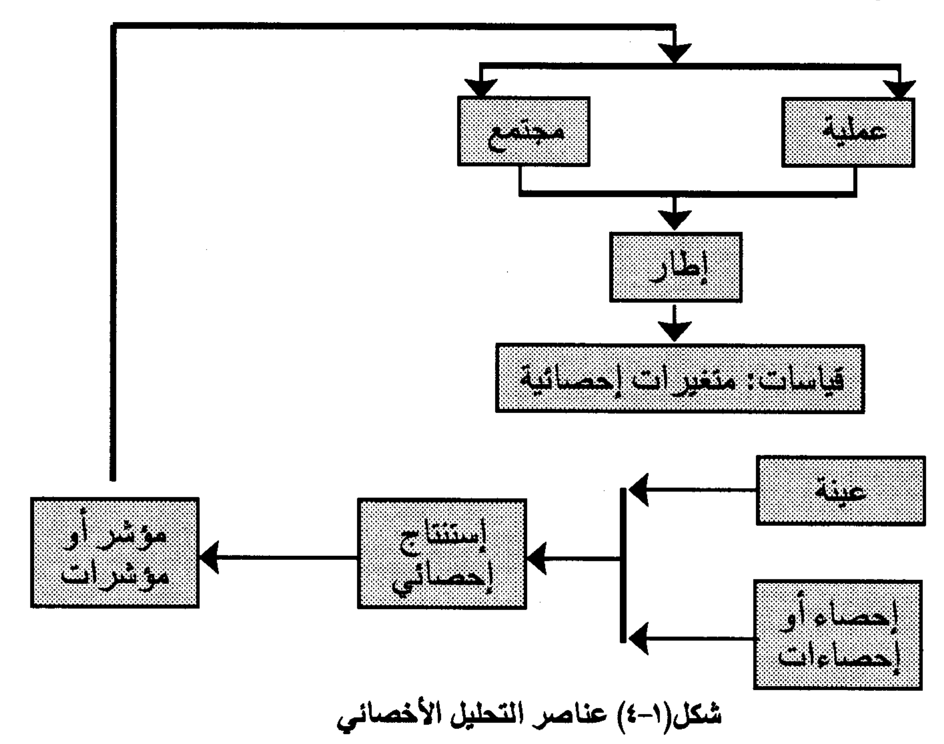
الثقة **confidence** المقترنة بالإستنتاج الإحصائي، بمعناه الواسع هي إمكانية أن يكون ذلك صواباً وبمعنى أكثر قرباً للثقة، فهو يعني الدقة الأحصائية، بمعنى كم من الأخطاء يمكن ان تحدث في الإستنتاج الإحصائي. في مثال التأمين، أعتبر أن المتوسط المقدر لقيمة الوثيقة للنساء هو 142600$. هذا التقدير مبني على عينة، لذا فمن المحتمل أن يكون به بعض الخطأ. بفرض أن مدير شركة التأمين حدد أن ذلك الخطأ لا يمكن أن يزيد عن 20000$. هنا من الممكن أن ينخفض متوسط الوثيقة للنساء ليصل إلى 122600$ أو يرفع ليصل إلى 162000$. الآن، كيف تأكد المدير أن الخطأ لن يزيد عن 20000 $. ؟هذا سؤال مهم. إذا كان المدير يثق بدرجة كافية أن متوسط قيمة الوثيقة للنساء يقع بين122600$، 162600$. فإنه يمكن أن يخطط سياسته وفق ذلك وإلا فإن هذه المعلومات تصبح غير نافعة في عملية التخطيط وإتخاذ القرارات.

العناصر الأساسية في التحليل الإحصائي يمكن تلخيصها على النحو التالي:

العناصر الأساسية في التحليل الإحصائي

* مجتمع Population هو مجموعة العناصر التي نرغب في فهمها، وغالباً يستخدم مصطلح Universe بديلا لذلك.
* عملية Process هي مجموعة من الحالات التي تأتي مع بعضها مراراً لتحول المدخلات إلى مخرجات.
* اطار Frame هو قائمة بمفردات المجتمع أو نواتج العملية والتي لها فعلاً فرصة لكي تظهر في العينة.
* متغير إحصائي Statistical Variable يكون معرف بشكل جيد، وهو يقيس الخاصية موضوع الإهتمام.
* عينة Sample هي مجموعة فرعية من المجتمع أو مجموعة مشاهدات من نواتج عملية خلال فترة زمنية.
* مؤشر Parameter هو كمية عددية تلخص بعض أوجه المجتمع أو العملية.
* إحصاء Statistic هو كمية عددية تلخص بعض أوجه العينة.
* نموذج إحصائي Statistical model هو معادلة رياضية توضح كيف يرتبط متغير ما مع متغير واحد أو أكثر، بفرض اهمال أثر متغيرات أخرى ضعيفة.
* استنتاج إحصائي Statistical Inference هي العملية التي نستخدم فيها معلومات العينة لمعرفة ما يتعلق بالمجتمع أو العملية.
* الثقة Confidence مقترنة بالإستنتاج الإحصائي، هي إمكانية أن يكون ذلك صواباً أو خطأ بما لا يتجاوز كمية معينة.

شكل (١-٤) يوضح المفاهيم السابقة عندما ترتبط بالمجتمع والعملية من خلال التحليل الأحصائي.



شكل(١-٤) عناصر التحليل الأخصائي

فيما يلي مثالين يوضحا استخدام التحليل الأحصائي في مجال ادارة الأعمال.

مثال (١-٢)

مدير مصنع لإنتاج الملفات الكهربائية يختار عينة من عشر ملفات كل نصف ساعة، ويقاس مقاومة كل ملف. متوسط المقاومة في هذه العينات يتم رقابته بعناية فائقة. هذه المتوسطات تختلف إلى حد ما لأن كل منها يمثل عينة صغيرة من الإنتاج. لكن إذا كان متوسط العينة ينحرف بشدة عن المعيار المحدد، فإن العملية الإنتاجية تراقب وتختبر بعناية ويتم إجراء التعديلات إذا ما أمكن التعرف على العامل المسبب لهذا الإنحراف. العديد من المتوسطات المتعاقبة التي تظهر إرتفاعا غير عادي أو إنخفاضا غير عادي تعطي إشارة واضحة إلى ان هناك مشكلة موجودة (وربما تكون هناك فرصة لإجراء تحسينات).

(أ) هل هذا المثال يتعامل مبدئيا مع مجتمع أم عملية؟ ناقش ذلك.

(ب) صف الإطار لهذه الدراسة الإحصائية المستمرة.

(ج) حدد وحدات المعاينة.

(د) حدد المتغير الإحصائي.

(هـ) ما هو المؤشر موضوع الإهتمام.

(و) حدد الإحصاء المناسب لهذا المؤشر.

(ز) متى تؤدي هذه الدراسة الإحصائية إلى الشروع في عمل ما؟ وهل هذا العمل يقتصر على الإطار ام المجتمع أم العملية؟

(ح) هل يمكنك التفكير في مؤشرات أخرى يمكن أن تكون محل إهتمام مدير المصنع؟.

(ط) هل يمكنك التفكير في بعض العوامل التي يمكن أن تكون سببا في تباعد قيم المقاومة في العينة؟

الحـــل

(أ) نحن مهتمين بعملية إنتاج ملفات كهربائية عبر الزمن. نحن نرغب في التعرف على العملية التي تنتج ملفات أكثر من التعرف على الملفات نفسها.

(ب) يتكون الإطار من كل الملفات المنتجة أثناء فترة المعاينة المتاحة لإختيارها كعينة.

(ج) وحدات المعاينة هي الملفات التي أختيرت في العينات.

(د) المتغير هو المقاومة للملف المنتج.

(هـ) المؤشر موضوع الإهتمام هو متوسط مقاومة الملفات المنتجة بهذه العملية.

(و) الإحصاء المناسب هو متوسط مقاومة الملفات في عينة محددة.

(ز) الإهتمام المبدئي هو الشروع في عمل ما ينصب على العملية الإنتاجية نفسها، أي تجاه المدخلات، مثل الميكنة وعوامل أخرى متي كان هناك حاجة إلى ذلك.

(ح) من المؤشرات الأخرى والتي تبدو مهمة هي التباين في المقاومة بين الملفات المنتجة. فإذا كان بعض الملفات ذو مقاومة عالية جدا والبعض الآخر ذو مقاومة ضعيفة جدا، فهذا يعني أنه ربما تكون هناك مشكلة على الرغم من أن المتوسط تقريبا سليم.

(ط) هل الملفات ككل أنتجت من نفس الآلة؟ هل هناك أكثر من معيار يستخدم لقياس المقاومة؟ هل هناك العديد من العمال؟ هل هناك إختلافات في جودة المادة الخام؟

مثال (١-٣)

طلب من مدير إدارة الأفراد القيام بإجراء دراسة تحليلية لمعرفة كيف يرتبط مرتب المدير بعدد سنوات خبرته. حددت عينة من 62 مدير يختلفون فيما بينهم في سنوات الخبره. بإستخدام أحد التحليلات الإحصائية مثل تحليل الإنحدار*، حصل المدير على معادلة تصلح كنموذج للعلاقة بين المرتب والخبرة:

المرتب= 20,200+2,400×(سنوات الخبرة).

هذه المعادلة تشير إلى أن رواتب المديرين تقريبا عبارة عن حاصل ضرب 2,400 في عدد سنوات الخبرة مضافا إلى ذلك 20,200$.فمثلا مدير ما عدد سنوات خبرته 15سنة يتوقع أن يكون راتبة حوالي 56,200$ دولار، حيث:

$$20,200+2,400(15)=56,200$$

(أ) حدد المؤشرات محل الإهتمام في هذه الدراسة.
(ب) حدد الإحصاءات التي تعد تقديرا لهذه المؤشرات.

الحـــل

(أ) المؤشرات محل الإهتمام هي قيم B,Aفي المعادلة التالية:
المرتب=A+B× (سنوات الخبرة).
وهي تمثل العلاقة بين الراتب وسنوات الخبرة لكل المديرين في المنظمة.

(ب) بإستخدام تحليل الإنحدار المبني على عينة من 62مديرا، نجد أن مدير إدارة الأفراد قدر A لتساوي 20,200$ وقدر B لتساوي 2,400$. تلك هي قيم إحصاءات العينة المستخدمة لتقدير B,A.

(١-٣) تقييم التحليل الإحصائي: The Evaluation of Statistical Analysis

الإحصاء أداة لا غنى عنها لنتعرف على نظم إدارة الأعمال، لكنها بالتأكيد ليست معصومة من الخطأ. فبينما يكون الإحصاء مهما لنتفهم كيف يمكن أن نستخدم التحليلات الإحصائية بكفاءة، فإنه يتساوى في الأهمية أيضاً أن نتفهم كيف يمكن أن تكون التحليلات الإحصائية مضللة. كثير من مصادر الأخطاء المحتملة تكون مقترنة بأي دراسة إحصائية. فمثلا، لقد ذكرنا منذ قليل أن خطأ المعاينة هو حقيقة في حياتنا.. ومع ذلك فمن المهم أن نتفهم أن مصادر الأخطاء التالية يمكن تصغيرها من خلال التخطيط بعناية والفهم المناسب للطرق الإحصائية.

الفشل في ربط مجتمع الدراسة مع المجتمعات التي تطبق عليها القرارات أو الخطط:

هذه المشكلة عادة لا يمكن تجنبها بالكامل، لأن القرارات والخطط تطبق في المستقبل على المجتمعات والعمليات. تأتي البيانات الإحصائية من مجتمعات أو عمليات حالية أو من الماضي. المدى الذي يمكن

* سيقدم تحليل الأنحدار في الفصلين التاسع والعاشر.

أن يتلائم بـه مجتمع الدراسة مع المجتمع في المستقبل يجب أن يقييم. هذا التقييم يجب أن يعتمد على معرفة المشتغلين أو المديرين بالنظام ومقابلة ذلك بالتقييم الإحصائي . فمثلا المدير في مثال شركة التأمين، استنتج أن الرجال في المتوسط يمتلكون وثائق أكبر قيمة من النساء، على أساس العميل الحالي للشركة. أي قرار يبنى على هذه النتيجة يفترض أن هذه الخاصية سوف تنطبق على العميل في المستقبل.

المعالجة غير الملائمة للبيانات المجمعة عبر الزمن:

من أكثر الأخطاء شيوعاً في التحليل الإحصائي، هو اننا نتجاهل حقيقة أن البيانات قد تم تجميعها خلال فترة زمنية. إذا فشلنا في أن نأخذ الزمن في الإعتبار عندما نقوم بعملية تحليل البيانات، فإننا نفقد فرصة أن نلاحظ تغيرات يمكن أن تكون قد حدثت. وعلى الرغم من أن المجتمعات تتجه للتغير بصورة تدريجية أكثر من العمليات، إلا أن كلاهما له وجود ديناميكي يمكن أن يتحمل تغيرات ضخمة عبر الزمن. لذلك، يجب على المرء أن يختبر دائما مدى إنتظام التغيرات في البيانات عبر الزمن، حتى إذا كانت دورة الزمن قصيرة نسبياً. عادة يتحقق ذلك عن طريق رسم البيانات بيانياً. إذا كان واضحا عدم وجود تغيرات جوهرية تكون قد حدثت عبر الزمن، هنا يتخذ إجراءاً على اساس أن البيانات أتت من مصدر لم تحدث به تغيرات.

لنأخذ مثال التأمين وفيه نعالج كل مجموعة من الرجال والنساء على أنها مجموعات منفصلة، وذلك بعد أن نكون قد حسبنا لكل نوع منهم متوسط قيمة وثيقة التأمين. العميل الحالي يشمل الرجال والنساء اللذين أشتروا وثائق التأمين عند أزمنة مختلفة في الماضي منذ بداية زمن أول وثيقة منذ حوالي 20سنة. هل من الممكن أن نجد تغيرات قد حدثت في سلوك الرجال والنساء عبر هذه الفترة؟ على سبيل المثال، ربما يكتشف المدير أن متوسط قيمة الوثيقة للرجال اللذين اشتروا وثائق منذ أكثر من 10سنوات مضت، هي أقل من متوسط قيمة الوثيقة للرجال اللذين بدأوا بالشراء خلال آخر خمس سنوات. إذا كان هذا هو الوضع، فكيف يكون معنى أن المتوسط $202,000 ذلك الذي حسب من بيانات العينة؟ بإهمال سلسلة الزمن منذ أن بدأت أول عملية شراء للوثائق، ربما يفقد المدير معلومات هامة تتعلق باتجاهات العملاء ويصل إلى نتائج خطأ تتعلق بالعميل في المستقبل.

الأطار لا يعبر عن المجتمع:

يتعرض التحليل الإحصائي لأخطاء بالقدر الذي يكون فيه الأطار غير متلائماً مع المجتمع. في مثال التأمين يتكون الأطار من كل العملاء في الملف عند وقت إجراء الدراسة. ومع ذلك، فهناك عملاء جدد لم يشملهم الملف، وعملاء انسحبوا حديثاً ولكن اسمائهم لم يتم ازالتها من المف. هل هذه مشكلة خطيرة؟ من المحتمل لا، ولكن هذا القرار (وهو غير إحصائي) يرجع فيه للمدير.

المشكلة يمكن أن تكون أخطر. سنتناول إختبار مذاق مشروب طازج نفذ في إحدى المدن. الأطار يتكون من كل المستهلكين اللذيم كان لهم فرصة الأشتراك في هذا الأختبار. وهكذا يكون الأطار محدوداً بالمستهلكين في المدينة حيث يكون الإختبار قد نفذ. إذا كان الأختبار قد نفذ في مركز تجاري للتسوق في نهاية الأسبوع، فإن الأطار يكون أكثر محدودية بالمستهلكين اللذين يتعاملوا مع المركز التجاري بصفة دائمة في نهاية الأسبوع. إلى هذا الحد، نجد أن المستهلكين إللذين يترددوا كثيرا على المركز التجاري في نهاية الأسبوع لا يمكن أن يمثلوا مستهلكي المشروب عامة وتكون نتائج هذه الدراسة ذات مخاطر.

ضعف إختيار المتغير الإحصائي:

هذه المشكلة تعتبر أساس كثير من المناقشات. من هو أفضل لاعب في كرة السلة، هل هو ماجيك جونسون أم ميخائيل جوردن؟ المؤيدون لجوردن حججهم في ذلك أنه اللاعب الذي قاد اتحاد كرة السلة القومي، NBA، كل سنة إلى الفوز وأنه كان من بين الرواد بكثير من المعايير الإحصائية. المؤيدين لجونسون يعتبرونه مثل ليكرز الذي فاز فريقة في كثير من البطولات الدولية تحت قيادتة. أي الأراء صواب؟ في الواقع لا يوجد رأي حاسم لهذه القضية، فالكل يعتمد على ماهو المتغير الإحصائي الذي يقبله كمعيار لجودة الاداء. هذه المشكلة تكون أكثر حدة في التحليلات التجارية. فمثلاً، إلى أي درجة تصل قوة إقتصاد الدولة؟ الكل يعتمد على متغير إحصائي لقياس قوة الأقتصاد. إذا إختير إجمالي الناتج القومي GNP أو مؤشر الأوراق المالية، فإنك يجب أن تتوقع أن الأقتصاد قوي وسليم. أما إذا أختير الميزان التجاري (والذي يعاني من عجز كبير) أو حجم العجز في الميزانية الفيدرالية، فإنك يجب أن تتوقع أن الأقتصاد ضعيف. في الواقع، فإن السياسيون يختارون وبذكاء المتغيرات الأحصائية بعناية كبيرة كي تدعم وجهة نظرهم وقضاياهم.

الفشل في القياس بدقة:

عندما نقيس بعض المتغيرات علي مفردات العينة، نحصل علي بيانات العينة. أغلب مصادر الخطأ في البيانات هو الفشل في دقة القياس لها. وهذا يرجع إلى العديد من الأسباب. أجهزة القياس ربما لا تكون قد تم معايرتها بدقة. الأشخاص الذين يقوموا بتسجيل قياسات جسمانية ربما لا يكونوا مدربين كما ينبغي. أو توصيف القياسات ربما تكون غامضة. عدم التدريب الجيد للملاحظين وعدم الدقة في توصيف القياسات تسبب كثير من الأخطاء في الدراسات الأحصائية. سنتناول مثال من احد الفصول الدراسية. أخبر الطلاب القيام بحصر عدد الصفحات في كتاب يتداول فيما بينهم. قليل جدا من الطلبة سجلوا نفس العدد من الصفحات، على الرغم من أن كل الطلبة أستخدموا نفس الكتاب في عملية العد. المشكلة كانت أن مصطلح صفحة **page** لم يحدد على نحو كاف. بعض الطلبة أعتبروا الورقة (امام وخلف) كأنها صفحة والبعض اعتبر الورقة على أنها صفحتين. الكتاب يحتوي في مقدمته على عددا من الصفحات غير المرقمة، وبعض الطلبة حصروا هذه الصفحات وبعضهم لم يفعل ذلك. أيضا هناك الصفحات البيضاء، البعض قام بحصرها والبعض تركها.

في بعض الأستقصاءات ربما تظهر مشكلة الأجابات غير الصحيحة. والسبب العام أن المستجوبين لا يفهموا الأسئلة بالطريقة التي وضعت بها بسبب عدم وضوح الصياغة. مشكلة مشابهة لذلك أن صياغة الأسئلة ربما توحي بقوة بإجابات مرغوب فيها. لهذا تكون فكرة جيدة أن نسأل نفس السؤال عدة مرات باستخدام صيغ مختلفة في كل مرة. اخيراً، بعض المستجوبين ربما لا يذكروا لك الحقيقة، خاصة عن اسئلة قد لا يقبلوها أو لا يرتاحوا لها.

فمثلا خرج إقتراع في فرجينيا عام 1989عن فوز ساحق للسيد/ دوجلاس والدر كحاكم للمدينة. ولكن عندما تمت الأنتخابات النهائية، فاز السيد/ والدر بهامش ضئيل جداً. من المؤكد أن كثير من الناخبين قد كذبوا في الأقتراع الذي تم من قبل الأنتخابات، لأنهم لم يكونوا مستعدين لأن يخبروا من قاموا بالإقتراع أنهم لن يعتزموا التصويت لصالح مرشح أسود.

الأختيار غير المناسب للإسلوب الإحصائي أو للنموذج الإحصائي:

معظم أجزاء هذا الكتاب تهتم بهذه النقطة عند التحليل الإحصائي. فبالإضافة إلى تقديم تنويعات من الأساليب الإحصائية، يكون من الضروري أن تكون قادرا على أن تتذكر الحالات التي يطبق فيها الأسلوب الأحصائي بصورة سليمة وإلا قد يؤدي هذا إلي نتائج مضللة. نفس الإهتمام يراعى عند إستخدام النماذج الأحصائية. ليست كل النماذج تصف العلاقات بين المتغيرات بصورة ملائمة ومن المهم أن تكون قادراً على اختيار الملائم منها قبل إستخدامه.

تمارين:

(١-١) أشرح لماذا يعد التحليل الإحصائي مهماً في إدارة الأعمال.

(١-٢) ناقش النقص أو الخلل المحتمل في التحليل الإحصائي والذي يمكن أن يؤدي إلى تخطيط وإتخاذ قرارات غير ناجحة.

(١-٣) ما هو التفكير الإحصائي ولماذا يعد مهماً في إدارة الأعمال؟

(١-٤) أشرح لماذا يعد إختيار البيانات أمراً هاماً.

(١-٥) ماهي الخاصية التي من المتعذر إجتنابها في كل البيانات ولماذا يكون فهمها ضرورياً؟

(١-٦) إشرح الفرق بين عملية ومجتمع.

(١-٧) ماهو المتغير الإحصائي؟

(١-٨) ما هو الأطار ولماذا يجب أن يكون قريباً من المجتمع أو العملية؟

(١-٩) أشرح الفرق بين المؤشر والإحصاء.

(١-١٠) أشرح هدف الاستنتاج الأحصائي.

(١-١١) أشرح الفرق بين عملية التقدير وإختبارات الفروض.

(١-١٢) ما هو خطأ المعاينة؟

(١-١٣) ناقش مصادر الأخطاء المحتملة المقترنة بالدراسات الأحصائية والنتائج المترتبة عليها.

(١-١٤) بالنسبة للحالات من (أ) إلى (هـ) حدد لها العناصر الإحصائية التالية:

(١) المجتمع أو العملية.

(٢) الإطار.

(٣) المتغير (أو المتغيرات) الإحصائية.

(٤) المؤشر (أو المؤشرات) محل الإهتمام.

(٥) الإحصاء (أو الإحصاءات) محل الإهتمام.

(أ) جمعية السرطان الأمريكية مهتمة بتحديث معلوماتها عن عادات التدخين بين شباب المراهقين.

(ب) محلل عمليات بأحد البنوك مهتما بتقييم زمن إنتظار العميل قبل أن يحصل على خدمة التحويل.

(جـ) وكالة متخصصة في أعمال اليانصيب مهتمة بتحديث معلوماتها عن الشباب المغتربين اللذين يشتركون في اليانصيب بإنتظام.

(د) مدير مصنع ينتج نوع معين من المعادن يرغب في تقييم قوة الكسر.

(هـ) ترغب الغرفة التجارية بإحدى المدن في تحديث معلوماتها عن كمية النقود التي ينفقها الأعضاء عند حضورهم إجتماع الجمعية العمومية للغرفة.

(١-١٥) قام مدير إحدى المستشفيات بتسجيل طول مدة الأقامة بالأيام لعينة من 20 مريض ممن هم تحت الرعاية المتوسطة، هذه العينة أختيرت من قائمة شملت كل من دخل المستشفى في مارس 1994، البيانات (بالأيام) علي النحو التالي. متوسط هذه البيانات هو 7.7يوماً، لذا فإن المدير قدر متوسط إقامة المرضى اللذين دخلوا في مارس بـ 7.7 يوماً.

23	2	5	10	2	5	4	1	5	33
2	7	5	1	9	8	17	7	6	1 ،

فيما يلي مجموعة من العناصر المعينة:(كل عنصر لابد من إستخدامه)

(أ) المجتمع (ب) العملية (جـ) الإطار (د) متغير إحصائي (هـ) عينة

(و) وحدة المعاينة (ز) مؤشر (ع)إحصاء (ط) إستنتاج إحصائي

مطلوب وضع هذه العناصر أمام الفراغات التي في الجمل التالية:

.... قائمة مرضى الرعاية المتوسطة في سجلات الدخول في مارس 1994.

.... كل مرضى الرعاية المتوسطة اللذين دخلوا المستشفى في مارس 1994.

.... كل مرضى الرعاية المتوسطة.

.... متوسط طول مدة الأقامة لعينة من 20 مريض.

.... طول مدة الأقامة.

.... 20مريضا تم إختيارهم من القائمة.

.... تقدير المدير بأن متوسط طول مدة الإقامة لكل مرضى شهر مارس كان 7.7يوماً.

.... متوسط طول مدة الإقامة لكل مرضى الرعاية المتوسطة اللذين دخلوا المستشفى في شهر مارس 1994.

(١-١٦) محلل عمليات بأحد البنوك قام بتسجيل كمية النقود في عينة من 20 عملية من عمليات التحويل التي يقوم بها العملاء. التحويلات الـ 20 أختيرت من قائمة كل التحويلات التي تمت في شهر أغسطس، كما وجدت في ملف التحويلات بالكمبيوتر بالبنك. لقد كان المحلل مهتما بصفة خاصة بتقدير متوسط حجم التحويلات بالنسبة لكل تحويلات شهر أغسطس. البيانات كانت كما يلي(معبراً عنها بالدولار). متوسط هذه البيانات هو 326.80 دولار، لذلك فإن المحلل قدر أن متوسط حجم التحويلات لشهر أغسطس كان 326.80 دولار.

235 202 295 104 28 25 44 58 285 338

330 750 25 1660 950 18 47 507 625 10

حدد العناصر الإحصائية التالية من سياق بيانات التمرين

(أ) مجتمع أو عملية. (هـ) وحدات معاينة.

(ب)إطار. (و) متغير إحصائي.

(جـ) مؤشر. (ز) إستنتاج إحصائي.

(د) إحصاء. (ح) عينة.

(١-١٧) في تمرين (١-١٥) قدر المدير أن متوسط طول مدة الإقامة لشهر مارس 1994هو 7.7يوماً. حدد ثم صف بأختصار ثلاث مصادر محتملة للخطأ في هذا التقدير.

(١-١٨) في تمرين (١-١٦)، قدر المحلل أن متوسط حجم التحويلات لشهر أغسطس هو 326.80 دولار. حدد ثم صف بإختصار ثلاث مصادر محتملة للخطأ في هذا التقدير.

(١-٤) الحصول علي البيانات: Obtaining Data

هدف التحليل الإحصائي هو التعرف علي المجتمع أو العملية قدر المستطاع. لذا فمن المرغوب فيه الحصول على البيانات التي تميز المجتمع أو العملية بصورة جيدة بالإضافة إلى تصغير خطأ المعاينة. هناك اربع طرق رئيسية يمكن بها أن نحصل على البيانات:

(1) العينة العشوائية **Random Sample** .

(2) التجربة العشوائية **Randomized Experiment** .

(3) البيانات الملائمة **Convenience Data**.

(4) المجموعات الفرعية المنطقية **Rational Subgroups**.

وسوف نعرض لكل طريقة على النحو التالي.

(١-٤-١) العينات العشوائية Random Samples

أكثر الطرق فاعلية للتحكم في خطأ المعاينة هو أن نستخدم أسلوباً يسمى المعاينة العشوائية **random sampling**. وهناك صور متعددة من المعاينة العشوائية. في هذا الكتاب سوف نعتمد بصفة اساسية على فكرة العينة العشوائية البسيطة **Simple random sample** وهي العينة التي يتحقق فيها لكل مفردات المجتمع فرصاً متساوية ومستقلة لكي تكون ضمن مفردات العينة. وهذا يؤكد لنا أن كل العينات التي من نفس الحجم والتي يمكن إختيارها لها فرصاً متساوية في الأختيار.

وهناك مناقشة أكثر تفصيلا عن إجراءات المعاينة موضحة في الجزء (٥-٢) وللمعاينة العشوائية العديد من المزايا الأساسية تفوق الطرق غير العشوائية في الأختيار:

١- حذف التحيز Eliminating Bias

هذا الأسلوب يؤكد ان مفردات العينة تم إختيارها بدون تحيز، ولكن إذا أخترنا مفردات العينة تحكمياً، فهناك دائماً إمكانية لوجود التحيز. وعلى الرغم من ان الأختيار العشوائي لا يضمن بأن تكون العينة ممثلة للمجتمع، إلا أنه يحذف مخاطر الأختيار المتحيز.

٢- تحديد الثقة Determining Confidence

أسلوب العينات العشوائية يضع الأساس الإحصائي لتحديد الثقة المقترنة بالإستنتاج الإحصائي. والإستنتاج الإحصائي لا يمكن تنفيذه إذا كانت مفردات العينة تم أختيارها بأي طريقة أخرى خلاف الطريقة العشوائية.

٣- التحكم في خطأ المعاينة Controlling Sampling Error

أسلوب العينات العشوائية يسمح بالتحكم في خطأ المعاينة وذلك عن طريق إختيار حجم العينة* لذلك، فإنه يعطي الوسائل لتحقيق مستوى معين مرغوب فيه من خطأ المعاينة. ولكن مع الطرق غير العشوائية في إختيار العينة، فإنه لا يمكن أن يتحقق مستوى مقبول من خطأ المعاينة.

ولكن، كيف نختار عينة ما بحيث أن كل مفردات المجتمع يكون لها فرصاً متساوية ومستقلة في عمليات الأختيار؟ الفكرة الأساسية هي أن نختار مفردات العينة مفردة وراء الأخرى، حتي يتم إختيار حجم العينة المطلوب، بعد ذلك نقيس أو نسجل الخاصية موضوع الأهتمام لكل مفردة من مفردات العينة. فمثلا، نفرض أننا نرغب في إختيار عينة عشوائية من خمس موظفين من إدارة بها 500 موظف. لتحقيق العشوائية، فإننا في البداية نخصص أو نوزع الأرقام الصحيحة من 1إلى 500 على 500 موظف، بعد ذلك نترك للحاسب الآلي أن يختار عشوائيا خمسة أرقام من بين 1 إلى 500 ·(بالطبع هذا اسلوب فني متقدم بدلاً من إختيار الأسماء عن طريق القبعة أو الصندوق). العينة تتكون من قياسات سجلت لكل موظف من الموظفين الخمسة اللذين إختيرت أرقامهم بطريقة عشوائية. أوامر الحاسب الآلي لأختيار عينة عشوائية من الأرقام موضحة في الجزء (٥-٢)·

(١-٤-٢) التجارب العشوائية Randomized Experiments

من الطرق الأساسية للتعرف على أسباب الأختلاف هو أن نصمم تجربة. فمثلا، صاحب مزرعة ما يرغب في إختبار تأثير سماد مقترح على إنتاجية القمح. انواع مختلفة من القمح يمكن أن تزرع في قطعة أرض وتعالج بالسماد المقترح. نفس الأنواع من القمح يمكن أن تزرع في قطعة أرض مماثلة ومشابهة وتعالج بسماد تقليدي. في نهاية الأمر، محصول قطعتي الأرض يمكن مقارنتهما لتقييم أثر السماد المقترح بالنسبة للسماد التقليدي. بذور القمح التي ستستخدم في الأختبار (الوحدات التجريبية) يجب توزيعها عشوائياً على قطعتين من الأرض، وهذا يمكن تحقيقه على النحو التالي. أفترض أن هناك 100 حبة قمح سيتم زراعتها، 50 منها تعالج بالسماد التقليدي، 50 تعالج بالسماد المقترح. يمكنا وضع كل الحبوب المائة في علبة وترج جيدا وبشدة، ثم تسحب الحبوب من العلبة دون أن ننظر داخلها. التخصيص العشوائي للحبوب يؤكد أن هذه الدراسة أو التجربة تتمتع بالفوائد التي ذكرت سابقا عن المعاينة العشوائية، الآن، هل يمكنك أن تحدد المجتمع الذي يمكن أن تطبق عليه نتائج هذه التجربة؟ ببساطة، أنه ليس الـ 100 حبة التي أستخدمت في الدراسة. في الحقيقة، المجتمع هنا هو مجتمع إفتراضي، أنه محصول كل القمح ولكل الأنواع المختلفة منه، إذا ما تم النمو والنضج تحت شروط التجربة (نفس التربة، السماد، المياه، . . . الخ). هنا نكون مهتمين أساساً بتأثير السماد على عملية نمو القمح. أستخدامنا للتجربة العشوائية يزيد من فهمنا لتلك العملية.

* هذه النقطة تم إيضاحها في الفصل السادس

الأهتمام بتصميم التجارب العشوائية يتيح لنا الحصول على أقصى معلومات تتعلق بالظاهرة موضوع الأهتمام عند أدنى تكلفة. المبادئ المتضمنة تصميم التجربة العشوائية نوقشت باستفاضة في الجزء (١-٦).

(١-٤-٣) بيانات ملائمة Convenience Data

غالبا ما نجد أن الأستخدام الرسمي للمعاينة العشوائية غير عملي أو غير ملائم، وأننا يجب، بدلاً من ذلك، أن نعتمد على البيانات المتاحة. البيانات الجاهزة والمتاحة، التي لا يمكن أن نحصل عليها من خلال عملية المعاينة العشوائية تسمى بيانات مقنعة أو ملائمة Convenience data. فمثلا، إفترض أننا في بناء نموذج إحصائي يربط ما بين أسعار بيع المنازل في ضاحية معينة وأحجامها. يمكنا أن نختار عينة عشوائية من هذه المنازل، ولكن لا يمكن الحصول على أسعار بيعها لأن مالكيها لا يمكن أن يتموا البيع في وقت تنفيذ الدراسة. لذا نجد ان المعاينة العشوائية غير ملائمة هنا. بدلا من ذلك فأننا نقوم بتسجيل أسعار البيع والحجم لتلك المنازل التي حدث أن بيعت مؤخرا وذلك من السجلات العامة، ويمكن أن نختار تلك البيانات ونحللها وكان هذه المنازل قد أختيرت عشوائيا. ولكن في هذه النقطة يكون التحليل عرضه للنقد والهجوم. لكن من المهم أن نأخذ بعين الآعتبار أن عملية الأختيار التي تعطي بيانات متاحة أو ملائمة قد ينتج عنها تحيز بطريقة ما فمثلا، إذا كان معظم المنازل التي في العينة هي منازل قديمة، فإن النموذج الإحصائي ربما لا يمثل الضاحية ككل.

بصفة عامة، هناك عيبين أساسيين عند الآعتماد علي البيانات الملائمة:(١) أنها لا تحقق المزايا التي تقدمها المعاينة العشوائية والتي نوقشت من قبل. (2) أنها لا تتيح الفرصه لتصميم إختيار العملية كي نحقق المزايا التي تتوفر من تصميم التجارب.

(١-٤-٤) المجموعات الفرعية المنطقية Rational Subgroups

عندما ندرس سلوك عملية ما، فإننا نبحث عن الإختلاف في نواتجها ونحاول أن نحدد الأسباب ◦ (سنناقش هذه الفكرة بالتفصيل في الجزء (١-٥)◦ ونحن مهتمين بتوصيف الأختلاف بين مخرجات العملية في وقت معين، وفي نفس الوقت مهتمين أيضا بالأختلاف بين نواتج العملية عبر الزمن. فمثلا، ربما نرغب في تقييم إختلاف محتويات الأوزان لعلب تم تعبئتها بعملية ما عند الساعة العاشرة صباحا، ومقارنة ذلك الإختلاف مع العلب التي عبئت عند الساعة الرابعة بعد الظهر من نفس اليوم. القرارات التي نحتاجها لتخفيض نوع واحد من الإختلافات تختلف عن القرارات التي نحتاجها لتخفيض نوع آخر من الأختلافات. ولكي نميز أو نوصف التغيرات في العملية عبر الزمن، فإننا نختار عينات على فترات منتظمة. الأختلاف بين العينات يسمح لنا ان نكتشف التغيرات في العملية.

فترات المعاينة يتم إختيارها بصفة شخصية وتعتمد على معلوماتنا عن العملية. فمثلا نواتج عينة ما يمكن سحبها من عملية انتاجية كل نصف ساعة طوال يوم كامل أو عينة من انشطة مندوبي المبيعات يمكن تسجيلها كل شهر. اما إذا أخترنا نواتج أحد الأيام كعينة عشوائية بسيطة من أيام الأنتاج كلها، فإننا نكون غير قادرين أن نصف أو نميز الأختلاف بين النواتج التي ظهرت عند نفس الزمن عن الآختلاف عبر الزمن. إختيار عينات صغيرة عند فترات زمنية منتظمة، حيث وحدات المعاينة داخل عينة محددة تكون قد انتجت في نفس الوقت تقريباً وتحت نفس الظروف، تسمى بطريقة المجموعات الفرعية المنطقية Rational Subgroups

(١-٥) التفكير الأحصائي لإدارة العمليات Statistical Thinking for Process Management

أحد الطرق الأساسية التي يستخدم فيها الأحصاء هو أن يكتسب رجال إدارة الأعمال البصيرة الصحيحة للتفكير الأحصائي، في هذا الشأن، التفكير الإحصائي Statistical Thinking هو اسلوب للتفكير يتيح لنا أن نفهم ومن ثم نحسن العمليات من خلال الدراسة الواعية للأختلاف في البيانات. وكما قلنا من قبل، فإن فهم الأختلاف وأسبابه هو المفتاح لإدارة عملية فعاله. على سبيل المثال، لنفرض ان مدير المبيعات يعلم ان مبيعاته في منطقة تتغير من شهر إلى شهر، هل التناقص في المبيعات لمدة ثلاثة شهور متتالية تدل على نظام ذو مغذى معين؟ إذا كان كذلك، ما هي الآسباب الرئيسية وما هي القرارات التي نحتاج إلى إتخاذها؟ مدير خدمات يعلم أن طول الخدمة يتفاوت لنفس النوع من العمل. فإذا كان هذا الأختلاف كبير جداً، ما هي الجهود التي يجب أن تبذل لتخفيض ذلك الأختلاف؟ ربما تكون قد لاحظت أنه في بعض الأيام أنك تأخذ وقتا اطول للوصول إلى عملك أو مدرستك عن أيام أخرى. هل هذا يعني أن إحدى الطرق التي تسلكها هي الأفضل من طريق آخر؟ هل هذا يشير إلى أن بعض أزمنة الأنتقال هي أفضل من ازمنة أخرى؟ التفكير الأحصائي يتيح لنا ان نتعرف على الآختلافات التي تقابلنا ونضع تفسيرات لها.

فيما يلي خطوات استخدام التفكير الأحصائي كي نزيد من تفهم وتحسين العمليات:

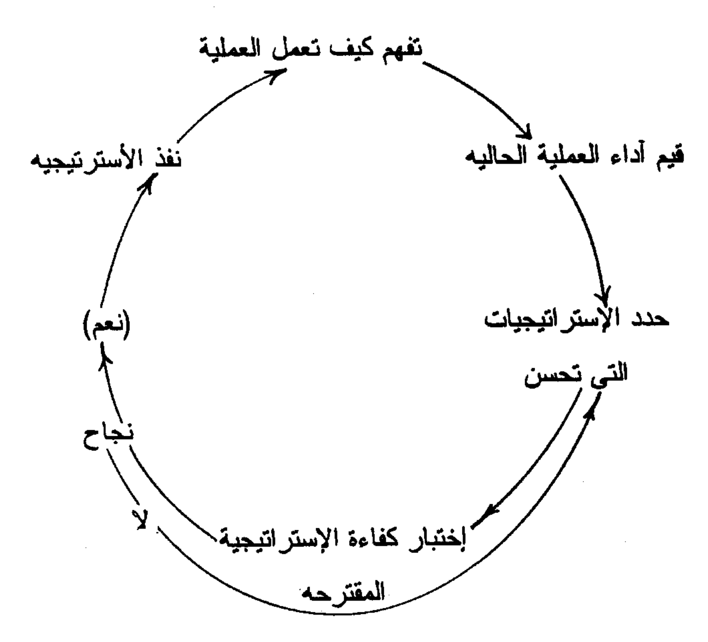
(1) يجب ان نفهم أولاً كيف تعمل العملية حالياً. ما هي مدخلات العملية؟ ما هي أهمية العوامل داخل العملية؟ ما هي القرارات التي تتخذ؟ في أي تسلسل تتم ؟ ما هي النواتج؟

(2) علينا بتقييم آداء العملية الحالية. ما هو مستوى الآداء الذي يمكن أن تتوقعه من العملية في الوضع الذي تستخدم فيها حالياً؟

(3) علينا بتحديد الأستراتيجيات المكنة لتحسين العملية.

(4) علينا باختبار كفاءة الأستراتيجيات المختارة.

(5) إذا أظهرت الأختبارات امكانية النجاح، علينا بتنفيذ تغيير العملية. أما إذا كانت نتائج الأختبارات غير مشجعة ولا تبشر بالنجاح، علينا ان نرجع إلى الخطوة (3).



شكل (١-٥) حلقة لا نهاية لها في تحسين العملية

(6) علينا أن نرجع إلى الخطوة (1) في حلقة لا نهاية لها حتي يتحقق التحسن. دائرة أو حلقة التحسين موضحة في شكل (١-٥).

ذكرنا من قبل أن التفكير الإحصائي يشتمل على إستخدام الطرق الإحصائية في تناغم مع المعرفة الشخصية بالموضوع. دعنا نفحص استخدام كل نقطة في حلقة التحسين.

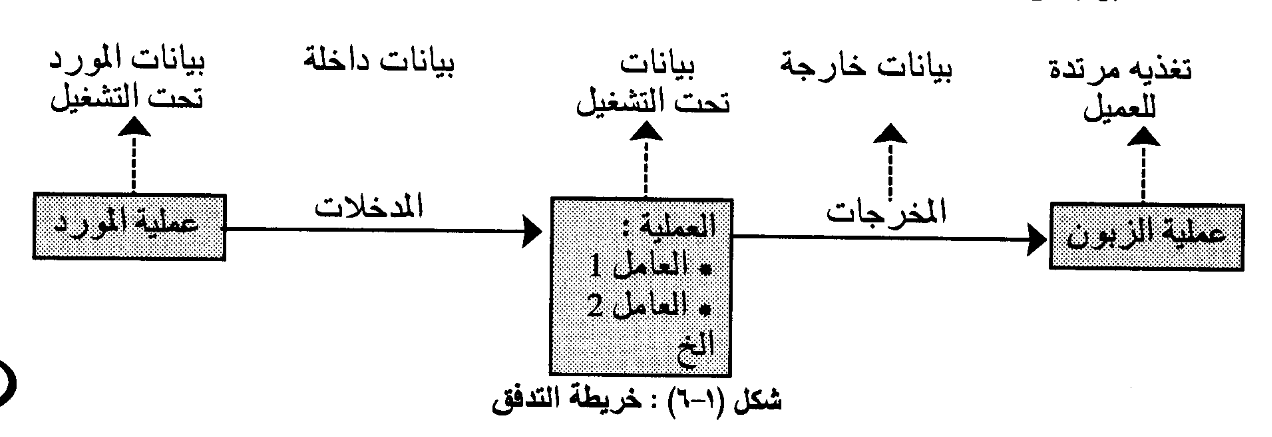
الخطوة رقم (1) تعتمد على المعرفة الشخصية بالموضوع الحالي. فهم التفاعل للعناصر داخل العملية هو أ مر أساسي لكفاءة التحليل. الأدوات الأساسية لآداء هذا العمل هي شكل التدفق وشكل السبب والنتيجة.

شكل التدفق **flow diagram** هو ببساطة شكل يصور عملية ما، بمعني أنها تبين بطريقة منتظمة كيف أن العوامل المختلفة داخل عملية ما تحول المدخلات الى مخرجات. ولأن الخطوة الأولى في تحسين العملية هو أن نفهمها جيدا، فإن كثير من الناس تعتقد أن شكل التدفق هو أهم اداة لتحسين العملية.

شكل السبب والنتيجة **Cause - and - effect diagram** يركز على النتيجة (أو التأثير) ومحاولة تحديد أسبابه المكنة. كثير من هذه الأسباب لها صفات أو خصائص محددة مثل: الناس، الآلات، البيئة، المواد، الطرق، القياس. شكل السبب والنتيجة يكون اكثر فاعلية لو قدم من فريق يستخدم أفكارا بارعة لتحديد الأسباب المكنة ويضعها في الصفة الملائمة لها. المرجع رقم [2] نقترحه عليك للحصول على معلومات اكثر عن أشكال السبب والنتيجة.

لكي نصف أداء العملية الحالية (الخطوة2) نستخدم المعرفة الشخصية بالموضوع لتحديد ما هي المتغيرات موضوع الدراسة وما هي الطرق الإحصائية التي نستخدمها. الطرق الأحصائية الأساسية هي خريطة الخط البياني، وخرائط الرقابة أو التحكم (ستقدم فيما بعد في هذا الفصل)، المدرجات التكرارية، اشكل باريتو، الأشكال الأنتشارية (ستقدم في الفصل الثانى). ونحن نعول على المعرفة الشخصية بالموضوع لنقترح الأستراتيجيات المكنة لتحسين العملية(خطوة 3). أختبار كفاءة الأستراتيجيات المقترحة (خطوة 4) تعتمد أساسا على الطرق الإحصائية وأكثرها كفاءة ألا وهو تصميم التجارب. مقدمة في تصميم التجارب وضحت في الفصل (١-٦). تنفيذ تغيير العملية (خطوة 5) هي محاولة أو سعي غير احصائي، على الرغم من أن نتائج أي تغيير مخطط يجب ان تكون احصائيه.

ظهور الأختلاف في عملية ما، يجب دراسته في محاولة لتحديد امكانية تحسينه وهذه نقطه اساسية في ادارة الجودة الشامله TQM، وهي فلسفة ادارية طبقت لعدة سنوات في اليابان وأصبحت تتزايد أهميتها في الولايات المتحدة. كثير من المنظمات ركزت بالكامل على مخرجات العملية، ولكن هذا خطأ. الكثير يمكن معرفته عن طريق دراسة ليس فقط المخرجات ولكن أيضا المدخلات، العوامل



شكل (١-٦) : خريطة التدفق

داخل العملية والتغذية المرتدة للعميل المتعلقه بمخرجات العملية. تدفقات المدخلات والمخرجات من المورد إلى العملية إلى العميل موضحة في شكل (١-٦)

لدراسة اداء العملية (خطوة 2)، علينا بتحديد مؤشرات ادائها. سنتناول عملية ما من المحتمل أن تكون معتاد عليها: قيادة السياره الى مكان عملك(او القيادة الى أي مكان تعتاده باستمرار مثل: المدرسة، مركز تجاري، ملعب كرة). بالنسبة لعملية القيادة إلى عملك، احد المؤشرات الهامة للأداء ربما يكون طول الزمن الذي تستغرقه. المتغير الأحصائي الذي يستخدم لتوصيف جودة مخرجات العملية يسمي خاصية الجودة **Quality Characteristic**. أكثر واجبات تحسين العملية تشتمل على تسجيل إختلافات خاصية الجودة، وتحديد اسباب ذلك الأختلاف، والقيام بأفعال داخل العملية لتخفيض ذلك الأختلاف.

أغلب الأختلافات بين مخرجات العملية، يمكن ان تنسب الى متغيرات أخرى داخل العملية. فعلى سبيل المثال، الزمن الذي تستغرقه في القيادة الى عملك، ربما يعتمد على الطريق الذي تسلكه، وقت المغادرة، عدد الأشارات الحمراء، الطقس.

هناك نوعان من اسباب الأختلاف. اسباب شائعة أو عامه للأختلاف **common causes**، وهي عوامل طبيعية أو عادية داخل العملية وتتغير مع الزمن، ساعة بساعة، يوم بيوم، وتؤثر الأسباب العامة على كل المخرجات. فعلى سبيل المثال، الأسباب العامة لأختلاف الزمن الذي تستغرقه في القيادة الى عملك، ربما تشمل الطريق الذي تسلكه، السرعة التي تبدأ بها القيادة، عدد الاشارات الحمراء التي تقابلها ودرجة ازدحام المرور. زمن الرحلة يتأثر بكل هذه المتغيرات في كل مرة تذهب فيها الى عملك. من ناحية أخرى، هناك اسباب قابلة للتعين والتحديد **assignable causes** وتسمي أيضاً أسباب خاصة **special causes** وهي اسباب تحدث نادراً وبصفة استثنائية ،اي انها ليست جزءا مألوفاً من العملية فمثلا، ربما يفرغ إطار السياره من الهواء في يوم ما، أو ربما تغادر المنزل في ساعة متأخرة في يوم ما أو أن تكون قد سلكت طريقا خطأ. وهذه الأسباب التي يمكن تعينها، غالبا ما تسبب تعطل في بعض مكونات العملية، مثل آله تحتاج إلى اصلاح ،اطار السيارة المفرغ من الهواء. وهذه الأسباب الخاصة (أي التي يمكن تعينها) تؤثر فقط على قليل من المخرجات. فمثلا معظم ازمنة القيادة الى عملك أو مدرستك لن تتأثر بفشل اطار السيارة، ولكن إذا كان إطار السياره معطل في يوم معين، فإن رحلتك في هذا اليوم من المحتمل أن تكون اطول بكثير من الوضع العادي.

العملية المستقرة **stable process** هي العملية التي يتواجد فيها فقط الأسباب العادية أو الشائعة للأختلاف. فلا يمكن أن نجد حوادث خاصة تسبب إختلاف غير عادى أو غير مألوف وأن الأختلاف لا يمكن أن يأخذ نظاما قابل لأن يرى أو يميز. وحيث أن كل الأسباب العامة تؤثر في كل المخرجات، فإن الأختلاف بين المخرجات يعكس تأثير عام لأختلاف كل عناصر مخرجات العملية. إذا كان هناك أحد المخرجات له قيمه اكبر من الباقي، فإنه لا يمكن ان يعزي ذلك إلى سبب فردي. في العملية المستقره، يبقي نظام اسباب الأختلاف ثابتاً عبر الزمن. تختلف المخرجات ولكن يبقي مدى الأختلاف كما هو ثابت ومن ثم يمكن التنبؤ به. إذا لاحظنا أن أحد المخرجات (او النتائج) يقع خارج هذه الحدود، يكون لدينا سببا لكي نشك بأن أحد الأسباب الخاصة قد أثر على هذه النتيجة. اذا تأثرت العملية بالأسباب الخاصة(اسباب يمكن تعينها وتحديدها) بالأضافة الى الأسباب العامة لدرجة أن الأختلاف يمكن أن يأخذ نظاما قابل لأن يرى ويميز، فإنه يقال أن العملية غير مستقرة **unstable process**. وحيث ان العوامل الخاصة ليست متكررة بأنتظام في مكونات العملية، فلا يمكن أن نتنبأ بها وبالتالي

يكون مدى الأختلاف في العملية غير المستقرة لا يمكن بسهولة التنبؤ به. فإذا كانت قيمة احد النواتج أو المخرجات تقع خارج مدى الأختلاف العادي أو إذا كان هناك نظاما غير عشوائي بين المخرجات، فإنه يكون لدينا سببا لكي نشك في وجود سبب خاص وأنه في حالة نشطة وفعّال.

التفرقة بين العمليات المستقرة وغير المستقرة هو أمر هام، لأن إجراءات مختلفة تكون مطلوبه لتحسين كل منهم. اعظم فرصة لتحسين نظام غير مستقر، هو تحديد الأسباب الخاصة للإختلاف وازالتها أي تحويل العملية غير المستقرة الى عملية مستقرة. في الواقع هذه هي أول خطوة في إتجاه تحسين العملية في المدى الطويل. إذا كانت العملية غير مستقره(أي أنها خاضعه لعديد من الأسباب الخاصة المسببه للأختلاف) فإنه يكون من الصعب أن تقييم تأثير التغيرات التي نحدثها في العملية. أكثر الأدوات منفعه في التحقق ما إذا كانت العملية مستقره أو غير مستقرة (أخذا في الأعتبار خاصية الجودة) هي خريطة الرقابة أو التحكم **control chart** وهذه الخريطة ستناقش فيما بعد في هذا الفصل وستناقش بالتفصيل في الفصل ١٢. أما خريطة التتبع البياني **run chart** - ستناقش فيما بعد في هذا الفصل - فهي اداة مفيدة جداً في التعرف على عدم الأستقرارية عندما تكون البيانات في تسلسل زمني.

لتحسين نظاماً غير مستقر، يجب ان نتعرف على العوامل الخاصة المسببه للأختلاف، والمشتغلين بالعملية هم الأفضل مقدرة في أداء ذلك. فعلى سبيل المثال، مشغلي الحاسب الآلي هم الأكثر دراية بمعرفة أن تأخر الفواتير يتسبب في تعطل الحاسب الآلي، أو أن الآلة التي تعجز عن أداء عملها تحتاج إلى اصلاح. من ناحية أخرى المشتغلين بالعملية يكونوا أقل ملائمة أو امكانية للتعرف على الطرق التي تحسن عملية مستقرة، لأن ظهور أحد النواتج أو المخرجات قريباً من حدود الإختلاف الطبيعية، لا يمكن تفسيره بحدوث أحد الأسباب الخاصه. عندما تكون العملية مستقره، فإن تحسين العملية يمكن تحقيقه فقط بإحداث تغيرات في العملية ذاتها. مهندسي ومديري العملية هم أفضل من يقوموا بذلك، فهم في وضع أفضل لتفهم العملية ككل وهم الأكثر قدرة في التدرب على الطرق الأحصائية المطلوبة. بإختبار العملية تحت شروط متنوعه، يمكن للمديرين أن يحصلوا على دليل يعول عليه يمكن أن يؤدي إلى تحسين جوهري في العملية.

مثال (١-٤)

كل من الحالات التالية توضح النقص المحتمل في التفكير الأحصائي. قيم اداء كل مدير في ضوء مبادئ إدارة العمليات التي نوقشت سابقاً.

(أ) في كل صباح، مدير مصنع ما وفريقه المعاون يستعرضوا الوحدات المعيبه المنتجه في اليوم السابق، كان هدفهم من ذلك هو تحديد وإزالة أسباب المشكلة.

(ب) محلل إقتصادي استنتج ما يلي: "الأوقات السعيدة أنتهت"، لأن العجز التجاري في أغسطس 1990 ارتفع إلى 10.8 مليون دولار بعد أن كان 8.2 مليون دولار في يوليو.

(جـ) قرر مدير المبيعات أن يجري تنزيل خاص (أوكازيون) لأن مستوى المبيعات أدنى من المخطط لها.

الحل

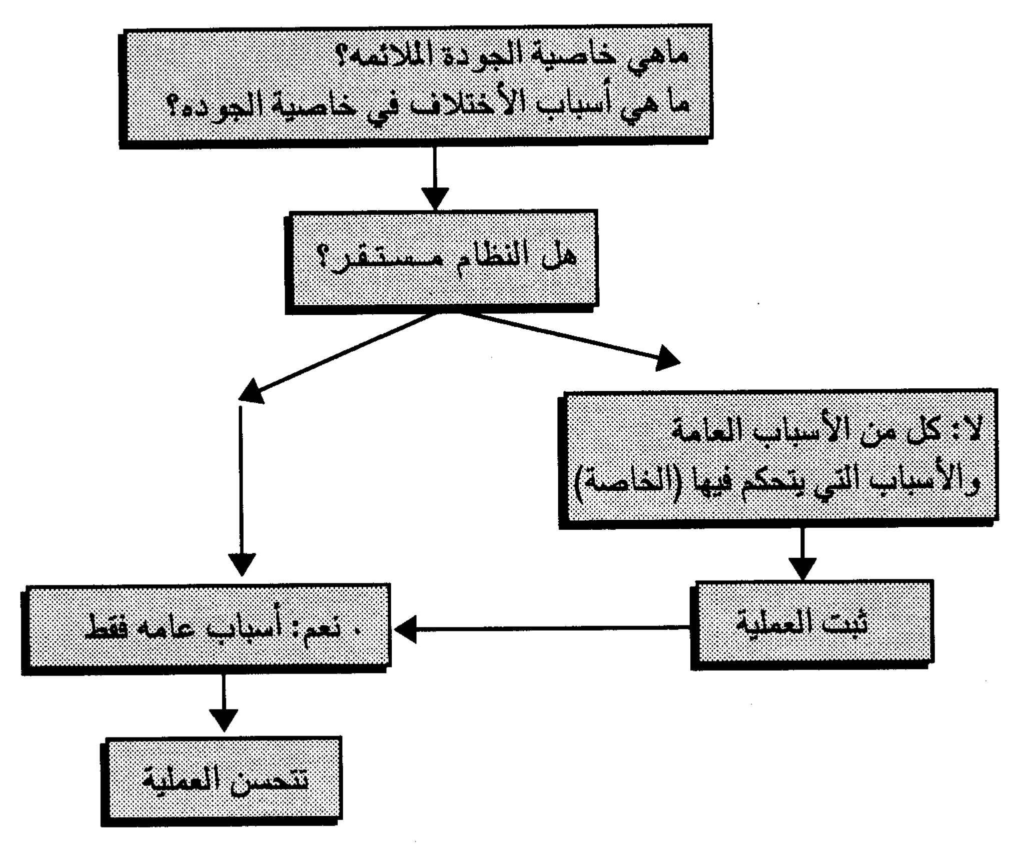
(أ) يفترض المدير أن كل وحدة معيبة تعكس سبباً محدداً للأختلاف. من الطبيعي أن العملية الأنتاجية

عندما تكون مستقره، يظهر عنها بعض الوحدات المعيبة. محاولة التعرف على سبب محدد لكل وحده معيبه سوف يكون عبثاً، مالم يكن قد ثبت أن عدداً غير عادي من الوحدات المعيبة قد انتجت. من ناحية أخرى، يعد ذلك مضيعه لوقت المدير وقد يزيد ذلك من إختلاف العملية.

(ب) من المتوقع أن يتفاوت العجز التجاري الشهري. لكن إذا كان التغير من شهر يوليو إلى اغسطس كبير جداً بالنسبة للتغير المشاهد في الفترات السابقة، عندئذ فقط تكون نتيجة المحلل الأقتصادي مقنعه.

(جـ) يجب على مدير المبيعات ان يحدد أولا ما إذا كانت عمليات البيع مستقره أم لا. فإذا كانت مستقره، فإن التنزيل الخاص قد يشكل عبئا وربما يكون اكثر ضرراً من نفعه.

الخلاصة، إن حذف الأسباب التي يمكن التحكم فيها (العوامل السببيه) غالباً ما تكون مرتبطه نسبياً بالتحسن السريع في العملية، ولكن التحسن الأكبر يكون في الأجل الطويل، ويتحقق ذلك عن طريق تخفيض الأختلافات الراجعه للأسباب العامه (العوامل العشوائيه) وذلك من خلال تغيرات في العملية الأنتاجيه ذاتها. شكل (١-٧) يصور التحسن في العمليات كما نوقشت في هذا الفصل.



شكل(١-٧): استعراض لتحسن العملية

(١-٥-١) خريطة التتبع البياني Run Chart

خريطة التتبع البياني هو تمثيل بياني لقيم البيانات بطريقه واضحه. وعندما يكون لدينا بيانات في تسلسل زمني، فإن خريطة التتبع البياني تكون ابسط واقوى أداة نافعه لتحديد الأستقراريه. سنتناول مثال واقعي قدمه احد الطلبه الذين عملوا في مصنع للطلاء.

مثال (١-٥)

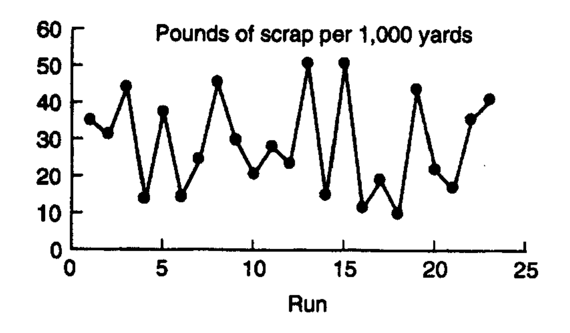
مستوي إنبعاث مواد متطايره في احد مصانع الدهانات كانت تمثل مشكله للإداره. لتخفيض هذا المستوى، قررت الإدارة التحول إلى إستخدام الأحبار ذات الأساس المائي في الدهانات. بعد التحول الى العمليه الجديده، كانت الإداره معنيه بكمية المخلفات التي تتراكم. ولكي تبدأ في دراسة هذه المشكله، فقد سجلت كميه المخلفات (بالرطل) في كل 1000يارده في الماده المدهونه وذلك في عينه من 23 دوره دهان متتاليه. بيانات العينه كانت على النحو التالي: (مسلسله من اليسار إلى اليمين في صفوف)

36	31	45	14	38	15	25	46
30	21	28	24	51	15	51	12
19	10	44	22	17	36	41	-

ماهي كمية المخلفات في كل 1000 ياردة يمكن ان نتوقعها من هذه العملية، إذا كانت العمليه في الحقيقه مستقره ؟

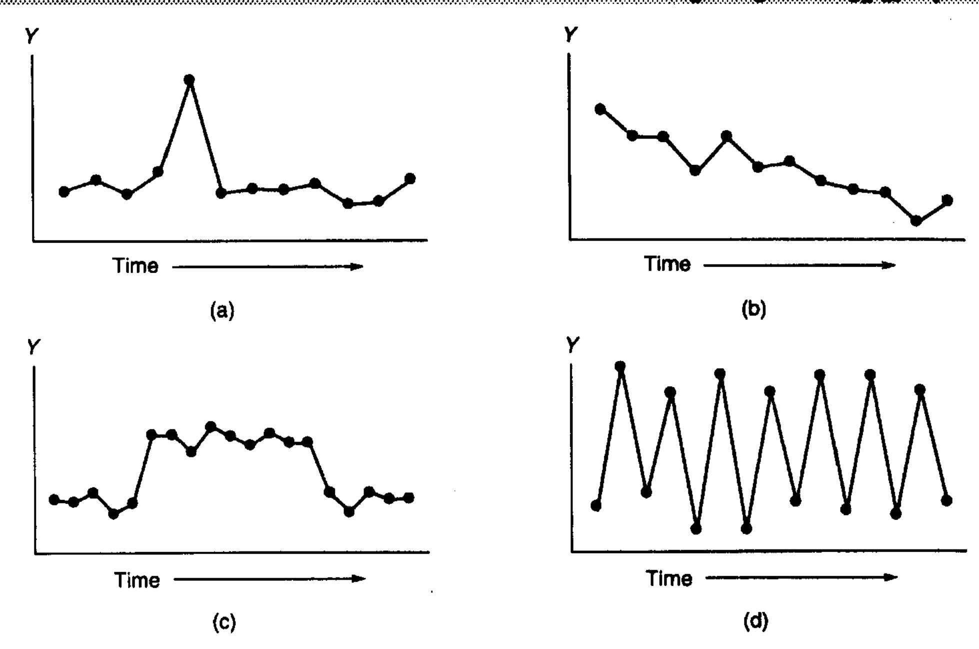
الحـــل

من الصعب الإجابه على هذا السؤال بدون الرسم البياني، لذلك فإننا نرسم خريطه التتبع البياني الموضحه في شكل (١-٨). (تعليمات الكمبيوتر لرسم الخريطه البيانيه بإستخدام برنامج ميني تاب معطاه في ملحق هذا الفصل). الخريطه توضح أن كمية المخلفات تختلف فيما بينها في حدود من 10إلى 50رطل في كل1000 ياردة مدهونه. فإذا كانت العمليه هي فعلاً مستقره، فإننا نتوقع أختلافات في هذا المدى في المستقبل القريب (طالما أن العمليه ستبقى مستقره).



شكل (١-٨) خريطة بيانيه للمخلفات عن الحبر المائي في عينة من 23 دوره دهانات

إعتماداً على الخريطة البيانية في شكل (١-٨) هل يمكنك أن تستنتج أن العملية مستقرة أخذاً في الإعتبار كمية المخلفات الناتجة؟ بيانات أي عملية مستقره يجب ألا تظهر أي مخطط واضح وأن قيم البيانات يجب أن تبدو أنها منتجه في شكل عشوائي. يجب ألا تكون هناك قيماً لبيانات أكبر أو أقل من الباقي بصورة واضحة. وهناك إرشادات عامة للتعرف على نماذج من العمليات غير المستقرة. ومن الخطأ أن نستنتج (اعتمادا على التقدير الشخصي) من خلال الخريطة البيانية أن عملية ما مستقرة بدون أن نطبق أولاً هذه الأرشادات العامه. بعض الإرشادات العامه والتي تستخدم بكثره لتحديد عدم الإستقرار سوف يرد ذكرها عند الحديث عن خرائط المراقبة والتحكم في الفصل الفرعي التالي. في البداية نناقش العديد من النماذج العامه لعمليات غير مستقره موضحه في شكل(١-٩).



شكل (١-٩) أربع خرائط بيانية توضح نماذج لعمليات غير مستقره

* في شكل (a)، يلاحظ أن هناك نقطة واحدة هي الأكبر بكثير عن الباقي. هذا يدل على أن هناك سبباً خاصاً قد تسبب في نشأة اختلاف غير عادي في البيانات. أي تلخيص إحصائي، مثل المتوسطات يشمل هذه المشاهدة لن يكون مؤشراً صادقاً عن العملية لأن السبب الخاص ليس جزءاً طبيعياً في العملية.
* شكل (b) يظهر إتجاه تراجعي متناسق عبر الفترة الزمنية. ما الذي يمكن أن يشير إليه متوسط هذه البيانات حول ناتج هذه العملية في المستقبل؟ في الواقع هناك القليل جداً الذي يمكن أن يشير إليه هذا المتوسط وسوف يكون مضللاً.
* شكل (C) يظهر سلسلة طويلة غير عادية من بعض المشاهدات تقع أعلي منتصف البيانات، وهذا يشير إلي انه عند بعض النقط تحدث بعض التغيرات، والتي تتسبب في زيادة المتوسط لفترةزمنية. مره اخري، متوسط هذه البيانات بصفة عامة سوف يكون مضللا عند التنبوء مستقبلا بسلوك العملية.
* في شكل (d) يلاحظ أن المشاهدات التي أقل من المتوسط تتبادل مع المشاهدات التي أعلى من المتوسط في نظام يسمى منشار الأسنان "**Sawtooth**". مثل هذا النظام غالباً ما يشير إلى الرقابة الزائده، حيث يتم تعديل العملية لتستجيب لأي مشاهدة يحدث بالصدفة أن تقع أدنى أو أعلى المتوسط.

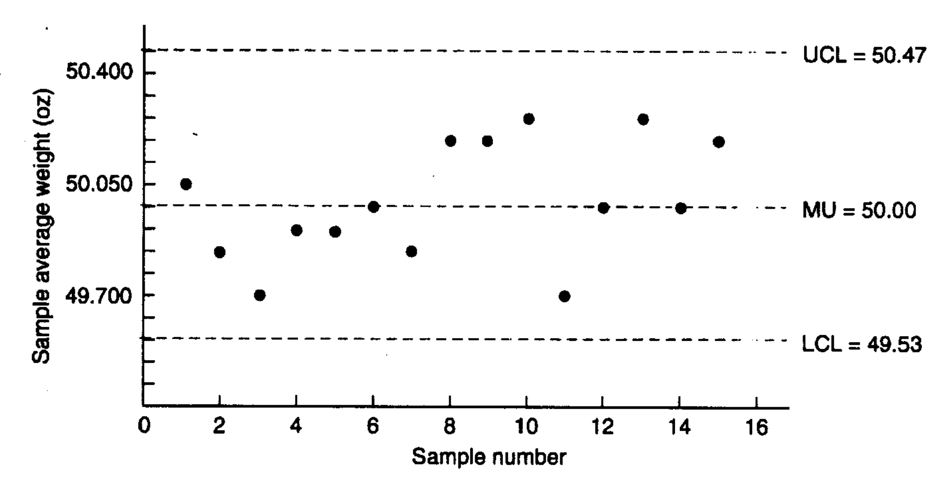
بتطبيق هذه الأرشادات العامه على الخريطة البيانية في شكل (١-٨) يكشف عن أن عملية الطلاء تبدو مستقرة أخذاً في الإعتبار الفضلات الناتجه.

(١-٥-٢) خرائط الرقابة Control Charts

خريطة الرقابه هي خريطة بيانية يظهر بها حدود عليا ودنيا لتشير إلى مدى الإختلاف الذي يحدث نتيجة لتأثيرات الأسباب العامه أو الشائعة. وهناك خط مركزي يشير إلى قيمة المتوسط العام. حدود الرقابه تتحدد بتسجيل نواتج العينة التي تسحب من عملية يفترض فيها أنها مستقرة. بناء هذه الحدود

موضح في الفصل ١٢ . الغرض من خريطة الرقابه هو أن تشير بوضوح إلى مدى الإختلافات التي يمكن أن نتوقعها في المستقبل القريب، إذا بقيت العملية مستقرة، وأن توضح متى تصبح العملية غير مستقرة، أي الإشارة إلى وجود اختلافات تعود إلى أسباب غير عادية.

شكل (١-١٠) هو خريطة رقابة (أو ضبط) لمثال (١٢-١) من الفصل (١٢) والمتعلق بعملية تعبئة علب بمسحوق غسيل. خاصية الجوده هنا هي وزن العلبة المعبأه بالمسحوق. كل نقطة على خريطةالرقابة تمثل متوسط أوزان عينة من عشر علب معبأه. إعتماداً على عينات سابقة، تحدد متوسط وزن العبوه بـ 50.0أوقية. يلاحظ في شكل (١-١٠) أن حد الرقابة الأعلى هو50.47 أوقية وحد الرقابة الأدنى هو 49.53أوقية أما الخط المركزي فهو50.0 أوقية.



شكل (١-١٠) خريطة رقابة لمتوسط وزن العبوة في عملية ما

هناك العديد من القواعد العملية التي تستخدم لتحديد ما إذا كانت العملية مستقرة أم لا، وهذه القواعد موضحة في الفصل ١٢ . أحد المؤشرات التي توضح أن العملية غير مستقرة، هو أن تكون مشاهدات العينة واقعة خارج حدود الرقابة، لذلك، إذا كان متوسط الوزن في عينة ما هو 50.75 أوقية، فهذا يعني وجود سبب يمكن تعيينه وتحديده للإختلاف، لأن50.75 يتعدى الحد الأعلى للرقابة وهو 50.47. في هذه الحالة، يجب أن تبذل محاولة ما لتحديد سبب الإختلاف غير العادي في تلك العينة، حتى يمكن أن نمنع تكرار ذلك مستقبلاً. مؤشر آخر لعدم الإستقرار نراه على خريطة الرقابة عندما نلاحظ أن النقط البيانية يبدو أنها تتبع نظاماً مميزاً، كأن يكون لها إتجاه تزايدي أو إتجاه تناقصي. مثل هذا الإختلاف المنتظم يوحي بعملية غير مستقرة، حتى ولو كانت كل النقط تقع داخل مدى الرقابة. وحيث أن كل المشاهدات التي في شكل(١-١٠) تقع داخل مدى أو حدى الرقابة، كما أنه لا يوجد نظاماً مميزاً تصاعدي أو تنازلي، فإنه من المقبول أن نستنتج أن هذه العملية مستقرة.

الإستخدام المنتظم لخرائط الرقابة يعطي أساس قوي وبسيط لإستقرارية وتحسين العمليات. خرائط الرقابة مطلوبة، ليس فقط عند النواتج النهائية للعملية، بل أيضاً عند بدايات مراحل العملية. عند أي عملية يتم دراستها، يمكن أن نستخدم خرائط الرقابة أو الضبط لرقابة متوسط النواتج، كما في المثال السابق، ويمكن أن تستخدم أيضاً لتقييم مدى إستقرار معالم أو مؤشرات العملية، مثل الإختلافات **Variation** بين النواتج (سوف نبين كيف يتم قياس الأختلاف في الفصل الثاني) ومثل النسب **Proportion** في النواتج والتي تحدد بصفة معينه. الأجراء العادي هو أن نختار وبصفة

منتظمة عينات صغيرة من النواتج . وبتتبع مسلك أو مسار إحصاء مناسب على خريطة الرقابه، يمكن تحديد ما إذا كانت العملية مستقرة أم لا . خرائط الرقابة التي تعد بغرض تعقب الأستقرار في كل من المتوسط، التباين، النسبة لها خصائص محددة قدمت بالتفصيل في الفصل ١٢ .

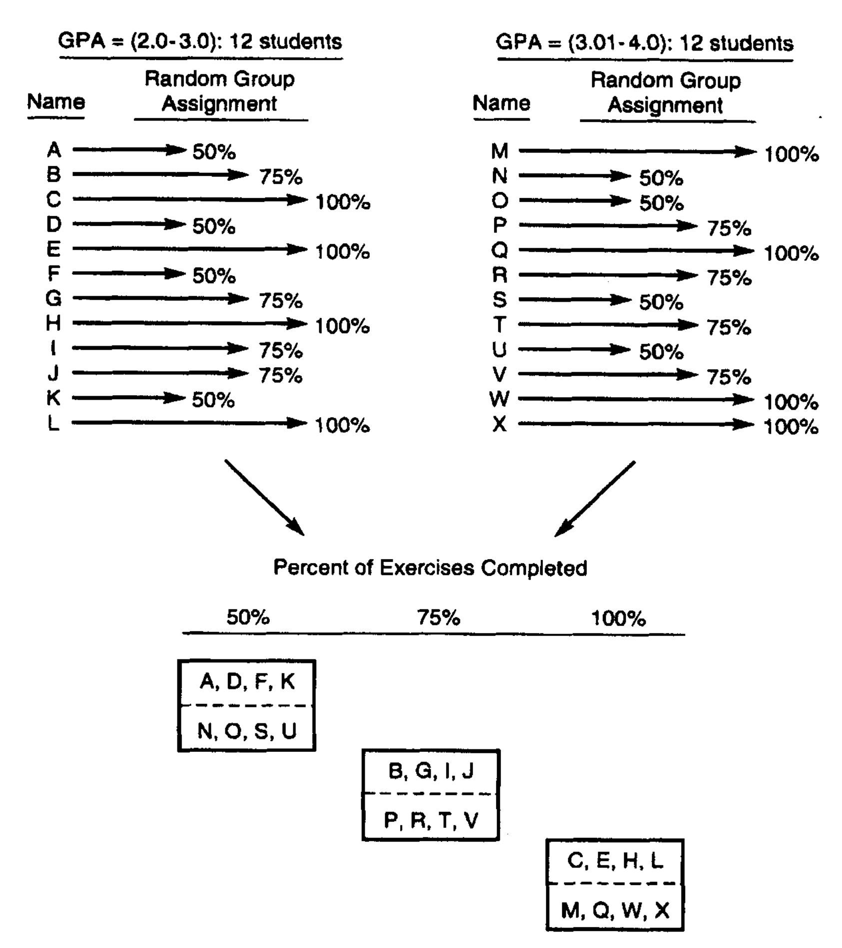
(١-٦) مقدمة في التصميم الإحصائي للتجارب:
An Introduction To The Statistical Design of Experiments

أحد الإستخدامات الرئيسية للإحصاء هو أنه يعطي معلومات يمكن أن تستخدم لتحسين الأشياء. التصميم الإحصائي للتجارب هو آداه قوية لفهم كيف أن الفروق بين مختلف العوامل يمكن أن تؤثر في كميات محل الإهتمام. هذا النوع من الفهم يؤدي إلى التحسين باستمرار. فمثلا، إذا كشفنا النقاب عن فروق جوهرية في المبيعات بين مندوبي مبيعات الشركة، فربما نبدأ في تدريب أضافي لهم بغرض تقليل هذه الفروق.

عند دراسة العمليات الإنتاجية، نجد أن التصميم الإحصائي للتجارب يكون مفيدا في تحديد العوامل التي تساهم في الإختلافات في العمليات المستقرة وفي تقييم أهمية الفروق بين تلك العوامل. فمثلا، إذا وجدت فروق بين الآلات في عملية التعبئة، فإن تحسين سياسة الصيانة من الممكن أن يخفض هذه الفروق ومن ثم تحسين العملية. وكما قلنا من قبل أننا يمكن أن نستخدم الخرائط التتبع البيانية وخرائط الرقابة لتقييم وتتبع استقرار العملية. ومع ذلك، فإن حقيقة أن تكون العملية مستقرة لا يعني ضمنيا أنها مقنعة أو مرضية. معظم التحديات التي تواجه تحسين العملية هي أن نجد طرقا لتغير استقرار العملية بهدف تخفيض إختلاف النواتج. أول خطوة ضرورية هي ان علي الإدارة أن تتبني مسئولية التحسين المستمر. الخطوة الثانية هي استخدام الخبرة الشخصية والنظرية المتعلقة بالعملية موضوع الإهتمام، وذلك لا قتراح تغيرات يمكن أن تحسن العملية أو التعريف بالمصادر المحتملة للإختلاف داخل العملية. الخطوة الثالثة في تحسين العملية المستقرة هي تصميم تجربة لكي نختبر بها تأثير التغيير المقترح أو فحص مصادر الإختلاف المشكوك فيها. في السنوات الأخيرة، بدأ المديرين في استخدام تصميم التجارب بصورة أكثر إنتظاما. في هذا الفصل، نقدم المبادئ العريضة للتصميم الإحصائي للتجارب وسيتم ذلك من خلال مثال مألوف لديك. بعد ذلك نقدم المبادئ الأساسية في تصميم التجارب.

افترض أن أستاذا جامعيا مهتما بالبحث عن الطرق التي يمكن أن تحسن مستوي تحصيل الطلاب لمنهج الإحصاء، إعتمادا علي خبرة الأستاذ بطلبة الفصل وعلى كثير من المناقشات مع الطلبة، فإنه يعتقد أن درجات الطلبة تتأثر بعدد التمارين التي يحلونها كواجب منزلي. في استقصاء تم علي الطلاب ،كانت النتيجة أن الطلاب العاديين يكملوا تقريبا نصف التمارين التي تعين لهم كواجب منزلي وأنه يعتقد أن الطلاب إذا قاموا بحل عدد كبير من التمارين، فإن درجاتهم سوف تتحسن. لإختبار هذا الأعتقاد، قام الأستاذ بتنفيذ التجربة التالية مع طلاب الفصل. 24 طالب في الفصل وافقوا على الإشتراك في هذه التجربة. قسم الفصل إلى ثلاث مجموعات طلابية، كل مجموعة من ثمان طلاب. إحدى المجموعات وافقت على إكمال نصف التمارين في الأبواب التي تغطي الإمتحان وحلول التمارين سلمت للأستاذ. ويعتبر التمرين مكتملا عندما يقوم الطالب بتنفيذه بصورة صحيحة وانه مستوعبا لهذا الحل. المجموعة الثانية وافقت على إكمال 75% من التمارين وثالث مجموعة وافقت على إكمال 100% من التمارين. خاصية الجودة هي درجة الإختبار التي يضعها الأستاذ. وحيث أن الطلاب المتازين تتجه للحصول على درجات اعلى في الإختبار من الطلاب ضعاف المستوى، فقد قسمت الطلبة إلى مجموعات طبقا لمتوسط نقط الدرجات (GPA). هناك مجموعة من 12 طالب لهم

GPA يتراوح بين 2.0 & 3.0 . وهناك مجموعة من 12 طالب لهم GPA يتراوح بين 3.01& 4.0 . كل مجموعة من هاتين المجموعتين وزعت عشوائيا إلى ثلاث مجموعات دراسية وبالتالي فكل مجموعة دراسية يكون لها تمثيل متوازن بها أربع طلاب . شكل (١-١١) يصور تخصيص الطلاب إلى مجموعات.



شكل (١-١١): تخصيص الطلاب إلى مجموعات جزئية

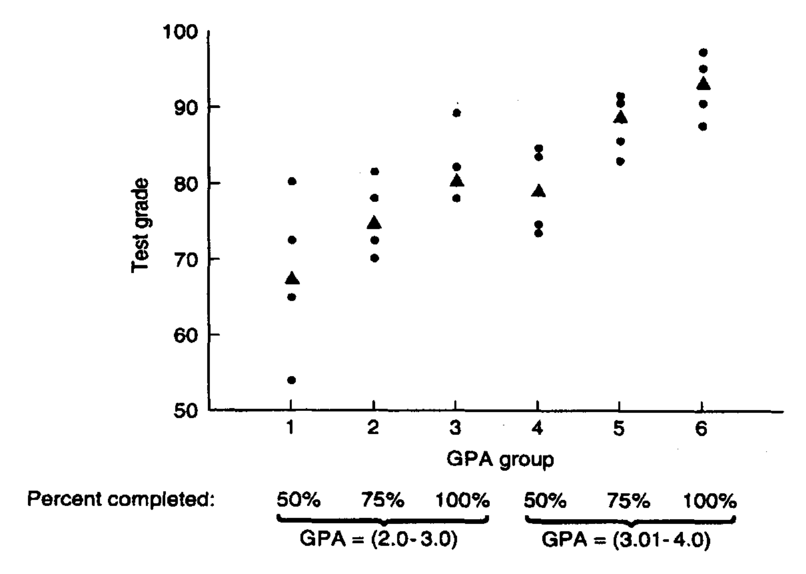
افترض أن نواتج التجربة هي الموضحة في جدول (١-١). شكل (١-١٢) يصور الدرجات بيانيا. النقطة تمثل درجة الطالب أما المثلث فيشير إلى متوسط المجموعة. اعتمادا على هذه النتائج التجريبية، ما الذي يمكن أن نقوله عن أثر عدد التمارين التي يكملها الطالب على درجات الإختبار ؟

لتحليل نتائج التجربة، دعنا نجري بعض المقارنات. في البداية، دعنا ننظر إلى درجات إختبار الطلاب والذين لهم GPA من:(2.0-3.0). نلاحظ أنه كلما إتجهت نسبة التمارين المحلولة من 50% إلى 75% إلى100%، فإن متوسط درجات الإختبار يتجه من 68.5% إلى76.0 إلى82.25. الآن، انظر إلى المجموعة الآخرى والتي لها GPA من:(3.01-4.0). نلاحظ أنه كلما اتجهت نسبة التمارين المحلولة إلى الزيادة، فإن متوسط درجات الطلاب تتجه من 79.5 إلى 89.25 إلى 93.75. وعلى ذلك، في كلا المجموعتين من GPA نجد أن متوسط درجات الإختبار تزيد بدرجة ملحوظة كلما زاد عدد التمارين التي يكملها الطالب. ربما نرغب أيضا في معرفة ما إذا كانت الـGPA هي مؤشر جيد لدرجات الإختبار أم لا. يلاحظ أنه إذا قارنا أي مجموعتين اكملا نفس النسبة من التمارين، فإن مجموعة GPA ذات النقاط (3.01-4.0)، لها أعلى متوسط درجات، فنجد 68.5 مقابل 79.5 للمجموعة التي

أكملت 50%، 76.0 مقابل 89.25 للمجموعة التي أكملت 75% كذلك 82.25 مقابل 93.75 للمجموعة التي أكملت 100%. في كل الحالات الثلاث، كان متوسط درجات الأختبار أعلى بحوالي 12 نقطة للمجموعة (3.01-4.0).

جدول (١-١) نتائج إختبارات الطلاب

مجموعة GPA	نسبة التمارين	درجات الطلاب				متوسط المجموعة
2.0-3.0	50%	54	66	73	81	68.50
	75%	71	73	78	82	76.00
	100%	78	78	84	89	82.25
3.01-4.0	50%	74	75	84	85	79.50
	75%	83	87	93	94	89.25
	100%	88	93	96	98	93.75



شكل (١-١٢): شكل بياني يعرض نتائج درجات إختبار الإحصاء

الآن نقدم المصطلحات الأساسية في تصميم التجارب وذلك في سياق مثال إختبار الإحصاء. وحدات تجريبية **Experimental units** هي عناصر التجربة وتستخدم في تسجيل قيم المتغيرات تحت الدراسة. في مثال إختبار الإحصاء، كانت الوحدات التجريبية هم الطلاب في الفصل. متغير الإستجابة **response variable** هو متغير إحصائي يمثل ناتج التجربة لأي وحدة تجريبية وهو غالبا يمثل خاصية الجودة في عمليةما. في تجربة إختبار الإحصاء، متغير الإستجابة هو درجة الإختبار. العامل **factor** هو متغير يوضع تحت السيطرةبهدف ملاحظة تأثيره على متغير الإستجابة والعامل قد يكون تصنيفا مثل الجنس له تأثير على متغير الاستجابة. القيم التي تخصص لعامل ماتسمي مستويات **levels**. في المثال، العامل موضوع الإهتمام هو نسبة التمارين التي يكملها الطالب. لقد تم التحكم في هذا العامل عند ثلاث مستويات: 50%,75%,100%. عادة توجد كثير من المتغيرات بخلاف العوامل موضوع الإهتمام، يمكن أن تسبب إختلافا في متغير الإستجابة، هذه المتغيرات تسمي

بالمتغيرات الخفية أو الخلفية background variables أو متغيرات القطاعات blocking variables. كل مستوى في المتغير الخفى يسمي قطاع block .

عند تصميم تجربة ما، يجب على المرء سرد كل المتغيرات الخفية (أو الخلفية) سواء اكانت تافهه أو غير تافهه. المتغيرات الخفية في المثال المتضمن القدرات الأكاديمية للطلاب (وتميز بواسطةGPA): إحساس الطلاب باليقظة ورباط الجأش، صعوبة الإختبار، المعلم، جهد الطالب في الدراسة من أجل الإمتحان (بخلاف نسبة التمارين التي يكملها الطالب). عن طريق التحكم في مستويات المتغيرات الخفية، يمكنا عمل مقارنات بين أثار العوامل موضوع الإهتمام. عموماً هناك ثلاث طرق مبدئية للتحكم في المتغير الخفى أو الخلفي:

١- **إستبعاد أن يكون متغيراً:** أحد المناهج هو تثبيت المتغير الخفى أو الخلفي عند قيمة واحدة في التجربة كلها. ومن ثم لا يمكنه أن يتسبب في تغيير متغير الإستجابة. في المثال الذي بين أيدينا، نجد أن صعوبة الإختبار، المعلم، تم التحكم فيها، فكان هناك إختبار واحد ومعلم واحد. وعلى ذلك فالنتائج المتعلقة بتأثير عدد التمارين المستكملة على درجة الإختبار تتحقق إحصائيا عند إختبار واحد فقط وعند معلم واحد فقط. ولكي نبين أن هذه النتائج يمكن تطبيقها إحصائيا على إختبارات أخرى أو على معلمين أخرين، فإنه يجب توسيع التجربة لتشمل هذه الحالات.

2- **التحكم في مستويات المتغير الخفى:** قطاعات (مستويات) المتغير الخفى يجب أن تسع مدى القيم المكنة التي تقابلنا في العملية. في المثال، الطلاب الذين لهم GPA يتراوح بين (2.0-4.0) من المحتمل أن تندرج أسمائهم في أي فصل يدرس الإحصاء. تم تقسيم الطلاب إلى قطاعين طبقا لمعيار GPA :قطاع من (2.0-3.0) وقطاع من (3.01-4.0). وهكذا نجد أن GPA تم التحكم فيها عند مستويين.

3- **تسجيل قيمته:** في بعض الأحيان لا يمكنا التحكم في مستويات المتغير الخفى في تجربة ما. في هذه الحالة، يجب أن نحاول تسجيل قيمة. هذا يسمح لنا أن نفهم تأثيره على متغير الإستجابة عندما نحلل نتائج التجربة.

إذا لم نتمكن من التحكم في المتغير الخفى بأي طريقة من الطرق الثلاث السابقة، فهناك خطورة من تواجد تأثير له على النواتج بشكل منتظم. وهذا يمكن ان يسبب لنا تفسير خاطئ لتأثيره على أحد عوامل التجربة. ولكي نكون في وضع دفاعي ضد هذا الإحتمال، فإننا نوزع أو نخصص كل الوحدات التجريبية بطريقة عشوائية على المجموعات الفرعية، وذلك بعد أن تكون قد تحددت مستويات العامل ومستويات المتغير الخفى. هذا الشكل في تصميم التجارب يسمي بالتعشية randomization. في المثال، تم توزيع الطلاب عشوائيا إلى ثلاث مجموعات طلابية (50%,75%,100%). النتيجة هي أن تأثيرات كل المتغيرات التي لم يتم التحكم فيها، تم توزيعها عشوائيا على المجموعات الفرعية في التجربة. وكنتيجة لاستخدام التعشية في هذا المثال، فإن أثار إختلاف الأيام من يوم إلى أخر على أداء كل طالب، وأثار إختلاف جهود الطلاب في دراستهم، تم توزيعها عشوائيا على ست مجموعات فرعية. على الرغم من أن هذه المتغيرات لم نتمكن من التحكم فيها، فإن التعشية تمنعهم من تأييد أو محاباة مجموعة فرعية بشكل منتظم على المجموعات الفرعية الأخرى. مناقشة تصميم التجارب مستمرة في الفصول ٧، ٨ وتبلغ الذروة في الفصل ١٣.

فيما يلي نعرض للخطوات الأساسية عند تصميم تجربة ما:

مراجعة خطوات تصميم تجربة ما

1- صف العملية موضع الإهتمام.
2- ضع الأسئلة الأساسية التي ستجيب عنها بواسطة التجربة.
3- حدد الوحدات التجريبية.
4- حدد متغير الإستجابة.
5- حدد العوامل ومستوياتها.
6- حدد المتغيرات الخفية (أو الخلفية).
* حدد تلك المتغيرات التي يتم التحكم فيها وطرق التحكم.
* حدد تلك المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها.
7- عين اسلوب القياس لمتغير الإستجابة، لكل عامل، ولكل مستوى من مستويات المتغير الخفى.
8- استخدم التعشية لتخصيص الوحدات التجريبية على المجموعات الفرعية التجريبية.

تمارين

(١-١٩) حدد الطرق الأربع الرئيسية التي تحصل منها على البيانات.

(١-٢٠) ناقش مزايا العينات العشوائية البسيطة.

(١-٢١) أشرح أهمية الحاجة إلى بيانات مقنعة أو ملائمة عند دراسة حالات معينة.

(١-٢٢) لماذا يكون إستخدام المجموعات الفرعية مساعداً في دراسة عملية ما خلال الزمن.

(١-٢٣) حدد وناقش أثنين من الأدوات الأولية التي تساعد في فهم كيف تعمل عملية ما في الوقت الحالي ثم حدد الأسباب الممكنة للمشاكل.

(١-٢٤) حدد وناقش بإختصار اثنين من الأدوات الإحصائية الأولية لتقييم آداء عملية ما خلال الزمن.

(١-٢٥) أشرح الفرق بين الأسباب العامة والأسباب الخاصة المسببة للأختلاف.

(١-٢٦) أشرح الفرق بين العمليات المستقرة والعمليات غير المستقرة.

(١-٢٧) ناقش الفرق بين خريطة التتبع البياني وخريطة الرقابة.

(١-٢٨) اعتبر العملية التي فيها يذاكر الطلبة من أجل أختبار إحصاء.

(أ) حدد خاصية الجودة المناسبة لهذه العملية وبرر إجابتك.

(ب) حدد ثلاثة عوامل عامة مسببة للأختلاف في خاصية الجودة التي ذكرتها في (أ) وبرر إجابتك.

(جـ) حدد على الأقل عاملا واحداً من العوامل الخاصة المسببة للأختلاف وبرر إجابتك.

(١-٢٩) لأن فريق السلة بأحدى الكليات صغير وضعيف نسبيا في خط الدفاع، قدر مدرب الفريق أنه لابد من تسجيل 85 نقطة في المتوسط في كل مبارة حتي يكون الفريق ناجحا. بعد عشر

مباريات حقق الفريق 75نقطة في المتوسط. وأعطى مجلس الإدارة للمدرب الحق في إجراء تغيرات في اللعب أو في اللاعبين أو كلاهما بهدف زيادة كفاءة الفريق. هل توافق على أن هذه التغيرات مطلوبة؟ برر إجابتك.

النقاط التي حققها الفريق في المباريات العشر كانت.

المباراة:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
النقاط:	61	53	61	70	71	78	81	86	96	93

(١-٣٠) من العادات التي نألفها جميعاً إستهلاك الطعام، السيدة paula كانت معنية برقابة وزنها، أول خطوة في عملية التحكم في وزنها قيامها بتسجيل عدد السعرات الحرارية التي تناولتها يومياً خلال الشهر الماضي وكانت على النحو التالي:

الأسبوع الأول:	1295	1720	1215	1210	1260	1075	1100
الأسبوع الثاني:	1200	1435	1255	1300	1385	1515	1105
الأسبوع الثالث:	1270	1200	1215	1225	995	1270	1350
الأسبوع الرابع:	1285	1110	1430	1180	1385	1300	1175
الأسبوع الخامس:	1475	1225					

(أ) اعتمادا على معرفتك بعادات الأكل عند الناس، حدد بعض المصادر المكنة المسببة للأختلافات في هذه البيانات.

(ب) حدد لكل مصدر من المصادر في (أ) ما إذاكان طبيعيا أم خاصا يمكن تعينه.

(جـ) إرسم خريطة التتبع البياني لتلك البيانات.

(د) هل الخريطة البيانية في (جـ) تظهر أي علاقة واضحة عن عدم إستقرارالعملية؟ وضح إجابتك.

(١-٣١) البيانات التالية تمثل عدد الكتب المباعة في إحدى المكتبات خلال 30يوم عمل متتالية.

الأسبوع الأول:	38	35	76	58	48	38
الأسبوع الثاني:	67	63	33	69	53	51
الأسبوع الثالث:	28	25	36	32	61	57
الأسبوع الرابع:	49	78	48	42	72	52
الأسبوع الخامس:	47	66	58	44	44	56

(أ) هل عملية البيع تبدو مستقرة؟

(ب) أسرد على قدر المستطاع أسباب الإختلاف في هذه البيانات.

(ج) حدد كل سبب للإختلاف ذكر في (ب) ما إذاكان من العوامل الطبيعية أو العوامل الخاصة والتي يمكن تعينها.

(١-٣٢) إثنان من الخيول الأصيلة أشتركا في سباق ميل واحد. الأزمنة المسجلة لكل حصان (بالدقائق: ثوان) في ست سباقات ذات ميل واحد كانت علي النحو التالي:

السباق	الحصان A	الحصان B
1	1:39	1:32
2	1:37	1:34
3	1:36	1:31
4	1:33	1:34
5	1:31	1:34
6	1:30	1:33

معتمداًعلى خريطة التتبع البياني لهما معا، أي الحصانين تتوقع أن يفوز في السباق الحالي؟ اشرح مبرراتك.

(١-٣٣) محلل عمليات بأحد البنوك قام بتسجيل عدد التحويلات للعملاء (ايداعات ومسحوبات) يوميا وخلال فترة 7 أسابيع. والبيانات كانت على النحو التالي (الأسبوع يبدأ من الأثنين إلى الجمعة).

	الأثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
الأسبوع 1	64	96	75	105	169
الأسبوع 2	67	104	74	73	202
الأسبوع 3	70	116	89	112	230
الأسبوع 4	68	95	121	83	168
الأسبوع 5	55	109	99	94	157
الأسبوع 6	52	102	72	82	123
الأسبوع 7	68	90	105	78	179

معتمدا على خريطة التتبع البياني، هل عمليات التحويل تبدو مستقرة في كل يوم من ايام الأسبوع؟ أشرح مبرراتك في سياق أسباب الأختلاف لأي يوم تعتقد أنه غير مستقر.

(١-٣٤) في تصميم التجارب، إشرح ما يلي:

(أ) الوحدة التجريبية. (ب) متغير الإستجابة.

(جـ) العامل ومستويات العامل. (د) المتغيرات الخفية أو الخلفية.

(هـ) القطاعات.

(١-٣٥) البيانات التالية تمثل نسبة المنتج المرفوض أثناء فحص نوع معين من العدسات نتيجة لوجود عيب معين وذلك خلال إنتاج شهر ابريل 1988 في مصنع إنتاج العدسات البصرية.

يوم الإنتاج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
النسبة المرفوضة	5.13	4.31	5.88	5.37	5.73	4.31	4.42	4.07	5.96	4.37
يوم الإنتاج	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
النسبة المرفوضة	4.89	4.71	4.57	5.40	4.00	6.47	6.33	4.83	4.40	4.12

مستخدماً خريطة التتبع البياني، حدد ما إذا كانت العملية الإنتاجية مستقرة أم لا خلال هذا الشهر اخذاً في الأعتبار نسبة الأنتاج المرفوض.

(١-٣٦) البيانات التالية تمثل أعداد العمليات التحويلية يومياً في شهري ديسمبر 1991 ويناير 1992 في احد فروع بنك كبير، قائمة الأعداد تمثل التحويلات التجارية التي تمت في يوم عمل. أيام الأسبوع موضحة بين قوسين.

(أ) وضح لماذا يكون تسجيل مثل هذه البيانات مهما بالنسبة للمدير ؟

(ب) مستخدما خريطة التتبع البياني، حدد ما اذا كان نشاط هذا الفرع مستقراً خلال هذين الشهرين.

(جـ) علي نفس المساحة البيانية، ضع عدد التحويلات على المحور الرأسي يناظره أيام الأسبوع على المحور الأفقي. أشرح النتائج التي تحصل عليها.

December		January	
Date	Number of Transactions	Date	Number of Transactions
2 (M)	792	2 (Th)	821
3 (T)	791	3 (F)	917
4 (W)	781	6 (M)	772
5 (Th)	818	7 (T)	724
6 (F)	912	8 (W)	701
9 (M)	812	9 (Th)	776
10 (T)	782	10 (F)	891
11 (W)	911	13 (M)	804
12 (Th)	811	14 (T)	762
13 (F)	889	15 (W)	711
16 (M)	879	16 (Th)	890
17 (T)	801	17 (F)	904
18 (W)	768	21 (T)	836
19 (Th)	821	22 (W)	762
20 (F)	991	23 (Th)	803
23 (M)	798	24 (F)	961
24 (T)	891	27 (M)	762
26 (Th)	801	28 (T)	781
27 (F)	981	29 (W)	741
30 (M)	802	30 (Th)	817
31 (T)	888	31 (F)	1.011

(١-٧) الرموز الإحصائية: Statistical Notation

وصف الطرق الإحصائية يتطلب استخدام مجموعة معينة من الرموز الفنية لتدل على المؤشرات والإحصاءات. وهناك تنسيق متعارف للترميز نأمل أن يسهل استخدامه معك. أساسا هناك قاعدتين يجب أن تضعهما في الذهن.

(1) المؤشرات (أو المعالم) تمثل بحروف يونانية. فعلى سبيل المثال، متوسط المجتمع أو العملية يشار إليه دائما بالرمز μ (الحرف اليوناني ميو). بالمثل، نسبة المفردات في المجتمع التي لها صفة معينة (مثلا:نسبة المستهلكين الذين يفضلوا مذاق الكولا) يشار إليها دائما بالرمز π (الحرف اليوناني باى). في هذا السياق π ليست هي النسبة التي في قانون محيط الدائرة أو مساحتها.

(2) الإحصاءات يرمز إليها بالحروف الرومانية. فمثلا، متوسط العينة يرمز لها بالرمز $\overline{X}$ (تنطق "X بار) ونسبة المفردات في العينة التي لها صفة معينة يرمز لها بالرمز P.

أحيانا قد ننحرف عن هذه القاعدة لكي نستجيب للرموز الإحصائية المقبولة عالميا. عندما يحدث هذا، سوف نشير بوضوح إلى إننا ننحرف عن سياسة الترميز في هذا الكتاب. وسوف نذكر إستثناء واحد الآن. الرمز المقبول عالميا لعدد المفردات في المجتمع هو N بدلا من استخدام حرف يوناني.

(١-٨) استخدم الحاسب الألي في التحليل الإحصائي: Use of Computer In Statistical Analysis

إمكانية الحصول على التحليلات الإحصائية تحسنت بشكل كبير جدا بحلول البرامج الإحصائية الجاهزة. قبل أن يكون الحاسب الآلي متاحا على نطاق واسع، كانت الطرق الإحصائية تتطلب جهدا مكثفاً على الآلات الحاسبة العادية، وكان لهذا أثره العلمي في تثبيط الهمة من إستخدام أي طريقة من الطرق الإحصائية. لم تكن التحليلات متاحة بسهولة للمدير الذي لم يكن لديه فرصة ليكون متآلفا مع تلك التحليلات. الآن تغير الوضع تغيرا مثيرا. العديد من البرامج الإحصائية الجاهزة أصبحت متاحة الآن على نطاق واسع. فهناك برنامج مثل Minitab, BMDP, SPSS, SAS تعطي بسهولة تقييما لأغلب الطرق التي يرغب في استخدامها الإحصائيين المحترفين.

ومع ذلك فالإنتشار الواسع للحاسب الآلي لا يكفل الإستخدام الجيد للإحصاء، فالحاسب الآلي يعد الطرق الإحصائية المتاحة، ولكن المرء يجب أن يكون قادرا على تحديد أي الطرق هي الملائمة. لذلك فمن المهم أن يفهم المدير التفكير الإحصائي. وحتى المدير الذي لا يستخدم التحليلات الإحصائية مطلقا، من المحتمل أن يواجه بتوصيات من الآخرين تكون مبنية على تحليلات إحصائية. وعلى ذلك نجد أن الفهم الجيد للتفكير الإحصائي يمكن المرء من حماية نفسه من فظاعة الإستخدام السئ للطرق الإحصائية.

الهدف الأساسي من هذا الكتاب هوتعلم التفكير الإحصائي السليم. من ناحية أخرى، فنحن نعتقد أنه من المهم لك أن تكون قادرا على إستخدام هذه البرامج الإحصائية وتفسير نتائجها. لذلك فقد قدمنا كثير من الأسئلة والتمارين والتي فيها قدمنا المعلومات الضرورية في صورة واقعية لمخرجات الحاسب الآلي وفق نظامين من البرامج الإحصائية الجاهزة: Minitab, SAS. وقدمنا أيضا عددا من التمارين التي تتطلب استخدام الحاسب الآلي في حلها. قدمنا أيضا التعليمات والأوامر كاملة والتي تمكنك من استخدام برنامج Minitab (وفي بعض الفصول برنامج SAS) لتنفيذ الطرق الإحصائية التي شملت هذا الكتاب. تعليمات الكمبيوتر معطاه في الملاحق التي في نهاية الفصول.

(١-٩)نظرة على محتويات الكتاب: Looking Ahead

هنا نقدم استعراض مختصر يغطي الموضوعات الإحصائية في هذا الكتاب. لقد حاولنا أن يكون هناك ربطا واضحا بين الموضوعات وذلك بتكرار الإشارة إلى المادة التي ترتبط بعلاقة مع فصول أخرى.

(١) الفصل الثاني هو مقدمة للأساليب المستخدمة في استكشاف وتلخيص البيانات. الهدف هو أن نكشف عن الصفات الأساسية والمناسبة الخاصة بالمجتمع أو العملية. بالإضافة إلي ذلك، قدمت المفاهيم الأساسية في الإستنتاج الإحصائي.

(٢) الفصول الثالث والرابع تتناول الإحتمال. الإحتمال هو أحد فروع علم الرياضيات وهو يضع مبادئ دقيقة للتعامل مع حالات عدم التأكد. الغرض الرئيسي من التطبيقات الإحصائية هو تزويد المديرين بمعلومات تساعدهم في اتخاذ القرارات في بيئة عدم التأكد. كل الإستنتاجات الإحصائية

تتم مع قدر من درجة عدم التأكد، فلا يمكن لنا أن نعرف بثقة تامة دقة النتائج المبنية على بيانات عينة. يعطي الإحتمال الأساس التحليلي لتحديد مقدار الثقة التي يمكن ان تقترن بالإستنتاج الإحصائي.

(٣) الفصول من الخامس إلى السابع تقدم المفاهيم الأساسية للإستنتاج الإحصائي. التقدير وإختبارات الفروض هما الأدوات الأساسية في صلب كثير من الطرق الإحصائية.

(٤) الفصول من الثامن إلى العاشر تتناول النماذج الإحصائية. الموضوعات التي غطيت في هذه الأبواب هي تحليل التباين وتحليل الإنحدار.

(٥) أخيرا، الفصول من الحادي عشر إلى الخامس عشر تغطي تطبيقات إحصائية متخصصة مثل: تحليل السلاسل الزمنية والتنبؤ، طرقاً لتحليل الرقابة على العمليات. تصميم وتحليل التجارب، إجراءات جودةالمطابقة، جداول الاقتران والطرق اللامعلمية. الربط بين الموضوعات يتم بالأسلوبين: الذهاب إلى الأمام والذهاب إلى الخلف. إلى الأمام لكى نعطي فكرة إلى أين تؤدي المادة الحالية التي نناقشها، وإلى الخلف لتحديد المادة التي تصل بنا إلى الموضوع الحالي. بالإضافة إلى ذلك، نركز على الأسلوب البياني في التحليل الإحصائي إبتداء من الفصل السادس. ونحن نعتقد ان المنهج البياني يكمل الطرق الإحصائية بصورة جيدة، لأنها على الأقل، تعطي فهما مرئيا للنتائج.

(١-١٠) ملخص : Summary

في هذا الباب، استعرضنا العناصر الأساسية للتفكير الإحصائي وتحليل البيانات بهدف تفهم ومن ثم تحسين أنشطة إدارة الأعمال. التحليل الأحصائي يعتمد على المعاينة لنكتسب معلومات تتعلق بنشاط ما. هناك أربع طرق أساسية نحصل بها على البيانات: العينات العشوائية البسيطة، التجارب العشوائية، بيانات ملائمة أو مناسبة، مجموعات فرعية منطقية. ربما أكبر فائدة نحصل عليها تتحقق من خلال العناية والتصميم الجيد للتجارب العشوائية.

تحليل اي بيانات تعني آساسا تفهم الإختلافات. دراسات الإختلافات تؤدي إلى زيادة المعرفة بالظاهرة ومن ثم قرارت أفضل. في دراسة العملية، هناك نوعين من الإختلافات: عوامل طبيعية أو عادية داخل العملية (أسباب عامة أو عشوائية) وعوامل غير عاديةأي أنها ليست مألوفة في العملية (أسباب قابلة للتعين والتحديد). العملية تكون مستقرة إذا كانت الإختلافات راجعة إلى الأسباب العامة أو الشائعة (العشوائية). ونحن نستخدم الخرائط البيانية وخرائط الضبط أو التحكم لقياس استقرار العملية.

المراجع References

1. W.E.Deming.*Out of the crisis*. Cambridge, MA: MIT Center for Advanced Engineering study,1986.
2. K,Ishikawa. *Guide to Quality control* , 2nd ed. New York: Asian productivity organization, UNIPUB, 1982

ملحق ١ Appendix 1

مقدمة لبرنامج ميني تاب وبرنامج ساس INTRODUCTION TO MINITAB AND SAS

يعد اليوم الحاسب الآلي من اهم الأدوات في حياتنا، وعلي الرغم من أن بعض مواد هذا الكتاب لا تتطلب استخدام الحاسب الآلي، إلا ان هناك بعض الطرق (مثل الطرق التي في الفصل العاشر) يكون من المستحيل تنفيذها بدون الحاسب الآلي. المنافع من إستخدام الحاسب الآلي تفوق إلى حد بعيد الزمن القليل الذي ينفق في الحصول على المعلومات. نضيف إلى ذلك أن تكامل الكمبيوتر مع مادة علمية مثل الإحصاء يحسن من قدرتك على إستيعاب المفاهيم والطرق التي تستخدمها في تحليلاتك.

هناك العديد من البرامج الإحصائية الجاهزة، وهي متاحة للإستخدام إما في أجهزة الحاسب الشخصي أو في أجهزة الحاسبات العملاقة. في معظم هذا الكتاب نعتمد على برنامج ميني تاب Minitab عندما يكون هناك حاجة لإستخدام الكمبيوتر، ولكن في بعض الفصول مثل (٩، ١٠) نستخدم برنامج SAS . ميني تاب وساس هما من البرامج الإحصائية القوية ذات أساس جيد ولهما إستخدام متنوع وواسع في الكليات والجامعات. مبدئياً، كل من ميني تاب، ساس يعتمدا على إصدار سلسلة من الأوامر لتنفيذ المهمة المطلوبة. أيضا، يعطي ميني تاب في البداية قائمة لتساعدك في معرفة الأوامر التي تحتاجها. في ملاحق الفصول في هذا الكتاب، نعطي الأوامرالتي نحتاج إليها في كل فصل. ونحن نعتقد أن إستخدام قائمة الأوامر والصناديق الحوارية هي من الأمور البديهية التي يجب معرفتها ونترك ذلك لكي تتعلمه، إذا رغبت في ذلك. جدير بالذكر أن كل من ميني تاب وساس يتسما بالسهولة والبساطة في الأستخدام.

من الممكن إستخدام كل من ميني تاب وساس في الحاسب الشخصي وفي الحاسبات العملاقة، لكن ضع في ذهنك أن الأوامر الأساسية تبقي ثابته لكلا البرنامجين بغض النظر عن أين يستخدما في الحاسب الشخصي أم في الحاسب العملاق. والمنهج الذي يتبع هنا هو إستخدام الأمثلة لتوضيح كيفية إستخدام كل من ميني تاب وساس. في ملاحق الفصول نقدم مناقشة لمخرجات الحاسب الآلي، أي نقدم الأوامر المستخدمة في كل من ميني تاب وساس التي تعطي مخرجات الأمثلة. ومن المهم أن تدرك أن هدفنا من هذا هو ليس تعليمك كل شئ عن الميني تاب أو ساس، بل نحن نوضح بالأمثلة كيف تستخدم برنامج ميني تاب وبرنامج ساس بأبسط وسيلة ممكنة لتسهيل الحسابات الإحصائية. ولمزيد من المعلومات حول ميني تاب أو ساس نشير عليك باحد الكتب المتخصصة والتي ستجدها متاحة في مكتبة الجامعة.

(أ ١-١) ميني تاب MINITAB

يعتبر برنامج ميني تاب من أكثر البرامج المتعددة الجوانب ومن اكثرها بساطة في الإستخدام. وبرنامج ميني تاب يمكن إستخدامه في أجهزة IBM أو الآجهزة المتوافقة معها أو مع جهاز ابل ماكنتوش.

بعد تحميل الجهاز ببرنامج ميني تاب، تظهر على الشاشة الأفتتاحية علامة المحث: <MTB. هذه العلامة تحثك علي كتابة أمر ما مثل:. READ أو SET بجوار علامة المحث: <MTB . بعد كتابة أحد هذين الأمرين، تظهر علامة محث أخرى هى <DATA لتحثك على كتابة البيانات. بعد كتابةREAD أو SET فإن برنامج ميني تاب ينظم البيانات في عدة أعمدة يرمز لها بالرموز:C2 , C1. . . بعد كتابة

سطر البيانات، اضغط ENTER(مفتاح الإدخال) من على لوحة المفاتيح. قبل الضغط على مفتاح الإدخال، فإننا ننصحك دائما بأختبار السطر الذي تكتبه لإكتشاف أي خطأ، فإذا وجدت خطأ في الكتابة، ببساطة ارجع مسافة خالية وصحح الخطأ. بمجرد أن تضغط ENTER ، فإن المعلومات التي على السطر تدخل إلى الحاسب الآلي. عند كتابة الحروف والأرقام بالحروف الكبيرة أو الصغيرة فهذا لا يعني أي شئ بالنسبة لبرنامج ميني تاب.

امر القراءة The READ Command

لنفرض أنك ترغب في إدخال المشاهدات 71, 72, 68, 66, 72. وهي تمثل الأطوال بالبوصة لخمسة أشخاص. عليك أتباع التعليمات التالية:

```
MTB > READ C1
DATA > 71
DATA > 72
DATA > 68
DATA > 66
DATA > 72
DATA > END
```

بهذه الطريقة فإن المشاهدات الخمسة تكون قد خزنت في العمود الأول داخل الميني تاب.

افترض أن البيانات تتكون من الأطوال والأوزان لخمسة أشخاص، وأنك ترغب في إدخال هوية كل فرد بأستخدام الأرقام 1, 2, 3, 4, 5. أي ان البيانات كانت على الصورة التالية:

رقم الشخص	الطول	الوزن
1	71	185
2	72	188
3	68	145
4	66	142
5	72	176

لإدخال هذه البيانات، فعليك بإستخدام التعليمات التالية:

```
MTB > READ    C1    C2        C3
DATA > 1      71     185
DATA > 2      72     188
DATA > 3      68     145
DATA > 4      66     142
DATA > 5      72     176
DATA > END
```

الأعمدة C1, C2, C3 تحتوي الآن على رقم الشخص وطول الشخص ووزن الشخص على التوالي، تماما مثل طريقة الكتابة العادية. كن متأكداً من أنك تترك فراغا بين المشاهدات أو بين الكلمات.

أمر وضع البيانات في قائمة The SET Command

الأمر SET هو طريقة أخري لإدخال البيانات إلى الحاسب ، هذا الأمر يختلف عن الأمر READ في أنه يسمح لك بوضع المشاهدات في صف واحد أو في أكثر من صف (اي اكثر من سطر). بالنسبة للخمسة أطوال ، فإن التعليمات تكون:

```
MTB > SET  C1
DATA > 71   72   68   66   72
DATA > END
```

أما فيما يتعلق بأرقام وأطوال وأوزان الآشخاص الخمسة ، فإن التعليمات تكون:

```
MTB   >   SET     C1
DATA  >   1   :   5
DATA  >   END
MTB   >   SET     C2
DATA  >   71   72   68   66   72
DATA  >   END
MTB   >   SET     C3
DATA  >   185   188   145   142   176
DATA  >   END
```

لاحظ أن الأستخدام 1:5 في جملة DATA تاليا بعد الأمر SET يعني أن الأرقام الصحيحة المتتالية 1 ,2 ,3 ,4 , 5 تخزن في العمود C 1

تذكر أن علامات المحث <MTB ، <DATA تظهر على الشاشة بمجرد كتابة الأمر أو الأرقام ثم تضغط مفتاح ENTER بعد كل سطر .

أمر الطباعة The PRINT Command

يمكنك دائما طباعة البيانات التي قمت بإدخالها إلى الحاسب الألى وذلك بإستخدام أمر الطباعة: PRINT فمثلا ، إذا كنت قد خزنت الأوزان الخمسة في العمود C3 داخل ميني تاب ، فأنك عندما تستخدم:

```
MTB > PRINT  C3
```

فإن الكمبيوتر يطبع الأوزان الخمسة . أو إذا كنت قد خزنت رقم الشخص في C1 والأطوال في C2 والأوزان في C3 ، فإن التعليمات:

```
MTB > PRINT  C1  C2  C3
```

أو بديلا لذلك:

```
MTB > PRINT  C1  - C3
```

يتم طباعة المعلومات المخزنة في الأعمدة C1, C2 , C3 .

أوامر إجراء التعديلات
Making Corrections: The LET, DELETE and INSERT Commands

نفرض أنك لم تكتشف أخطاء في البيانات بعد أن تكون قد أدخلتها إلى الحاسب . أبسط وسيلة لعمل التصحيحات أو التعديلات موضحة في الأمثلة التالية:

```
MTB > LET C3(4)= 10.2
```

ومعناها: بدل القيمة الرابعة في العمود الثالث للميني تاب لتكون 10.2

```
MTB > LET C2 (1)= 6
```

ومعناها: غير أول قيمة من العمود الثاني C2 لتصبح 6

إذا رغبت في إلغاء أو حذف صف بأكمله من البيانات، إستخدم الأمر DELETE، فمثلا:

```
MTB > DELETE 2 C3
```

معناها: أحذف الصف الثاني من العمود الثالث

```
MTB > DELETE  3:6 C1 C2
```

معناها: احذف الصفوف من الثالث وحتى السادس في الأعمدة الأول والثاني.

وإذا رغبت في إدخال صفوف جديدة من البيانات داخل اعمدة ميني تاب، استخدم الأمر INSERT، فمثلا التعليمات:

```
MTB  > INSERT 2 3 C1
DATA > 45
DATA > END
```

معناها: أدخل القيمة 45بين الصفوف الثاني والثالث في العمود الأول أي ان ثالث صف في العمود C1الآن هو45.

التعليمات:

```
MTB  > INSERT  3  4  C1  C2
DATA > 98   11.8
DATA > END
```

معناها: أدخل القيم 11.8, 98بين الصفوف الثالث والرابع من الأعمدة C2, C1على التوالي.

تنفيذ العمليات الحسابية Performing Arithmetic Operations: The LET Command

نفرض أنك تريد أن تنشأ عمود جديد لتنفيذ بعض العمليات الحسابية مثل الجمع(+)، الطرح(-)، الضرب(*)، القسمة(/)، الأس(**)على عمود أو أكثر من الأعمدة الموجودة في ميني تاب، يمكنك تحقيق ذلك بإستخدام الأمر LET. فمثلا الجملة:

```
MTB > LET  C4 =C2**2
```

ينشئ ميني تاب العمود C4 الذي يحتوي على مربعات قيم العمود C2

أما الجملة:

```
MTB > LET  C5 = C2*C3
```

ينشئ ميني تاب العمود C5 والذي يحتوي على حاصل ضرب المحتويات المتناظرة في العمودين الثاني والثالث.

أمر التسمية The NAME Command

أعمدة ميني تاب يمكن أن يعطي لها اسما خلاف الأسماء C2,C1, . . . وبالتالي يرجع إلى هذه الأسماء عند إستخدامها. ولآداء ذلك، استخدم الأمر NAME، عند تسميةعمود في الميني تاب. يجب أن يكون الأسم الذي تختاره لا يحتوي على أكثر من ثمان حروف. فمثلا بالرجوع إلى مثال الأشخاص الخمسة مع اوزانهم واطوالهم ونرغب في اعادة تسميتها. استخدم الجملة:

```
MTB > NAME C1 = "Person"  C2 = "height"  C3 = "Weight"
```

أعمدة ميني تاب C1 , C2 , C3، أصبحت تسمي الآن "الشخص"، "الطول"، "الوزن" على التوالي. لاحظ أن علامة التنصيص (") توضع في بداية ونهاية الإسم. يجب وضع علامات التنصيص أيضا حول الإسم عندما يرجع إليه عند الإستخدام.

أوامر الحفظ والأسترجاع The SAVE and RETRIEVE Commands

يمكن حفظ ورقة العمل داخل الحاسب الآلى علي القرص الصلب (هارد ديسك) إذا رغبت في استخدامها في وقت آخر. ويتم الحفظ بالأمر SAVE مقرونا بأسم الملف. فمثلا، الجملة:

```
MTB > SAVE "My work"
```

تعني حفظ كل البيانات، كل الثوابت المخزونة، اسماء الأعمدة. . . الخ أي كل ما في ورقة العمل worksheet توضع الآن في ملف أسمه"My work" ويمكنك أسترجاع ملف سبق حفظه بإستخدام الأمر RETRIEVE مقروناً بإسم الملف. فمثلا، الجملة:

```
MTB > RETRIEVE  "My work"
```

تعطي نفس الأعداد، اسماء الأعمدة، الثوابت المخزنة. . . الخ ، تلك التي خزنتها في "My work "

تخزين البينات على قرص خارجي: Saving and Accessing Data on a Diskette

لتخزين البيانات على قرص خارجي، يجب أن تحدد السواقة (Drive) التي تحتوي على القرص (في أجهزة IBM أو المتوافقة معها) أو اسم القرص (في اجهزة الماكنتوش). فمثلا، الجملة:

```
MTB > SAVE  "A : My work"
```

تعني حفظ الملف "My work" على قرص موجود في السواقة A وذلك في أجهزة IBM أو المتوافقة معها. (بدل "A" مع "B" إذا كان القرص موجود في السواقة B).

بالمثل:

```
MTB > SAVE  "DATADISK : My work"
```

تعني حفظ الملف "My work" علي قرص سمي DATADISK وذلك في أجهزة الماكنتوش.

أسترجاع ورقة العمل التي سبق تخزينها من على قرص خارجي، تتم بنفس الطريقة. فمثلا، الجملة:

```
MTB > RETRIEVE "A:My work"
```

تعني إسترجاع ورقة العمل من القرص الموجود في السواقة "A" في اجهزة IBM أو المتوافقة معها، بينما:

```
MTB > RETRIEVE "DATA DISK My work"
```

تعني إسترجاع الملف "My work" من القرص المسمى DATADISK في اجهزة الماكنتوش .

الأوامر الفرعية Subcommands

كثير من أوامر ميني تاب لها أوامر فرعية تسمح لنا إما بالحصول على معلومات إضافية أو عمل توضيحات أكثر. لإستخدام الأمر الفرعي، ضع فاصلة منقوطة عند نهاية جملة الأمر، عندئذ تظهر علامة المحث: SUBC > في السطر التالي وفيه يكتب الأمرالفرعي المرغوب فيه.

أوامر المساعدة والإيقاف The HELP and STOP Commands

إذا لم تكن قادرا على أن تتذكر كيف تستخدم أوامر برنامج ميني تاب، يمكنك إستخدام أمر المساعدة HELP لتكتشف معلومات تتعلق بالأمر المرغوب في فهمه، فمثلا، الجملة:

```
MTB > HELP SET
```

تعطيك تفسيرا مختصرا عن الأمرSET.

ويمكنك إنهاء جلسة ميني تاب بإستخدام الأمر: STOP

```
MTB > STOP
```

تعليمات ميني تاب للحصول على خريطة التتبع البياني

Minitab Instructions for Generating a Run Chart

بالرجوع إلى مثال(١-٥) التعليمات التالية تعطي خريطة التتبع البياني مماثلة لتلك التي في شكل (١-٨). لاحظ أن أول متغير يذكر في أمر PLOT يوضع علي محور y والمتغير الثاني على محور x

```
MTB   > Name  C1 = "Scrap"  C2 = "run no."
MTB    > Set  C1
DATA   > 36     31    45    14     38    15    25    46    30     21     28
DATA   > 24     51    15    51     12    19    10    44    22     17     36
DATA   > 41
DATA   > END
MTB    > SET C2
DATA   > 1: 23
DATA   > END
MTB    > Plot C1  C2
```

(أ ١-٢) ساس SAS

البرنامج الجاهز: نظم التحليل الإحصائي Statistical Analysis system أو SAS هو نظام متطور يمكننا من معالجة كثير من المشاكل العملية والواقعية كبيرة الحجم والتي تتطلب عمليات حسابية مجهدة. وهو برنامج يمكنك استخدامه بسهولة اثناء دراستك للأحصاء. عند إستخدامك لبرنامج SAS، من المهم أن تتذكر أن كل جمل الأوامر يجب أن تنتهي بفاصله منقوطه.

إدخال البيانات Inputting Data

قبل ان تقوم بإدخال البيانات إلى الحاسب الألي ، يجب أن تحفظ الأوامر التالية:

DATA , INPUT , CARDS بهذا الترتيب، اسهل طريقة لتحقيق ذلك هو ان تستخدم جملة INPUT كدليل للكلمات التي تدخلها في الحاسب وتضع جملة DATA قبل INPUT وتضع جملة CARDS بعد INPUT في سطور منفصلة. بعد ذلك تأتي البيانات بعد جملة CARDS. فمثلا، دعنا نتذكر الأشخاص الخمسة وأطوالهم وأوزانهم كما اعطيت في فصل ميني تاب. لإدخال هذه البيانات، استخدم التعليمات التالية:

```
DATA;
INPUT  PERSON  HEIGHT   WEIGHT;
CARDS;
1          71          185
2          72          188
3          68          145
4          66          142
5          72          176
```

لاحظ ان الأسماء التي أعطيت للأعمدة الثلاثة من البيانات هي: رقم الشخص، الطول، الوزن على التوالي. لذلك ففي أي وقت تحتاج إلى إستخدام الأطوال مثلا في حساباتك، فإنك تستخدم الأسم HEIGHT كما هو معطي في جملة الإدخال INPUT. وكما كان الأمر في برنامج ميني تاب، فإن الإسم أو الدليل يجب ألا يزيد عن ثمان حروف.

ولمزيد من التوضيح، أفترض أن البيانات التالية تتكون من حجم المبيعات y (بالألف دولار) كدالة في الإنفاق على الاعلانات X (بمئات الدولارات).

X	y
1.2	4.4
2.4	4.9
3.1	5.8
4.0	5.7
4.8	6.4
5.6	4.1

بالنسبة لهذه البيانات، استخدم التعليمات التالية:

```
DATA;
INPUT    X       Y    ;
CARDS;
1.2     4.4
2.4     4.9
3.1     5.8
4.0     5.7
```

```
4.8    6.4
5.6    7.1
```

أخيرا، افترض أنك أعطيت البيانات التالية والتي تعبر عن المسافة بالميل لكل جالون التي حققها إثنين من السائقين على ثلاث انواع مختلفة من السيارات.

السائق	السيارة		
	1	2	3
1	33.6	32.8	31.9
2	36.9	36.1	32.1

يلاحظ من هذه البيانات أن السائق الأول قطع 33.6 ميل /جالون عند قيادة السيارة رقم(1) وقطع 32.8 ميل /جالون عند قيادة السيارة رقم (2) وهكذا. لهذه البيانات، تستخدم التعليمات التالية :

```
DATA;
INPUT  DRIVER  AUTO   MILEAGE;
CARDS;
1         1         33.6
1         2         32.8
1         3         31.9
2         1         36.9
2         2         36.1
2         3         32.1
```

لاحظ أن البيانات كتبت في توفيقات خاصة لكل سطر مستخدمين الترتيب كما هو محدد بالأسماء في جملة الأدخال INPUT.

طبع البيانات Printing Data

يمكن طبع البيانات التي أدخلت إلى الحاسب الآلي باستخدام الأمر PROC PRINT فمثلا، الجملة:

```
PROC PRINT;
```

تطبع كل البيانات التي أدخلت إلى الحاسب الآلي. إذا رغبت في طباعة أجزاء معينة فقط، يمكنك إجراء ذلك بوضع عبارة VAR بعد الأمر PROC PRINT. في عبارة VAR، يجب ان تشير إلى الأجزاء التي ترغب في طباعتها عن طريق استخدام اسمائها كما جاءت في عبارة الإدخال INPUT. فمثلا، إذا رغبت في طباعة الإنفاق على الأعلانات فقط (ولها الدليل X في جملة INPUT)، استخدم التعليمات التالية:

```
PROC PRINT;
VAR   X  ;
```

تنفيذ العمليات الحسابية: Performing Arithmetic Operations

يمكن دائما اداء العمليات الحسابية على واحد أو أكثر من الكميات والتي أعطيت أسماء في جملة INPUT وذلك باستخدام نفس الرموز التي ذكرت في فصل ميني تاب، إي: (+) للجمع، (-) للطرح، (*) للضرب، (/) للقسمة، (**) للأس. فمثلا، التعليمات:

```
RATIO= x/y ;
XSQUARE = x** 2;
DIFF = x-y ;
SUM = x + y;
PROD = X* Y;
```

ينشأ عنها الكميات: النسبة، التربيع، الفرق، المجموع، حاصل الضرب RATIO, XSQUARE, DIFF, SUM and PROD حيث العمليات الحسابية تشمل الكميات x, y (معرفة في جملة INPUT) هي كما أشير إليها من قبل.

الفصل الثاني

فحـــص وتلخيـــص البيـــانـــات

EXPLORING AND SUMMARIZING DATA

محتويات الفصل:

الفصل الثاني

فحـــص وتلخيـــص البيـــانـــات

EXPLORING AND SUMMARIZING DATA

(٢-١) مقـدمـــة: Introduction

في الفصل الأول قدمنا كثير من المفاهيم الأساسية في التحليل الاحصائي مثل العمليات، المجتمعات، العينات، المعالم، الإحصاءات، النماذج الإحصائية... إلخ بعد ذلك وضحنا عملية التفكير الاحصائي **Statistical thinking** وهو أسلوب يقود إلى الإستخدام المناسب للبيانات أو لتفهم أفضل ومن ثم تحسين فاعلية وإنتاجية المنظمات. في هذا الفصل، نقدم بعض الأساليب الاحصائية شائعة الإستخدام بغرض تصوير وتلخيص البيانات وهذه الطرق إذا ما تمكنا منها، أصبحنا قادرين على استخدام الإحصاء بكفاءة لنتعرف على خصائص الظواهر التي تهتم بدراستها. في الواقع، سنجد أنه بنهاية هذا الفصل سيمكنك تنفيذ الدراسة الاحصائية مستخدما كل من مفاهيم الفصل الأول والطرق الإحصائية التي في هذا الفصل. وهناك قيدين هامين على الأساليب المستخدمة في هذا الفصل: أن هذه الأساليب لا تعطي طريقة لتقييم المخاطر المقترنه مع أي نتائج قد تصل إليها، والثاني، ان هذه الأساليب لا تمكنا من تطوير النماذج الاحصائية لتسهيل إتخاذ القرار. التغلب على هذه القيود الهامة هو الهدف الأساسي من الفصول (٣-١٠).

كما أشرنا سالفا في الفصل الأول، أنه من المهم ان تفحص البيانات لتستدل على استقرار أو عدم استقرار المصدر الذي نتجت عنه البيانات. إذا كانت البيانات جمعت في تتابع زمني، فإن خريطة السلسلة أو التتابع الزمنية يمكن أن تكون مفيده جدا في هذا السياق. لو فرض إنك مقتنع باستقرار البيانات، فإنه يوجد العديد من الصور البيانية التي يمكن أن تلخص بها تلك البيانات مثل توزيعات الموضع أو المركز، الإختلاف والتشتت. في الفصول التالية، سنعرف كل من هذه المصطلحات ونقدم معظم الأساليب الهامه المتضمنة في كل مصطلح.

(٢-٢) أنواع البيانات: Types of Data

قبل مناقشة طرق تلخيص البيانات، فإننا نحتاج إلى تفهم انواع البيانات التي يمكن أن تقابلنا. البيانات إما أن تكون وصفية أو كمية. البيانات الوصفية **Qualitative Data** هي بيانات لا تلتزم بمقياس عددي ذو معنى، بل انها تتكون من مشاهدات إما أن تميز بصفات مثل عناوين ليس لها ترتيب طبيعي أو أنها توضع في صفات لها ترتيب طبيعي. البيانات الوصفية التي ليس لها ترتيب طبيعي هي قياسات اسمية أو نوعية **Nominal Scaled**. لتوضيح ذلك، نفرض ان الرقم الذي يحمله العداء في سباق الـ 10 كيلو متر هو319 هذا الدليل المميز للعداء (أي رقمه) لا يعني ترتيب طبيعي له، لأنه ببساطة يعرف العداء، اي انه لا يقيس سرعته ولا يدل على ترتيبه النهائي في السباق. في بحوث

التسويق المتعلقة بعادات القياده، نجد أن نوعية السياره المملوكة تعد معلومات وصفية لأنها تحدد صفة (مثل: يملك سياره فورد، يملك سياره تويوتا) والتي نجد فيها ان مبدأ الترتيب ليس له أية أهمية. عندما نرغب في تلخيص بيانات ذات قياسات اسمية (أو نوعيه)، فإننا عادة نهتم بنسب **Proportion** تقع داخلها صفه معينة، فمثلا في استقصاء بحوث التسويق المتعلقة بعادات القيادة، قد نهتم بتحديد نسبة من يملكون سيارة فورد.

أما البيانات الوصفية ذات الترتيب الطبيعي ولكنها لا تعطي معلومات تتعلق بالفرق بين موضعين متجاورين، تسمى قياسات ترتيبية **Ordinal Scaled**. فمثلا، إذا كان المتسابق هو الرابع في نهاية السباق، فإن "4" تحدد ترتيب هذا المتسابق في نهاية السباق في ترتيب طبيعي يبدأ من الأول وحتى الأخير، ولكنه لا يعطي معلومات تتعلق بالفرق الزمني بين هذا المتسابق والمتسابق الذي احتل الترتيب الثالث أو الترتيب الخامس. بالمثل إذا كان ترتيبك هو الثامن في فصلك، فإن"8" تحدد مكانك النسبي في ترتيب طبيعي دون أيه معلومات تتعلق بالفرق بين درجتك ودرجات الأخرين اللذين لهم الترتيب السابع والتاسع مثلا.

من ناحية اخرى، نجد أن البيانات الكمية **Quantitative Data** تميز رقميا وأنها مرتبه، كما ان الفروق بينها له معنى. فالبيانات الكمية تشير إلى كمية (كم للعدد، وكم للكمية) فمثلا، زمن العداء في سباق 10 كيلو متر هو مشاهدة كمية، لأنها تقيس المدة الزمنية التي يستغرقها المتسابق لجري 10 كيلو متر، وإذا كان زمن العداء يقل مثلا 2 دقيقة عن عداء أخر، فإن الفرق 2 دقيقة يكون له معنى. ويمكن تصنيف البيانات الكمية إلى قياسات فتريه أو فئوية **interval scaled** وقياسات نسبية **ratio scaled**. وهذه التفرقة ليست هامه لأن المشاهدات المعرفه وفق اي مقياس منها مميزه رقميا ويمكن ترتيبها، وان الفروق بينها ذات معنى. ففي البيانات ذات المقياس النسبي نجد أن القيمة صفر تشير إلى الغياب التام لكمية، وكنتيجة لذلك، فإن النسبة بين أي قيمتين هي مؤشر حقيقي لحجميهما النسبي. فمثلا العوائد الشهرية لشركة ما هي قياسات نسبية، حيث صفر دولار تعني لا يوجد عوائد، 20,000 دولار هو ضعف العائد 10,000دولار. من ناحية أخرى نجد أن الحرارة اليومية بالدرجات الفهرنهيت هي قياسات فترية، فالصفر هنا لا يعني غياب أو عدم وجود حرارة، بل أنه يعني درجة تحكمية. وكنتيجة لذلك لا يكون من الصواب القول بأن درجة الحرارة 50 في يوم ماهي ضعف درجة الحرارة 25 في يوم آخر. ونحن هنا لن نميز بين بيانات ذات مقياس فتري وبيانات ذات مقياس نسبي، لأن التميز بينهم غير مهم عندما نتعرض للطرق المستخدمة في هذا الكتاب. ومع ذلك فمن المهم ان نميز بين البيانات الكمية والبيانات الوصفية، فمعظم العمليات الحسابية التي تتم على المتوسطات تكون خاصة بالقياسات الفترية أو النسبية. في الواقع، فإن كثير من الطرق الإحصائية يلائمها المتغيرات التي هي من النوع الفتري أو النسبي. وعند تلخيص البيانات الكمية، فإننا عادة نهتم بالمتوسط أو ببعض مقاييس الأختلاف. فمثلاً، بعد تسجيل زمن سباق الـ 10كيلو متر لعدد 15عداء، فإننا قد نرغب في تحديد متوسط تلك الأزمنه.

مثال (٢-١)

في دراسة التأمين على الحياة في مثال (١-١)، كانت المتغيرات الأحصائية هي قيمة الوثيقة، نوع الوثيقة، جنس العميل، الدخل السنوي للعميل. حدد ما إذا كان كل متغير منهم هو وصفي أو كمي حسب طبيعته وبرر إجابتك.

الحــــل

قيمة الوثيقة هو متغير كمي، فهو يشير إلى كمية النقود التي سيتم دفعها عند وفاة العميل. بالمثل الدخل السنوي هو متغير كمي لأنه يشير إلى عدد الدولارات التي يكسبها العميل كل سنه. من ناحية أخرى، نوع الوثيقة وجنس (أو نوع) العميل هي متغيرات وصفية، فنوع الوثيقة يضع وثيقة العميل في صفة إما مؤقته أو شامله، أما الجنس فيصنف العميل إلى ذكر أو أنثى.

ويمكن تلخيص أنواع البيانات كما يلي:

أنواع البيانات

* بيانات وصفية:**Qualitative data**وتتكون من مشاهدات إما أن تميز بعنوان أو أن توضع في صفات ذات ترتيب طبيعي.
* بيانات كمية: **Quantitative data** وهي مشاهدات تميز رقميا (كم للعدد أو كم لكمية) ويمكن ترتيبها وأن الفروق بينها ذات معني.
* قياسات أسمية (أو نوعية): **Nominal-Scaled data** : وهي مشاهدات وصفية ليس لها ترتيب طبيعي.
* بيانات ذات قياسات ترتيبية: **Ordinal-Scaled data** وهي مشاهدات وصفية لها ترتيب طبيعي.
* بيانات ذات قياسات فترية وقياسات نسبية: **Interval and ratio scaled data** وهي مشاهدات كمية تدل على كم للكمية وكم للعدد لبعض الكميات موضوع الاهتمام.

تمارين:

(٢-١) عرف نوع البيانات وأشرح الفرق بينهم.

(٢-٢) اذا سجلنا نواتج المتغيرات التالية، ما هو نوع البيانات التي يجب أن نسجلها ؟

(أ) الجنس (النوع). (ب) الدخل السنوي.
(جـ) ترتيب اللاعب في نهاية لعبة الجولف. (د) عدد السيارات المباعه في أسبوع ما.
(هـ) ترتيب المبيعات السنوية لاحدى الشركات بالنسبة لشركات الصناعة.
(و) حالة جهاز تسجيل الفيديو VCR

(٢-٣) في تمرين(٢-٢) لأي متغير يجب أن تكون البيانات:

(أ) بيانات ذات قياسات ترتيبية. (ب) بيانات ذات قياسات فترية أو نسبية.
(جـ) بيانات ذات قياسات أسمية أو نوعية.

(٢-٤) هل يمكن إجراء عمليات حسابية تلخيصية اذا كانت البيانات وصفية ؟ اشرح ذلك.

(٢-٣) توزيع البيانات: Distributions of Data

لكي نتبين أي معني لمجموعة بيانات، فإننا نحتاج غالبا إلى تلخيصها في شكل ما، وهناك منهجين اساسيين لتلخيص البيانات، احدهما يصور في جداول أو رسوم بيانية، حيث ترتب البيانات من القيم الصغرى إلى القيم الكبرى. لنفرض أن أقل درجة في فصلك في إختبار الإحصاء كانت 51 وأكبر درجة هي 97، كيف كان أداء الفصل ككل ؟ هذا يعتمد على الكيفية التي يتم بها ترتيب الدرجات

الأخرى بين 97,51. لماذا يكون الترتيب هاماً كأول خطوة عند وصف أداء الفصل ؟ لتوضيح ذلك، سنعتبر وضعين محتملين: (1) معظم الدرجات كانت بين 60 وأقل من 70 وعدد قليل فقط ما بين 80,90. (2) معظم الدرجات كانت بين 90,80 وعدد قليل فقط بين 60, 50. على الرغم من أن المدى واحد في الحالتين إلا أن الوضع الثاني يمثل وضع أفضل للأداء بصفة عامة. ترتيب البيانات في الإحصاء يعرف على أنه توزيع البيانات Distribution والتوزيع يعد مهما لأنه يكشف عن النظام الذي تتغير به البيانات، ومن ثم نتفهم بصورة أفضل المصدر الذي منه تأتي البيانات.

الطريقة الثانية لتلخيص البيانات هي إستخدام كميات رقمية تسمى- كما سنرى لاحقاً- إحصاءات (أو معالم اذا كانت البيانات تشكل المجتمع ككل). فعلي سبيل المثال، يمكنك وصف أداء فصلك في إختبار الأحصاء استناداً إلى متوسط درجة الإختبار. في هذا الفصل، نقدم طرقا لوصف توزيعات البيانات في جداول ورسوم بيانية. وفي الفصول التالية نناقش بعض الإحصاءات الهامة أخذين في الإعتبار بعض المشاكل المرتبطة بإستخدامها.

(٢-٣-١) الشكل النقطي: Dot Diagrams

عندما يكون هناك عدد قليل من المفردات، فإن توزيعها يمكن عرضه بسهولة برسم بياني نقطي. والرسم البياني النقطي هو ببساطة رسم القيم المفردة للبيانات على قطعة مستقيمة، وإذا تطابقت قيمتين أو أكثر فإنهما يوضعا فوق بعض. بفرض أن عشرة أشخاص حصلوا على الدرجات التالية في إختبار الإحصاء: 97,89,88,85,81,80,78,78,74,66. لتكوين رسم بياني نقطي، فإننا نحتاج إلى قطعة مستقيمة تحتوي على المدى من 66 إلى 97، بعد ذلك توضع الدرجات العشر على القطعة المستقيمة بإستخدام النقط كرمز للرسم، كما موضح في شكل (٢-١)

65 70 75 80 85 90 95 100

شكل (٢-١) : الشكل النقطي لعشر درجات

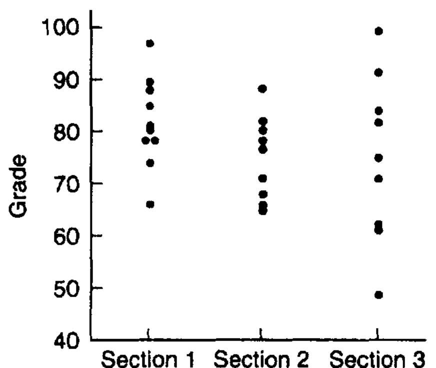
لاحظ أن القيمتين 78 قد كدستا فوق بعض. الرسم البياني النقطي في شكل (٢-١) يكشف بوضوح توزيع الدرجات العشرة، فالدرجات موزعة بتماثل إلى حد ما ومركزها تقريباً حول القيمة 80 والدرجات 66، 97 تبتعد بعض الشئ عن الباقي.

يحتوي تصميم التجارب غالبا على نواتج لعينات صغيرة إلى حد ما، وبالتالي فإن الأشكال النقطية غالبا ما تكون وسيلة فعالة لعرض نواتج تلك التجارب، كما سنرى ذلك في الفصول (٧، ٨). نفرض أن استاذاً أعطى نفس الإختبار السابق لثلاثة فصول منفصلة عن بعضها، كل منها تعلم أو درس بطريقة مختلفة عن الأخرى. النتائج التي أعطيت من قبل تمثل درجات الفصل الأول، أما الفصلين الثاني والثالث فكانت على النحو التالي:

Section 2:	65	66	68	71	77	78	80	82	88
Section 3:	48	61	62	71	75	82	84	91	99

شكل (٢-٢) يوضح إختلاف الرسوم البيانية النقطية للفصول الثلاثة على نفس الشكل. يلاحظ في هذا الأختلاف أن القطع المستقيمة والتي عليها وضعت البيانات، هي في وضع رأسي وليست أفقية.

أيضا، كل الرسوم النقطية الثلاث تنتمي إلى نفس القطعة المستقيمة وهي المحور الرأسي للشكل البياني في المدى من 40 إلى 100. وبالتالي لم يعد هناك حاجة لخطوط رأسية تمر عبر النقط ومن ثم فقد تم حذفها.



شكل (٢-٢): الأشكال النقطية لدرجات الإحصاء في الفصول الثلاثة

كيف يمكنك مقارنة الدرجات في الفصول الثلاثة ؟ من شكل (٢-٢)، يتضح أن متوسط الدرجات للفصلين 3,2 متساوية تقريبا، بينما المتوسط للفصل الأول مرتفع. في نفس الوقت الإختلاف في الدرجات بين طلبة الفصل الثالث هو الأكبر والإختلاف في الدرجات للفصل الثاني هو الأقل.

إذا كانت مجموعة البيانات تضم العديد من القيم، فإن الرسوم النقطية تصبح أكثر ازدحاماً وتقل فاعليتها. وإذا كانت الحالة هكذا وترغب في وصف التوزيع، فإن أفضل منهج هو تجميع القيم المتشابهة وبدلا من رسم قيم مفردة، فإننا نسجل عدد القيم التي تقع في كل مجموعة ويمكن أداء ذلك بإستخدام إما شكل الجذع والورقة أو المدرج التكراري وهي موضوعات الفصول التالية.

(٢-٣-٢) شكل الجذع والورقة: Stem - and - Leaf Plots

الشكل البياني للجذع والورقة هو شكل بسيط جدا ولكنه وسيلة فعالة في تنظيم البيانات لتكشف عن توزيعها. إعتبر مجموعة الدرجات العشرين التالية في إختبار الإحصاء.

93	83	86	83	56	63	64	73	78	81
62	88	54	72	74	87	78	61	63	89

كيف كان أداء الطلاب في هذا الإختبار ؟ شكل (٢-٣) يوضح الشكل البياني للجذع والورقة لهذه البيانات.

Stem الجذع	Leaf الورقة
5	6 4
6	3 4 2 1 3
7	3 8 2 4 8
8	3 6 3 1 8 7 9
9	3

شكل (٢-٣) الجذع والورقة لدرجات 20 طالب في إختبار الإحصاء

الآن نوضح كيف يعد هذا الشكل البياني. لكي يكون هذا الشكل، فإننا نقسم كل رقم إلى جزئين : الجذع Stem والورقة Leaf. الجذع يوضع في الجانب الأيسر من الخط الرأسي والورقة توضع في الجانب الأيمن من ذلك الخط. يلاحظ أن قيمة الجذع الأول هي 5 (رقم العشرات) وقيم الورق هي 4,6 (ارقام الأحاد) وهي تناظر الدرجات 54,56. قيمة الجذع الثاني هي 6 وقيم الورق هي: 3,1,2,4,3, وتناظر الدرجات 63,61,62,64,63. الباقي من الجذوع والأوراق تنشأ بأتباع نفس الخطوات. بصفة عامة، كل الأرقام التي لها نفس قيمة الجذع توضع في نفس الصف في شكل الجذع والورقة وقيم أوراقها توضع على يمين الخط الرأسي.

مثال درجات الأختبار إشتمل على اعداد من رقمين، كانت فيه الجذوع والأوراق تتكون من أرقام العشرات وأرقام الآحاد على التوالي. أما بالنسبة للأعداد الكبيرة، يصبح من الضروري تقسيمها بطرق مختلفة. فمثلا، لنعتبر عدد من أربع أرقام 1625. من الممكن اختيار الجذع 16 والورقة 25. بديلا لذلك، الجذع يمكن أن يحدد برقم الآلاف وبالتالي يكون الجذع 1 والورقة 625 . تحديد الجذع والورقة عملية تحكمية وعليك إختيار الطريقة التي تجعل النتائج أكثر فاعلية عند تلخيص البيانات.

في بعض البيانات، ربما نجد أن هناك الكثير من الأوراق بينما الجذع محدود، فمثلا اذا كانت كل درجات إختبار الإحصاء العشرين كانت في السبعينات والثمانينات، وباستخدام رقم العشرات لتعريف الجذع لنتج عن ذلك صفين فقط. للحصول على حل آخر أفضل لتوزيع الدرجات، فإننا يمكن أن نجزئ الدرجات والتي لها جذع مشترك إلى "مجموعة ذات مدى عالي" و"مجموعة ذات مدى منخفض". وهكذا فالجذوع للدرجات التي في الثمانينات تصبح 8^+ للدرجات من 85 حتى 89 ، 8^- للدرجات من 80 حتى 84 . بالمثل الجزوع للدرجات التي في السبعينات تصبح 7^+، 7^-. هذا الأسلوب ينتج عنه اربع صفوف للدرجات بدلا من صفين فقط.

خلال هذا الفصل تجدنا نحثك على إستخدام الحاسب الآلي لتلخيص مجموعة البيانات. فمثلا يمكن إستخدام برنامج Minitab للحصول على الشكل البياني للجذع والورقة لدرجات 20 طالب في إختبار الإحصاء. هذا الشكل موضح في شكل (٢-٤). لاحظ أن برنامج Minitab قد رتب قيم الورق داخل كل جزع. مخرجات برنامج Minitab للجذع والورقة موضحة بصورة أكثر تفصيلا في مثال (٢-٢).

2	5	4 6
7	6	1 2 3 3 4
(5)	7	2 3 4 8 8
8	8	1 3 3 6 7 8 9
1	9	3

شكل (٢-٤): مخرجات برنامج ميني تاب للدرجات العشرين

كيف يساعد الشكل البياني للجذع والورقة في تلخيص البيانات ؟ أنه يساعد بطريقتين: أنه يكشف عن توزيع البيانات كما أنه ينظم البيانات من أجل إجراء تحليلات أكثر.

١- يكشف عن توزيع البيانات:

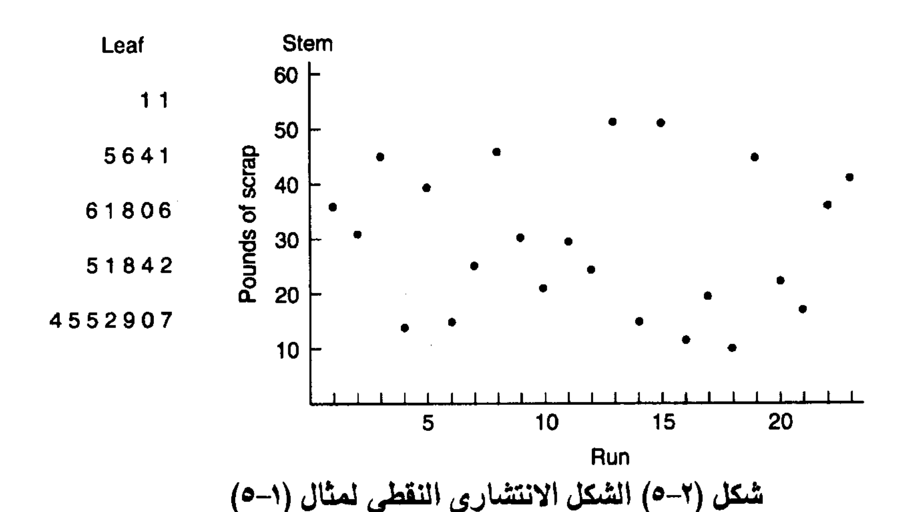
بفحص الشكل البياني للجذع والورقة في الأشكال (٢-٣)، (٢-٤)، يمكن أن نرى أن الدرجات موزعة بأنتظام تقريبا بين الـ 60، الـ 80 وهناك ثلاث درجات فقط خارج هذا المدى، واحدة في التسعينات وأثنتان في الخمسينات.

٢- تنظيم البيانات:

يوضح الشكل البياني للجذع والورقة توزيع البيانات بدون فقد في التفاصيل. أي إحصاء يمكن حسابه مباشرة من شكل الجذع والورقة، لأن قيمة كل مفردة يمكن أن نجدها في ذلك الشكل، والحاسب الآلي يعطي شكل الجذع والورقة مرتبا البيانات من الأقل إلى الأكبر (أو العكس) بالإضافة إلى ذلك يعد خطوة أولى وأساسية في كثير من الحسابات الإحصائية.

(٢-٣-٣) الخريطة النقطية الانتشارية: The Digidot Plot

يمكن إدماج شكل الجذع والورقة مع خريطة التتبع البياني للحصول على وسيلة عالية الكفاءة. من المعلوم أنه قبل عملية تلخيص البيانات، يجب التأكد من أن البيانات قد أتت من مصدر مستقر، فإذا أظهرت خريطة التتبع البياني نوعا من عدم الأستقرار كظهور اتجاه عام للبيانات، فإن معرفة توزيع البيانات ككل تصبح قليلة الأهمية. الخريطة النقطية الإنتشارية هي أسلوب يمكن بها(1) ملاحظة البيانات التي تجمع في تسلسل عليه علامات عدم استقرار أي خريطة التتبع البياني. (2) ملاحظة توزيع البيانات أي خريطة الجذع والورقة . كل ذلك يتم في أن واحد.



شكل (٢-٥) الشكل الانتشاري النقطي لمثال (١-٥)

فكرة دمج الأسلوبين بسيطة، حيث يستخدم المحور الرأسي في خريطة التتبع البياني على أنه عمود الجذع في شكل الجذع والورقة. شكل (٢-٥) يوضح الخريطة الإنتشارية للمثال (١-٥) (من الفصل الأول) وخريطة التتبع البياني التي رأيناها في شكل(١-٨) تظهر على الجانب الأيمن من شكل (٢-٥). أما الشكل البياني للجذع والورقة لنفس البيانات فتظهر على الجانب الأيسر. يلاحظ أن الأوراق تذهب إلى اليسار كلما إبتعدت عن الجذع: دعنا نختبر عدد قليل من القيم. أول قيم للأوراق تظهر عند بداية الجذع 10 وبالتالي فإن قيم تلك الأوراق وهي: 7,0,9,2,5,5,4 تمثل القيم الأصلية للبيانات: 17,10,19,12,15,15,14 بالمثل أخر ورقتين (أي عند القمة) وهما 1,1 يقترنا بالجذع 50 وبالتالي فهما يمثلان القيم الأصلية للبيانات وهما 51,51.

فحص الشكل النقطي الإنتشاري يظهر ما يلي: (1)اعتمادا على خريطة التتبع البياني على حدة، نجد أن العملية تظهر استقرارا- كما ناقشنا ذلك في مثال (١-٥)، (2)اعتمادا على شكل الجذع والورقة على حدة، نجد أن معظم الفضلات المنتجة تكون في المدى من 10إلى30 رطل (13عملية من بين23عملية).

(٢-٣-٤) التوزيعات التكرارية والمدرج التكراري: Frequency Distributions and Histograms

شكل الجذع والورقة يعطي تصور جيد لتوزيع البيانات، غير أن هناك منهج آخر مشابه وربما يكون أكثر شيوعاً وهو التوزيع التكراراي والمدرج التكراري المرتبط به. ولتوضيح التوزيع التكراري، فإننا نقسم الفترة التي تغطي البيانات إلى سلسلة من الطبقات أو المجموعات، بعد ذلك نحدد عدد القيم التي تقع في كل طبقة. فمثلا، لتأخذ الدرجات العشرين في إختبار الإحصاء والتي تقع بين 93,54. ولنفرض أننا قسمنا تلك الفترة إلى خمس مجموعات كالتالي: 59-50, 69-60, 79-70, 89-80, 99-90. التكرار **Frequency** هو عدد القيم التي تقع في كل مجموعة من تلك المجموعات. وحيث أن هذه المجموعات تتطابق مع شكل الجذع والورقة كما في شكل(٢-٣)، فإن عدد القيم في كل مجموعة تكون قد تحددت تماماً، وبالتالي تكون التكرارات في المجموعات الخمس السابقة هي: 1,7,5,5,2 على التوالي.

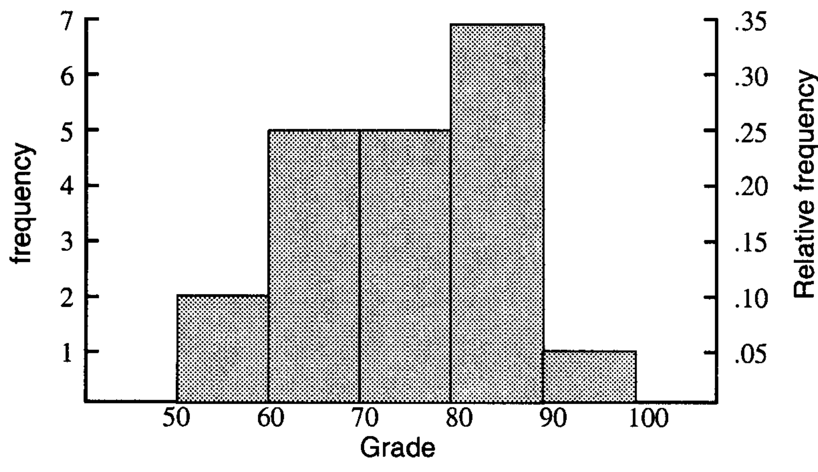
أحياناً يكون من المهم معرفة نسبة**Proportion** القيم داخل المجموعات أكثر من اعداد القيم الفعلية. التكرار النسبي**relative frequency** هو نسبة عدد القيم التي تقع داخل مجموعة معينة. التكرارات والتكرارات النسبية لدرجات إختبار الإحصاء للعشرين طالب موضحة في الجدول(٢-١).

جدول(٢-١): التكرارات والتكرارات النسبية لدرجات 20 طالب في إختبار الإحصاء

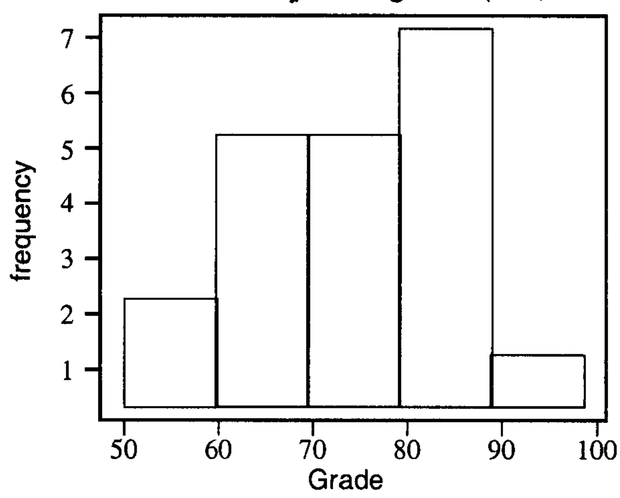
المجموعة	التكرار	التكرار النسبي
50 - 59	2	2/20 = .01
60 - 69	5	5/20 = .25
70 - 79	5	5/20 = .25
80 - 89	7	7/20 = .35
90 - 99	1	1/20 = .05
المجموع	20	1.00

على الرغم من أن التوزيع التكراري لمجموعة البيانات يمكن صياغتة في شكل جدول، كما في جدول(٢-١)، فإنه غالبا ما يفضل تمثيل التكرارات بيانيا (أو التكرارات النسبية بيانيا) في مقابل المجموعات (أو الفئات) الخاصة بها. مثل هذا الشكل البياني يسمى بالمدرج التكراري **Histogram**. المدرج التكراري للتكرارات والتكرارات النسبية لدرجات إختبار الأحصاء التي في جدول(٢-١) موضح في شكل(٢-٦). ويلاحظ أن التكرار والتكرار النسبي لكل مجموعة (أو فئة) محدد على المحور الرأسي مقابل الحد الأدنى للمجموعات على المحور الأفقي. لذلك فإنه يمكن تمثيل كل من التكرارات والتكرارات النسبية في نفس المدرج التكراراي. وإذا كان هناك تفضيل لاستخدام التكرارات النسبية عند رسم المدرج التكراري، فإن ذلك يرجع إلى أن المدى على المحور الرأسي مثبت بين ٠ و ١.

المدرج التكراري لدرجات إختبار الأحصاء يمكن الحصول عليها بسهولة عن طريق برنامج Minitab كما هو موضح في شكل (٢-٧).



شكل(٢-٦): المدرج التكراري لدرجات اختبار الاحصاء



شكل (٢-٧): المدرج التكراري لدرجات اختبار الاحصاء: مخرجات ميني تاب

التوزيعات التكرارية للبيانات الوصفية: Frequency Distributions for Qualitative Data

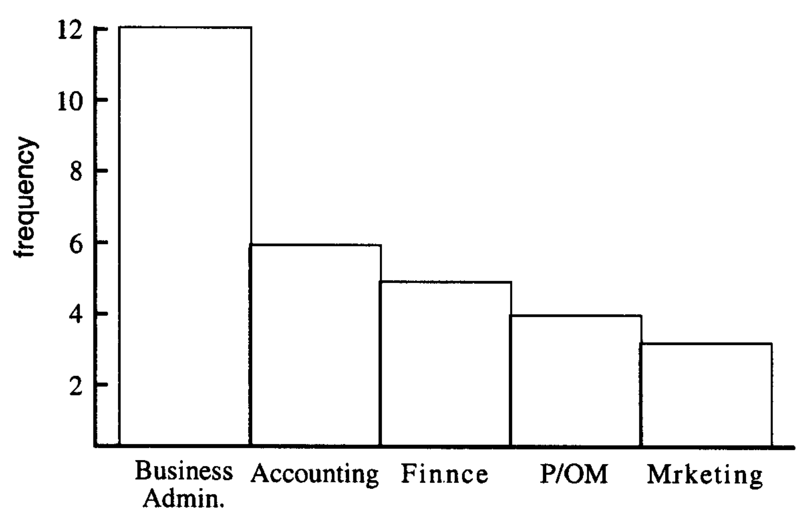
يمكن أيضاً إستخدام التوزيعات التكرارية لتلخيص البيانات الوصفية. لنفرض أن فصل به 30طالبا منهم 6 تخصص محاسبة، 5 تخصص مالية، 12 تخصص إدارة اعلان، 4 إدارة الانتاج والعمليات، 3في التسويق . المتغير الوصفي هنا هو التخصص. التكرار والتكرار النسبي لهذا المثال موضح في جدول (٢-٢).

جدول (٢-٢): التكرار والتكرار النسبي لتخصص 30 طالبا

التخصص	التكرار	التكرار النسبي
محاسبة	6	.200
مالية	5	.167
إدارة الاعلان	12	.400
إدارة الانتاج والعمليات	4	.133
التسويق	3	.100

ويكون العرض البياني مفيداً أيضاً عندما تكون البيانات وصفية، حيث تتميز البيانات الوصفية بأنه لا يوجد ترتيب طبيعي للمجموعات المكونة لها، ومن ثم يمكن وضعها في أي ترتيب نجده مفيداً. أحد الطرق المفيدة هو ترتيب تلك المجموعات طبقاً لتكراراتها. المجموعة ذات أكبر تكرار تكون الأولى، والمجموعة ذات ثانى أكبر تكرار تكون الثانية وهكذا. شكل (٢-٨) يظهر خريطة الأعمدة لتوزيع التخصصات مرتبة حسب التكرار. يلاحظ أن طبيعة العين تتجه للمجموعات ذات التكرارات العالية، لذا فإنه يتم التركيز عليها. خريطة الأعمدة والتي تصور التوزيع التكراري لبيانات وصفية ذات مجموعات مرتبه وفق التكرارات تسمى شكل باريتو **Pareto diagram** .

حيث أن أشكال باريتو تلقي الضوء على المجموعات ذات التكرارات الكبيرة، يكون من المهم الأختيار المناسب للمتغير الذي سيتم عليه القياس أو الملاحظة. نفرض أنه استخدم شكل باريتو لتوضيح الأسباب المختلفة لتعطل الانتاج. من الطبيعي أن نستنتج ان الإجراء الذي نحتاجه هو تخفيض تلك الأسباب التي غالبا ما تحدث بكثرة. ومع ذلك فإن الأسباب الأخرى والتي تحدث بتكرار أقل، من الممكن أن تكون اكثر تكلفة وربما يكون من الأفضل التركيز عليها. في مثل هذه الحالات فإن شكل باريتو الذي يوضح تكرار العيوب ربما يكون مضللا عن أن يكون مفيدا.

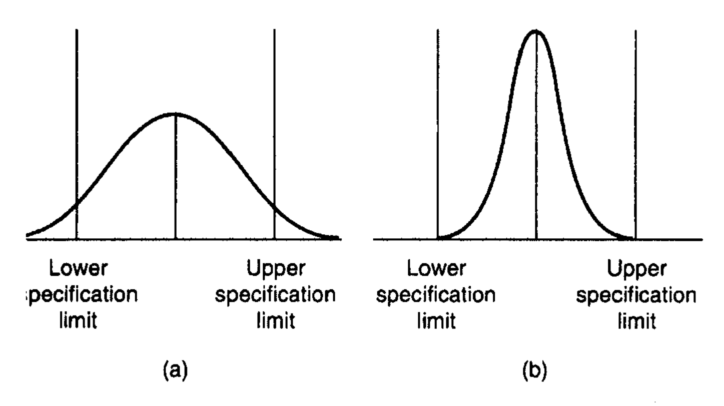


شكل (٢-٨): شكل باريتو لتخصصات 30 طالب

أستخدام المدرج التكراري: Using Histograms

التحليل الأحصائي هو دراسة الأختلافات في البيانات، ونمط الأختلاف الموجود في البيانات يسمى توزيع البيانات **distribution** وتفهم التوزيع يعد أهم سمه لتفهم الأختلافات. لكن من الصعوبة أن نميز أو نرى التوزيعات من جداول البيانات. يعطي المدرج التكراري رؤية تصويرية فعاله لتوزيع البيانات.

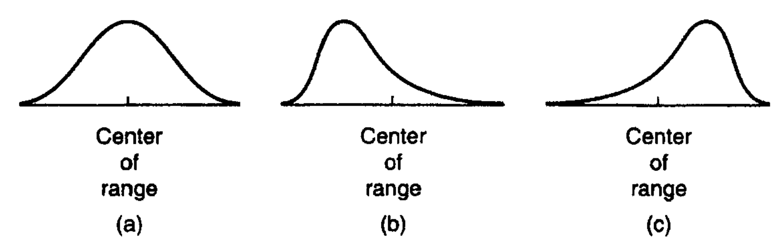
المثال التالي يوضح الحاجة إلى فهم التوزيعات. في كثير من العمليات الأنتاجية، تضع الادارة مواصفات للعملية الإنتاجية في صورة حد أدنى وحد أعلى، خارجهما يعتبر ناتج العملية الأنتاجية غير مقبول. في هذه الحالة يتيح لنا التوزيع التكراري مقارنة توزيع نواتج العملية الإنتاجية مع المواصفات للعملية الأنتاجية كما هي موضحه في شكل (٢-٩). في الجزء(أ): العملية الإنتاجية تعطي نواتج تتغير إلى حد كاف لدرجة أن بعض نسب الأنتاج تقع خارج المواصفات في أحد الأتجاهات أو في الإتجاهين. الجزء (ب) يوضح التوزيع الناتج للعملية الإنتاجية مقابل المواصفات بعد أن اتخذت الأدارة إجراءاً لتخفيض الأختلافات في العملية الإنتاجية.



شكل (٢-٩): توزيع نواتج العملية مقابل مواصفات انتاجية محددة

أشكال التوزيعات: The Shapes of Distributions

كيف يمكنك وصف شكل المدرج التكراري لدرجات إختبار الإحصاء كما هو موضح في شكل (٢-٦) أو (٢-٧) ؟ أنه من المفيد جداً أن يكون لديك مصطلح لمثل هذا الغرض. في معظم التوزيعات تميل البيانات للتمركز حول قمة وحيدة، قمة قريبة من المنتصف. التركيز المكثف لقيم البيانات يخلق قمة وحيدة وعادة ما تحدث بالقرب من مركز المدى للبيانات. في نفس الوقت، تنخفض التكرارات عادة للقيم التي تبتعد عن القمة الوحيده. مثل هذه التوزيعات يقال عنها أنها ذات قمة وحيده **Single peaked** (أو لها شكل ربوه **mound shaped** لأن لها شكل يبدو كالربوه). في التوزيعات ذات القمة الوحيدة، اذا كانت التكرارات الكبيرة تقع مباشرة عند مركز المدى للبيانات، حتى أن التكرارات تنخفض بتماثل كلما تحركنا بعيداً عن المركز في كلا الاتجاهين، فإننا نقول أن التوزيع متماثل **Symmetric**. كمثال لتوزيع متماثل ذو قمة وحيدة موضح في شكل (a) (٢-١٠). من ناحية أخرى، ربما لا تقع التكرارات الكبرى بالضبط عند مركز المدى وأن التوزيع ربما يتضائل أكثر في أحد الأتجاهات عن الأتجاه الآخر، في هذه الحالة فإننا نقول أن التوزيع ذو القمة الوحيدة ملتوي **Skewed**. فإذا كان التضاؤل في التكرارات أكثر من ناحية اليمين، فإننا نقول أن التوزيع ملتوي إلى اليمين **Skewed to the right** (أو موجب الالتواء). وإذا كان التضاؤل في التكرارات أكثر ناحية اليسار، فإننا نقول أن التوزيع ملتوي إلي اليسار**Skewed to the left** (أو سالب الألتواء). إلتواء التوزيعات ذات القمة الوحيدة يحدث غالبا عندما تكون البيانات محاطه ببعض القيود في إتجاه واحد دون الإتجاه الآخر. مثلا، الرواتب مقيده بنهاية صغرى وهي الصفر ولكن لا يوجد لها حد أعلى. في الواقع، توزيعات الرواتب داخل أي منظمة غالبا ما يكون ملتوي ناحية اليمين، بينما توزيعات الدرجات في إختبار سهل جدا ربما تكون ملتويه إلى اليسار لأنها تتراكم بالقرب من النهاية العظمى 100. الأشكال (b) و(c) (٢-١٠) توضح توزيعات ملتوية إلى اليمين وإلى اليسار على التوالي. لاحظ أنه للتبسيط، استخدمنا منحنيات ممهدة في شكل (٢-١٠) بدلا من المدرج التكراري.



شكل (٢-١٠): ثلاث توزيعات ذات قمة وحيدة: متماثله، ملتويه لليمين، ملتويه لليسار

في بعض الأحيان تكون البيانات موزعة بطرق أخرى غير التي عرضت هنا. فهناك توزيعات ليس لها قمة وتوزيعات لها أكثر من قمة واحدة. بالإضافة إلي ذلك، هناك توزيعات ملتوية ليس لها شكل الربوه. لكن الأشكال التي عرضت هنا هي الأكثر شيوعاً وهي كافية لوصف معظم التوزيعات التي يمكن أن تقابلنا.

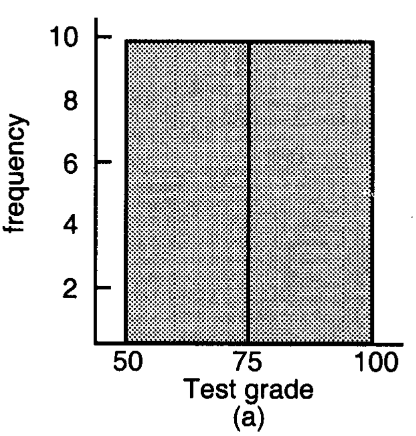
كيف يعد التوزيع التكراري: How to Construct a Frequency Distribution

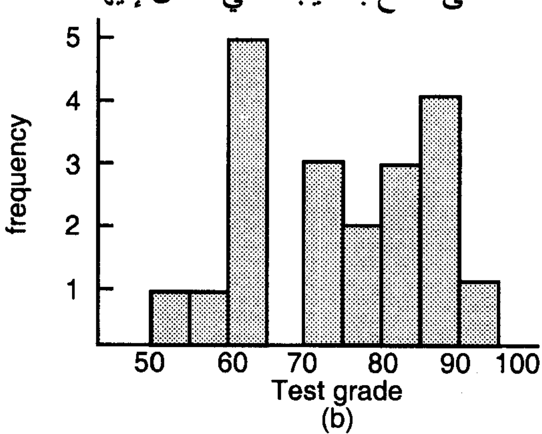
الخطوة الأساسية في تكوين التوزيع التكراري هي تحديد المجموعات أو الفئات. بصفة عامة، إختيار المجموعات يجب أن يحكمه المبادئ التالية:

1- المجموعات المختارة يجب أن تجعل توزيع البيانات واصفاً لها بأمانه ودقة.
2- المجموعات يجب الا تتداخل مع بعضها وبالتالي لا نجد مفردة تنتمي إلى أكثر من مجموعة.
3- المجموعات يجب أن تغطي المدى المحتمل لجميع قيم المفردات وهكذا، فإن قيمة كل مفردة يجب أن تقع في مجموعة معينة.
4- المجموعات يجب أن تكون سهلة في فهمها وتفسيرها عند أول رؤية لها.

من الناحية العملية، يستخدم الحاسب الألي في الكشف عن معظم التوزيعات التكرارية من خلال برامج إحصائية جاهزة. معظم البرامج الأحصائية تستخدم قواعد خفية لتحديد المجموعات، كما أن هناك الكثير من البرامج تزود المستخدم فرصة أو إمكانية لتحديد المجموعات. وعموماً فإنه من المستحسن معرفة كيف يؤدى ذلك، لأن العمليات الخفية في البرامج الإحصائية ربما لا تنوه بطريقة كافيه إلى المبادئ من 1إلى4. إذا كنت تستخدم الحاسب الآلي، فإن المناقشة التالية تعتبر هامة لأنها تساعدك في عمل التعديلات المناسبة.

دعنا نتناول المبدأ الأول. إذا كان التوزيع التكراري يستخدم ليكشف عن توزيع البيانات، يكون من الضروري أن نختار عددا مناسباللمجموعات. فإذا استخدمنا عددا قليلا من المجموعات فإننا نفقد حساسية التوزيع. إذا استخدمنا عددا كبيرا من المجموعات، فإننا نتحصل على بعض المجموعات الخالية أو التي تحتوي على قيمة واحده أو قيمتين من البيانات وهذا يخلق مظهر للتوزيع غير ملائما. هذين الوضعين موضحين بالنسبة للدرجات العشرين في إختبار الإحصاء في شكل(٢-١١). الجزئين (أ) (ب) توضح المدرجات التكرارية عندما تستخدم مجموعتين ثم عشر مجموعات أو فئات على التوالي. كلاهما لا يعطي تلخيصا مقنعا للبيانات. لا يوجد عددا وحيدا يعتبر صحيحا للمجموعات أو الفئات. أفضل إجراء أن نبدأ بتخمين معقول بعدد المجموعات ويعرض التوزيع التكراري، ثم نظل نعدل في هذا العدد حتى نقتنع بالنتيجة التي نصل إليها.





شكل (٢-١١): المدرج التكراري لدرجات اختبار الاحصاء (فئات قليلة، فئات كثيرة)

وكقاعدة عامة، عدد المجموعات أو الفئات يجب أن يكون بين (٥-١٥) فئة. كلما كان عدد البيانات كبيرا، كلما كان مفيدا استخدام عدد أكبر من المجموعات.

كيف يمكن تعريف حدود المجموعات أو الفئات (الحدود العليا والدنيا)؟ من الناحية العملية، عادة ما نحصل على مجموعات ذات اتساعات متساوية والإتساع المناسب (طول الفئة) يمكن تحديده بقسمة المدى للبيانات على عدد المجموعات. أول مجموعة تبدأ بأقرب قيمة لأصغر مشاهدة. إتساع أو عرض المجموعة يحدد طول الفترة بين المجموعات المتتالية. هذه العملية تستمر حتى تتحدد جميع المجموعات.

الهدف من التلخيص هو جعله سهلا للمستخدم ليفهم بسرعة الملامح الأساسية لمجموعة البيانات (المبدأ الرابع)، لذلك فمن المهم تعريف حدود المجموعات بطريقة طبيعية كلما أمكن ذلك. لتحقيق ذلك يكون من الضروري تعديل الحدود الناتجة عن إستخدام الحاسب الآلي. في مثال درجات إختبار الإحصاء أعتدنا أن نأخذ 10نقاط كتدريج للقياس، لذلك فالمجموعات 59-50, 69-60, 79-70, 89-80, 99-90، تبدو طبيعية أكثر عن تلك التي يمكن تحديدها بواسطة الحاسب الآلي. مثل هذه التعديلات يمكن أن تحدث تغيرا طفيفا في عدد المجموعات ويكون نتيجة ذلك أن يصبح التوزيع أقل إقناعا لتمثيل البيانات وبالتالي يجب أن تعتمد على تقديرك الشخصي بعمل مقابله أو موازنه بين سهولة التفسير من قبل المستخدم وبين الشكل الجيد التوزيع.

استخدام الحاسب الآلي: Using The Computer

استخدام الحاسب الآلي يساعد كثيرا في تحليل البيانات. في هذا الفصل نوضح تحليلات الحاسب الآلي باستخدام برنامج Minitab لدراسة بيانات التأمين في مثال(١-١) بالفصل الأول.

مثال (٢-٢)

لقد كان مهما بالنسبة لمدير التأمين في مثال(١-١) ان يفهم إلى أي مدى ترتبط وثيقة التأمين على العملاء بكل من الجنس، نوع الوثيقة، الدخل. تذكر أن الرجال يبدو أنهم يفضلوا التأمين المؤقت أكثر من النساء، الرجال يميلوا لسحب وثائق أكثر عن النساء كما أن قيمة وثيقة التأمين يبدو أنها تعتمد على الدخل. دعنا نرى ما إذا كانت هذه النتائج المبدئية متحققة إذا امعنا النظر بدقة. الآن نستخدم برنامج Minitab لعرض الشكل النقطي، شكل الجذع والورقة والمدرج التكراري وذلك لكل من قيمة الوثيقة والدخل لبيانات تلك العينه من العملاء.

برنامج Minitab الذي يعرض شكل الجذع والورقة لكل من قيمة الوثيقة والدخل لعدد51 وثيقة موضح في شكل(٢-١٢). كلا الشكلين يكشفا ان توزيعهما ملتوي إلى اليمين. ويلاحظ أن هناك مفردة واحدة متطرفه في كل من قيمة الوثيقة والدخل. في الواقع فهناك عميل واحد (رجل وله تأمين مؤقت) له دخل سنوي $126,000 وقيمة الوثيقة $1,000,000 وهو يبتعد كثيرا عن باقي العملاء الاخرين في العينة. يلاحظ أيضا انه عندما يكون مدى البيانات كبيرا إلى حد ما، فإن برنامج ميني تاب يسقط رقم الآحاد وقد تم ذلك فعلا بالنسبة لقيم وثائق التأمين وبالتالي فإن أقل قيمة 15(ألف) قد مثل بالجذع صفر والورقة1 أما الـ5 فقد اسقطت. ويلاحظ عند قمه الشكل العباره"وحده الورقة=10". وحدة الورقة تخبرنا أين نضع النقطة أو الفصلة العشرية. فمثلا الـ10في هذا المثال تعني تحريك الفصله العشرية وحدة واحدة إلى يمين قيمة الورقة (أي ادخال صفر واحد قبل الفصله العشرية). إذا كانت وحده الورقة واحد، فإن النقطة العشرية يجب ان توضع بعد قيمة الورقة، فإذا كانت 0.1 فإن النقطة

العشرية يجب أن توضع بعد وحده واحدة على يسار قيمة الورقة. وعلى ذلك عند الجذع صفر في هذا المثال، فإن البيانات تكون مناظرة لكل من 10(ألاف)، 20 (ألف) وهكذا حتى 80 (ألف) ومثلما يحدث في أغلب مخرجات الحاسب الآلي، يعطي برنامج ميني تاب معلومات إضافية. فالعمود الذي على يسار شكل الجذع والورقة، يدل على التكرارت التجميعية لكل جذع بدأ من الجذوع المتطرفة وحتى المركز. الجذع المركزي موضح بين قوسين وهو الجذع الذي يحتوي على الوسيط وبالتالي فهناك قيم 15وثيقة عند أول جذع وهناك قيم 15 وثيقة عند الجذع الذي يحتوي على الوسيط. وبالقراءة من عند نهاية الشكل نجد أن هناك وثيقة واحدة عند الجذع10، وهناك 3 قيم لكل الجذوع من 5 أو أكثر، 4 قيم للجذوع 4 أو أكثر وهكذا.

ربما يفضل تكوين المدرج التكراري عن شكل الجذع والورقة. والمدرجات التكرارية ببرنامج ميني تاب لكل من قيم الوثائق والدخول موضحة في شكل (٢-١٣). بالطبع فإن المدرجات التكرارية تكشف عن نفس الشكل الذي رأيناه في شكل الجذع والورقة.

أيضا كان من المهم بالنسبة للمدير أن يقارن العملاء الذكور مع الأناث. دعنا نقارن توزيعات قيم الوثائق والدخول للذكور مقابل الإناث. حيث أن هناك 21إمرأة في العينة، فإننا نفضل استخدام الشكل النقطي عن شكل الجذع والورقة أو عن المدرج التكراري. الأشكال النقطية موضحة في شكل (٢-١٤) حيث "صفر" يرمز قيمة الوثيقة للذكور، (1)يرمز قيمة الوثيقة للنساء. الأشكال النقطية لقيم الوثائق تشير إلى أن قيمة الوثيقة للنساء يميل إلى أن يكون أقل من الذكور إلى حد ما، على الرغم من أن الوثائق لكليهما (ذكور وإناث) لهما نفس المدى (ما عدا وثيقة واحدة متطرفة جدا)، في الوقت نفسه الأشكال النقطية للدخول تشير إلى أن دخول النساء تميل إلى أن تكون أقل من دخول الرجال، وهذا يرفع من إمكانية القول بأن السبب الوحيد للفروق بين قيم الوثائق لكل من الذكور والإناث ربما يرجع إلى الفروق بين دخول كل منهما، وبالمناسبة فإنه من المهم مقارنه الشكل(٢-١٤) (قيمة الوثيقة حسب الجنس) مع الشكل(١-٢). يلاحظ انه في حالة وجود العديد من القيم المتناظرة، فإنه الشكل النقطي لن يحجب وجود أو ظهور القيم المتعددة.

وسوف نستمر مع التحليلات الإضافية التي تظهر مع مخرجات الحاسب الآلي عن بيانات التأمين عند نهاية الفصل (٢-٦).

شكل (٢-١٢)

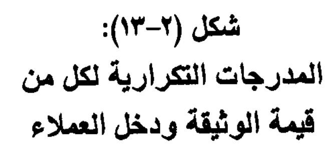
شكل الجذع والورقة لكل من قيمة وثيقة التأمين ودخول العملاء

```
Stem-and-leaf of amount     N  = 51
Leaf Unit = 10

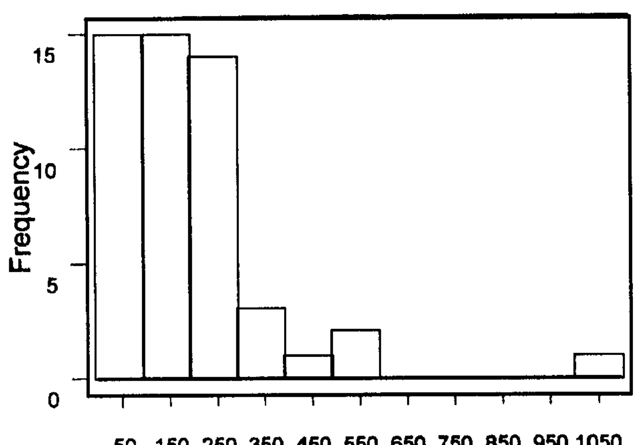
   15     0 122455555555778
  (15)    1 000000000000225
   21     2 00555555555555
    7     3 002
    4     4 0
    3     5 00
    1     6
    1     7
    1     8
    1     9
    1    10 0
```

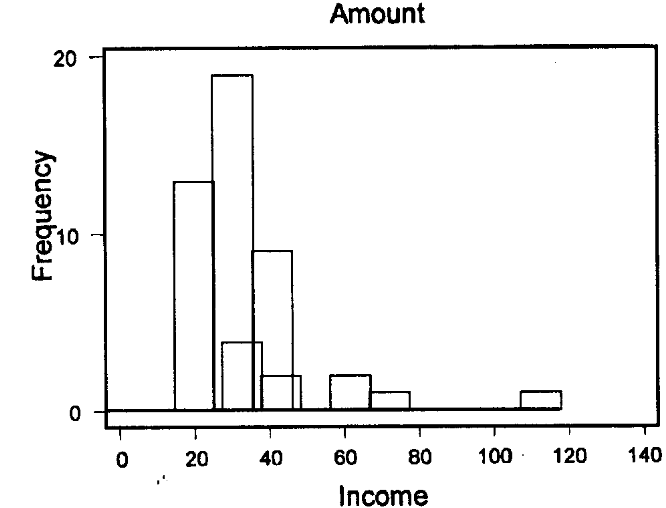
```
Stem-and-leaf of income     N  = 51
Leaf Unit = 1.0

    5     1 77889
   23     2 001122336667779999
  (11)    3 00011123467
   17     4 001223468
    8     5 247
    5     6 2
    4     7 68
    2     8 5
    1     9
    1    10
    1    11
    1    12 6
```

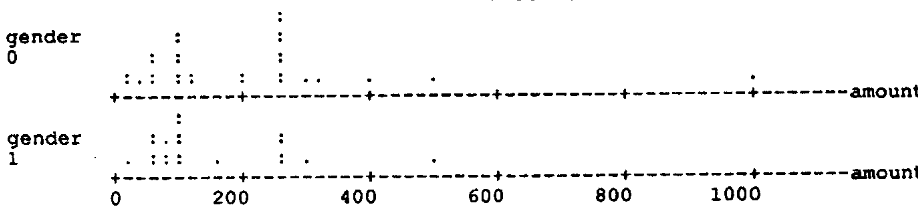


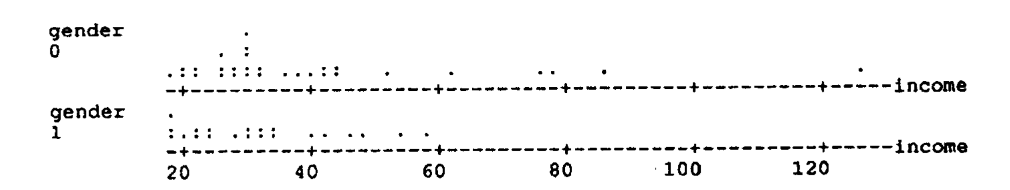
شكل (٢-١٣):
المدرجات التكرارية لكل من قيمة الوثيقة ودخل العملاء





شكل (٢-١٤):
الأشكال النقطية لكل من قيمة الوثيقة، والدخل للرجال والنساء





تمارين:

(٢-٥) لماذا يكون من الضروري تلخيص البيانات؟

(٢-٦) وضح الطرق المتاحة لتلخيص البيانات؟

(٢-٧) عند تكوين المدرجات التكرارية، وضح لماذا يكون من غير المستحسن ان يقل عدد المجموعات عن خمس.

(٢-٨) عرف وصف ثلاث اشكال شائعة للتوزيعات وحيدة القمة.

(٢-٩) في الحالات التالية، حدد الشكل المناسب من الأشكال الشائعة للتوزيعات وحيدة القمة وبرر إختيارك.

(أ) عدد السيارات المباعة في أسبوع ما من تاجر التجزئة في ظل ظروف اقتصادية مستقرة.

(ب) طول الزمن قبل أن تطلب أول خدمة من خدمات شركة اليكترونيات.

(جـ) العمر عند أول زواج للرجال.

(٢-١٠) بالرجوع إلى بيانات التمرين(١-٣٠) في الفصل الأول والمتعلقة بالكالوري الممتص.

1,295	1,720	1,215	1.210	1,260
1,075	1,100	1,200	1,435	1,255
1,300	1,385	1,515	1,105	1,270
1,200	1,215	1,225	.995	1,270
1,350	1,285	1,110	1,430	1,180
1,385	1,300	1,175	1,475	1,225

(أ) كون شكل الجذع والورقة.

(ب) استخدم شكل الجذع والورقة لوصف الإختلاف في تلك البيانات.

(جـ) استخدم الجذع والورقة لتكوين جدول تكراري وجدول تكراري نسبي لتلك البيانات.

(د) كون المدرج التكراري.

(هـ) صف شكل المدرج التكراري في (د).

(٢-١١) نشرت جريده وول ستريت نسب التغير في الأرباح في الفترة من الربع الثاني من 1987إلى الربع الثاني من 1988 وذلك في عده صناعات. البيانات التاليه تمثل نسب التغير في الأرباح لعدد 15من شركات الأدوية. كون شكل الجذع والورقة لتصف توزيع نسب التغير في الأرباح لتلك الشركات خلال تلك الفترة.

19	10	18	20	20	38	35	21
34	22	20	18	12	13	17	

(٢-١٢) البيانات التالية تمثل أسعار الأقفال اليومية لأسهم شركة جنرال موتورز لأربع فترات أسبوعية من 88-14-3 إلى 88-8-4. مع العلم بأن البورصة اغلقت يوم الجمعة 88-1-4 وبالتالي فهناك 19 قيمة كمايلي:

71.750	71.750	73.750	73.500	72.000
72.000	72.250	72.375	71.000	69.250
69.500	70.875	70.625	71.375	Closed
70.375	70.625	74.000	74.125	75.250

(أ) ارسم الخريطة النقطية لهذه البيانات.

(ب) علق على تشتت واستقرار هذه البيانات.

(٢-١٣) البيانات التالية تمثل أعلى درجات الحرارة اليومية التي سجلت في كل من ريتشموند وفرجينيا خلال شهر ابريل 1987 (البيانات مرتبة من الأصغر إلى الأكبر) .

52 57 57 58 58 58 65 65 66 68 69 70 71 71 73
74 75 76 78 79 80 81 81 81 82 83 85 85 85 89

(أ) ارسم خريطة الجذع والورقة لهذه البيانات.

(ب) ارسم المدرج التكراري لهذه البيانات.

(جـ) صف توزيع درجات الحرارة لشهر ابريل1987.

(٢-١٤) بالرجوع إلى تمرين (٢-١٣):

(أ) ارسم الخريطة النقطية لهذه البيانات.

(ب) صف توزيع درجات الحرارة لشهر ابريل 1987 مستخدما الخريطة النقطية.

(جـ) البيانات السابقة مرتبه من الأصغر إلى الأكبر. هل تعتقد أن هذا الترتيب أدى إلى إغفال بعض المعلومات المفيدة عن درجات الحرارة في شهر ابريل ؟ اشرح ؟

(٢-١٥) فيما يلي أعلى درجات حرارة يومية مسجلة في شهر يناير 1987 في كل من ريتشموند وفرجينيا وهذه البيانات متتالية من أول يناير وحتى 31 يناير كما يلي:

38 46 47 45 42 49 62 47 46 40 46 53 53 69 62 49
42 36 40 45 41 34 31 37 31 26 27 35 41 53 45 -

(أ) ارسم خريطة نقطية انتشارية لهذه البيانات.

(ب) ارسم المدرج التكراري لهذه البيانات.

(جـ) صف توزيع درجات الحرارة في شهر يناير 1987.

(د) هل تعتقد أن هذه البيانات تعبر عن نظام ثابت لدرجات الحرارة ؟ اشرح ؟

(هـ) بالرجوع إلى تمرين(٢-١٣). قارن بين المدرجات التكرارية لدرجات الحرارة في شهرى يناير وابريل 1987.

(٢-١٦) سجل محلل العمليات البنكية في أحد البنوك عدداً من العمليات التحويلية اليومية (ايداعات ومسحوبات) خلال 11 فترة إسبوعية وكانت البيانات كما يلي (من الأثنين وحتى الجمعة من كل أسبوع).

64	96	75	105	169
67	104	74	73	202
70	116	89	112	230
68	95	121	83	168
55	109	99	94	157
52	102	72	82	123
68	90	105	78	179

64	89	105	89	219
71	87	116	82	132
55	78	87	90	119
74	83	73	75	148

(أ) ارسم الخريطة النقطية الانتشارية.

(ب) من العرض البياني السابق، ماذا يمكن أن نستخلص عن العمليات التحويلية في البنك.

(جـ)أي جزء من الخريطة البيانية السابقة كان ذو معني أو فائدة أكبر.

(د) تعرف على مصادر الأختلافات في هذه البيانات بكل الوسائل التي تستطيعها إعتماداً على معلوماتك عن العمليات البنكية.

(هـ) عرف المجتمع الذي يمكن أن تطبق عليه النتائج السابقة.

(و) ما الذي يمكن أن يقترحه المحلل في كل من (أ) ،(ب)، (جـ) عن الاحتياجات اليومية للموظفين.

(٢-١٧) كجزء من الدراسة السابقة، قام محلل العمليات البنكية بتسجيل طول الفترة الزمنية بالدقائق لاتمام عملية التحويل وذلك على عينة عشوائية من 50 عملية تحويل للعملاء في الشهر الأخير وكانت البيانات كما يلي:

2.3	.2	2.9	.4	2.8	2.4	4.4	5.8	2.8	3.3
3.3	9.7	2.5	5.6	9.5	1.8	4.7	.7	6.2	1.2
7.8	.8	.9	.4	1.3	3.1	3.7	7.2	1.6	1.9
2.4	4.6	3.8	1.5	2.7	.4	1.3	1.1	5.5	3.9
4.2	1.2	.5	6.8	5.2	6.3	7.6	1.4	.5	1.4

(أ) ارسم خريطة الجذع والورقة.

(ب) ارسم المدرج التكراري.

(جـ) صف توزيع أزمنة العمليات التحويلية.

(د) عرف المجتمع الذي يمكن أن تطبق عليه النتائج السابقة.

(٢-١٨) فيما يلي قيمة الأقساط السنوية لعدد 40 شركة تأمين على الحياة بوثيقة تأمين مؤقته25,000 دولار للرجال في العمر 35 سنه:

82	85	86	87	87	89	89	90	91	91
92	93	94	95	95	85	95	95	97	98
99	99	100	100	101	101	103	103	103	104
105	105	106	107	107	107	109	110	110	111

(أ) ارسم خريطة الجذع والورقة لهذه البيانات.

(ب) ارسم المدرج التكراري.

(جـ) صف في كلمات توزيع الأقساط السنوية.

(د) عرف المجتمع الذي تنطبق عليه النتائج السابقة.

(٢-١٩) بالرجوع إلى التمرين(١-٣١) الخاص بالطلب اليومي على نوع معين من الكتب في أحد محلات بيع الكتب خلال 30 يوم عمل متتالية، وكان عدد الكتب التي تم بيعها كما يلي:

Week 1:	38	35	76	58	48	59
Week 2:	67	63	33	69	53	51
Week 3:	28	25	36	32	61	57
Week 4:	49	78	48	42	72	52
Week 5:	47	66	58	44	44	56

(أ) ارسم الخريطة النقطية لكل الأسابيع في شكل واحد متخذاً الطلب على المحور الرأسي والأسابيع على المحور الأفقي.

(ب) ارسم المدرج التكراري لأيام العمل الـ 30.

(جـ) صف توزيع الطلب اليومي على الكتب.

(د) اعتماداً علي أجابتك في (أ)، قارن الأختلافات في الطلب اليومي من أسبوع لأسبوع. اشرح مالذي يتضح لك من ذلك.

(٢-٢٠) فيما يلي متوسط المبيعات الشهرية خلال العام الماضيّ (بالألف دولار) والتي تمت من خلال 20 موظف مبيعات بإحدى شركات الكمبيوتر.

40.2	29.3	35.6	88.2	42.9
26.9	28.7	99.8	35.6	37.8
44.2	32.3	55.2	50.6	25.2
31.7	36.8	45.2	25.1	39.7

(أ) ارسم خريطة الجذع والورقة لهذه البيانات.

(ب) ارسم المدرج التكراري.

(جـ) اعتماداً على اجابتك في (أ)،(ب). هل ترى أن اداء بعض رجال البيع يختلف فيما بينهم ؟ برر اجابتك.

(٢-٢١) بالرجوع إلى تمرين (٢-٢٠):

(أ) تعرف على مصادر الأختلاف في تلك البيانات، كما يمكن أن تتخيلها (مع ذكر السبب)، ثم اذكر ما اذا كان السبب خاص أم عام.

(ب) أي هذه الأسباب يستطيع رجال البيع التحكم فيها وأيها لا يمكن التحكم فيها.

(جـ) ما الذي تقترحه في اجابتك عن (أ)، (ب) بخصوص تقييم اداء رجال البيع.

(٢-٢٢) اختيرت 32 بطارية بطريقة عشوائية من عملية انتاجية مستقرة، بغرض اختبار مدى صلاحيتها. البيانات التالية تمثل عمر البطارية بالساعات:

52.5	62.7	58.9	65.7	49.3	62.8	48.3	52.9
58.9	57.3	60.4	59.6	58.1	55.3	54.9	63.4
62.3	64.4	52.7	54.9	48.8	54.6	64.2	57.2
56.8	53.1	58.7	61.6	63.3	51.7	59.5	56.8

(أ) عرف المجتمع الذي يمكن أن تنطبق عليه نتائج هذه البيانات.

(ب) ارسم خريطة الجذع والورقة واستخدمها في وصف توزيع أعمار هذه البطاريات.

(جـ) ارسم المدرج التكراري.

(د) اعتماداً على ما اديته في (أ)، (ب)، صف الإختلافات في أعمار (أو مدد الصلاحية) البطاريات التي أنتجت بهذه العملية المستقرة.

(٢-٢٣) في أحد مصانع انتاج الخرز، وجد أنه من بين 200 خرزه تم انتاجها وجد 24 خرزه معيبة، وقد سجل مدير الإنتاج أسباب هذه العيوب وقد وجد أنها ترجع إلى: قطر الخرزة (BD)، قطر الثقب (HD)، نعومة الخرزة (BS)، نعومة الثقب (HS)، اللون (C)، الشكل (S). وقد وجد أن أنواع العيوب في الـ 24خرزة المعيبة كانت على النحو التالي:

BD	C	C	S	S	BD	C	C	HS	HD	BD	BS
BD	BS	BS	S	S	C	HS	S	S	BD	HS	C

(أ) عرف المجتمع (أو العملية) الذي يمكن أن تنطبق عليه نتائج هذه البيانات.

(ب) اعتماداً على هذه المعلومات، هل تستطيع حساب نسبة الوحدات المعيبة التي سيتم انتاجها اذا ظلت العملية الإنتاجية بدون تغير. إفترض أن العملية الإنتاجية مستقرة تجاه نسب الخرز المعيب.

(جـ) ارسم شكل باريتو.

(د) اعتماداً على شكل باريتو، ما الخطة التي تقترحها لتخفيض عدد الوحدات المعيبة.

(٢-٢٤) شركة تقوم بتقديم الخدمات التعليمية لطلاب المدارس المتوسطة والعليا وقد تم تقسيم عملاء الشركة إلى ثلاث أنواع (A)، (B)، (C). ايرادات المبيعات بالدولار لعينة شملت 143 عميل مقسمين حسب النوع كانت على النحو التالي:

(A):Client Referrals

40	300	100	120	160	140	80	110	160	180	80	710
120	220	100	250	120	20	160	120	1340	160	280	200
560	3940	60	600	140	840	230	160	530	200	140	480
140	120	560	120	38	180	100	220	100	220	1040	-

(B) : Yellow Pages

950	120	75	200	100	620	320	120	140	80	130	830
180	320	90	1220	380	60	70	1600	80	120	160	760
850	420	150	140	20	520	260	100	100	840	480	150
230	220	220									

(C) :Professional Referrals

2200	140	480	480	150	2840	560	530	2470	140	160	320
80	320	180	940	580	900	1730	100	900	360	1560	1050
680	4160	200	165	300	60	1870	390	1920	740	140	60
140	40	540	8320	1020	175	1260	710	720	1540	4680	1460
400	1120	240	360	540	1500	3280	880	1120	-	-	-

(أ)ارسم الشكل النقطي لتوزيع الإيرادات للمجموعات الثلاث.

(ب) ارسم شكل الجذع والورقة لتوزيع الإيرادات للمجموعات الثلاث.

(جـ) اعتمادا على الأشكال البيانية في كل (أ)، (ب) صف وقارن توزيع الايرادات بين المجموعات الثلاث.

(٢-٢٥) مكتب كبير للخدمات القانونية يعمل به بعض المساعدين بجانب أصحاب المكتب، وفيما يلي عدد ساعات العمل لعدد 43 من المساعدين العاملين بهذا المكتب خلال 9 أشهر:

802	1287	1225	1178	1275	767	1424	1328	1223	790	1399	1434
1050	796	1308	1464	1389	1316	1325	1494	1096	1482	1493	1452
1060	1407	1067	934	901	1400	1320	1132	1256	858	1346	885
1084	1065	1211	1379	1340	1098	1407	-	-	-	-	-

(أ) ارسم الشكل النقطي لهذه البيانات.

(ب) ارسم المدرج التكراري.

(جـ) اعتمادا على (أ)، (ب) صف توزيع عدد ساعات العمل السابقة.

(٢-٢٦) اجريت دراسة لتحديد العوامل التي تؤثر في المبيعات اليومية للأيس كريم في قاعة الأستقبال بأحد الفنادق. المبيعات هنا عبارة عن القيمة النقدية التي حصلت من بيع أيس كريم، زبادي، مشروبات، اكراميات وذلك في يوم معين. البيانات التالية تمثل المبيعات اليومية خلال الشهور مارس، يونيو، سبتمبر، ديسمبر من عم ١٩٩١ ، هذه الشهور يعتقد أنها تمثل السنة كلها.

373	761	442	180	242	148	221	436	640	642	254	257
259	220	382	737	610	240	238	342	307	505	739	591
260	262	317	419	335	550	884	793	379	497	407	423
702	815	777	583	494	509	456	587	878	674	480	322
453	477	726	779	795	381	445	465	443	594	869	884
700	668	349	349	449	440	780	700	321	242	385	287
438	749	600	300	311	313	196	452	441	514	290	245
193	301	385	643	583	343	455	190	200	173	193	372
547	528	274	285	168	250	495	635	306	198	368	263
226	296	469	416	331	324	464	544	336	498	380	-

(أ) ارسم المدرج التكراري للمبيعات اليومية.

(ب) اعتمادا على المدرج التكراري في (أ)، صف توزيع المبيعات اليومية.

(جـ) اسرد العوامل المختلفة التي يمكن أن تفسر بعض الأختلافات في المبيعات اليومية.

(٢-٤) مقاييس الموضع: مركز البيانات Measures of Location: The Center of The Data

في الفصل السابق، لخصنا توزيع البيانات بإستخدام الجداول والرسوم البيانية. في كثير من التطبيقات الإحصائية يكون من المرغوب فيه أيضا أن تستخدم الكميات لتلخيص البيانات، وهي كما نعرف تسمى معالم **Parameters** وإحصاءات **Statistics** (إعتمادا على ما إذا كانت البيانات تشكل مجتمع أوعينة على التوالي).

السؤالين الهامين في أغلب إهتمامات الدراسات الإحصائية، متعلقة بقيم البيانات والإختلافات بين البيانات. في هذا الفصل نركز على قيم البيانات أما في الفصل (٢-٥) فيناقش الإختلاف. ومن الأمثلة المتعلقة بقيم البيانات:

* كيف كان أداء الطلاب في الإمتحان؟
* كم عدد الوحدات التي بيعت بواسطة مندوبي المبيعات في أحد الأشهر؟
* هل القضبان التي يتم إنتاجها قوية بدرجة كافية؟

تختلف الإجابة عن كل سؤال حسب نوع البيانات. لكن تلك الأسئلة تتعلق حقيقة بموضع أو بمركز **center** البيانات. وهذا البعد يسميه الإحصائيين بمقاييس الموضع **location** للبيانات. أحيانا يستخدم مصطلح آخر وهو مقاييس النزعة المركزية **central tendency** وتعني أساسا قيمة حولها تميل البيانات الى التمركز. على أية حال فهناك ثلاثة مقاييس أساسية تستخدم لوصف الموضع: الوسط، الوسيط، المنوال. كل واحد منهم مفيد في ظل حالات محددة. في البداية سنعرف كل من هذه المقاييس، ثم نناقش خصائصها، مميزاتها، عيوبها والحالات أو الظروف التي في ظلها تكون مفيدة.

(٢-٤-١) المتوسط الحسابي: The Arithmetic Mean

المتوسط الحسابي **arithmetic mean** (من الآن فصاعد سنشير إليه بالمتوسط**mean**) هو متوسط قيم البيانات، وهو المتوسط المتعارف عليه بيننا. والمتوسط هو أكثر مقاييس الموضع شيوعا في الإستخدام وهو الأسهل عادة في تحديدة. ويمكن إجادة بجمع قيم البيانات وقسمة المجموع على عدد قيم البيانات. مثلا، نتذكر درجات إختبار الإحصاء بالفصول الثلاثة الموضحة في شكل (٢-٢):

Section(1)	66	74	78	78	80	81	85	88	89	97
Section(2)	65	66	68	71	77	78	80	82	88	-
Section(3)	48	61	62	71	75	82	84	91	99	-

يمكن استخدام برنامج ميني تاب Minitab بسهولة (أو آله حاسبة عادية) لتحديد متوسط الدرجات في الفصول الثلاثة وسنجدها على التوالي.

MAEN=81.600
MEAN=75.000
MEAN=74.778

لكي نصف بوضوح الفرق بين العينات والمجتمعات، يستخدم الرمز $\bar{x}$ (تنطق "Xبار") ليمثل متوسط العينة والرمز μ (حرف لاتيني ميو) ليمثل متوسط المجتمع. الصيغ المستخدمة لتحديد قيم $\bar{x}$ و μ معطاه بالمعادلات (2.1)و (2.2) على التوالي يلاحظ في هذه الصيغ- كما ذكرنا في الباب الأول- أن عدد وحدات المجتمع يرمز لها بالرمز N بينما عدد وحدات المعاينة في العينة ويرمز لها بالرمز n وهو يشير إلى حجم العينة Sample size. وتختلف تلك الصيغ في الرموز لكن كلاهما يشير إلى أن مجموع قيم البيانات يتم قسمته على عدد قيم البيانات.

$$\text{Sample mean} \quad : \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \text{متوسط العينة} \quad (2.1)$$

$$\text{Population mean} \quad : \mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad \text{متوسط المجتمع} \quad (2.2)$$

(٢-٤-٢) الوســــــيط: The Median

الوسيط median هو القيمة التي تقسم مجموعة مرتبة من البيانات إلى نصفين، وبالتالي نصف البيانات يكون أقل من أو يساوي الوسيط ونصف أخر يساوي الوسيط أو أكبر منه. لتحديد الوسيط، فإننا يجب أولا ترتيب البيانات (وعادة من الأقل إلى الأكبر).

مثلا لننظر إلى درجات الفصل رقم 2، نجدها مرتبة جاهزة من الأقل إلى الأكبر، ويلاحظ أن الدرجة الوسطى وهي 77 تقسم البيانات إلى جزئين متساويين اربع درجات ادناها واربع درجات اعلاها، لذا فإن 77 هي وسيط الدرجات.

الفصل الثاني: 65 66 68 71 77 78 80 82 88

الوسيط= 77

والآن لاحظ أن درجات الفصل الأول هي أيضا مرتبة من أدنى إلى أعلى، لكن لا توجد درجة وسطى. حيث أن عدد الدرجات زوجي. في مثل هذه الحالة يعرف الوسيط على أنه متوسط أقرب قيمتين من مركز البيانات المرتبة، وعلى ذلك نجد أن الوسيط في الفصل الأول= 80.5

الفصل الأول: 66 74 78 78 80 81 85 88 89 97

الوسيط= 80.50

مرة أخرى يمكن استخدام ميني تاب بسهولة لتحديد الوسيط، فمثلا وسيط الدرجات للفصل الثالث هو: الوسيط = 75.000.

لا يوجد رمز عالمي للوسيط وعموماً فهذا الأمر ليس ضرورياً خلال العرض في هذاالكتاب.

(٢-٤-٣) المنـــــوال: The Mode

المنوال Mode لمجموعة من البيانات هو القيمة التي يتكرر وقوعها أكثر من غيرها. فالمنوال لدرجات اختبار الإحصاء في الفصل الأول هو 78، حيث أن هذه الدرجة هي الأكثر تكراراً. والآن

ننظر إلى درجات الفصل الثاني، هذه الدرجات ليس لها منوال لأن كل درجة تظهر مرة واحدة فقط، أي لا توجد قيم متكررة. في الحقيقة فإننا يمكن أن نقابل بأوضاع نجد فيها قيمتين أو أكثر من البيانات تتكرر أكثر من مرة ولكن بنفس عدد مرات التكرار بالضبط فمثلا: البيانات التالية تمثل عدد الضربات الأساسية في لعبة البيسبول 0-0-0-1-1-2-2-2-2-3 معظم القيم المتكررة هي 0، 2 وكل منها ظهر ثلاث مرات، وعلى ذلك فهذه البيانات لها منوالين. بصفة عامة يعد المنوال أقل مقاييس الموضع فائدة والأسباب نناقشها في الفصل التالي.

(٢-٤-٤) مقارنة خصائص الوسط، الوسيط، المنوال:

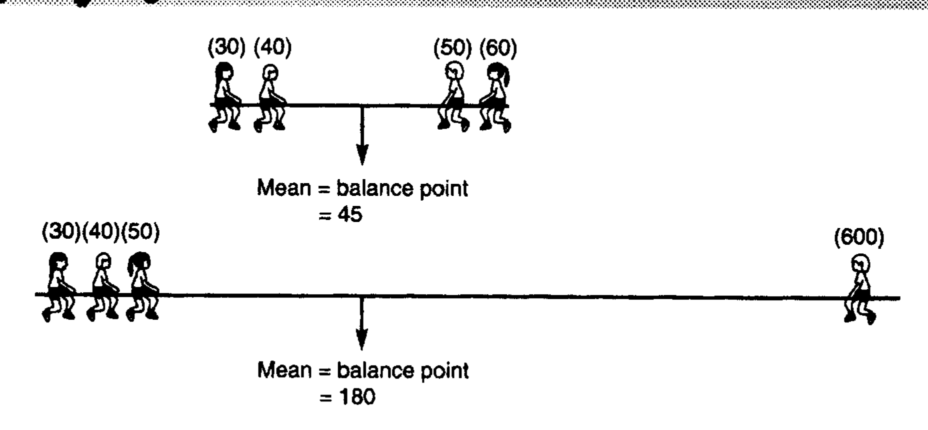
A Comparison of the Properties of the Mean, Median, and Mode

قدمنا ثلاث طرق مختلفة لوصف موضع البيانات: الوسط، الوسيط، المنوال. السؤال الطبيعي: أيهما يستخدم ؟ الاختيار بينهما يعتمد على الحاجة لوضع معين. لتفهم ذلك يجب أولا دراسة خصائص المقاييس الثلاثة، هذه الخصائص تختلف أهميتها أخذا في الأعتبار ثلاث قضايا: (1)الحساسية من وجود قيم شاذة(2) الحساسية من شكل التوزيع. (3) تطور الوضع النظرى للمقياس. بصفة عامة، هذه القضايا تشتمل على الوسط والوسيط، أما المنوال فهو مقياس أكثر خصوصية وسوف يناقش على حده.

أثر القيم الشاذة في البيانات: The effect of Outlier Data Values

دعنا نبدأ بالعنوان، أثر قيم البيانات التي تختلف بشكل مثير عن القيم الأخرى ضمن مجموعة البيانات. مثل هذه القيم من البيانات غالباً ما تسمي بالشاذة **Outliers**. مثلا، معظم الأسر الأمريكية ذات دخل سنوي يقل عن 100,000 دولار. ولكن نسبة قليلة من الأسر لها دخل سنوي يزيد بكثير عن 100,000 دولار. الدخل السنوي لمثل هذه الأسر الغنية في ظل وجود دخول سنوية متشابهه يعد قيمة شاذة. لتفحص أثر القيم الشاذة، سنأخذ مجموعة البيانات المكونه للدخول السنوية الأربعة :, 60,000 30,000 , 40,000 , 50,000 دولار. في هذه البيانات نجد أن كل من الوسط والوسيط هو 45.000 دولار. الآن لاحظ ماذا يحدث عندما يستبدل الدخل 60,000 بالدخل 600,000 دولار (الدخل السنوي لأسرة غنية جدا)، يلاحظ ان الوسيط لم يتغير ومازال 45,000 دولار لأن العددين المتوسطين 40,000، 50,000 لم يتغيرا. هذه خاصية جيدة إذا كان الهدف هو تلخيص مرتبات أسر متشابهة. الوسيط يخدم هذا الغرض بصورة جيدة حتى إذا وجدت قيم شاذه لاتنسجم مع دخول أسر متشابهه. ولكن يلاحظ أن الوسط يرتفع إلى 180,000 دولار لأن تغيير 60,000 إلى 600,000 دولار تنتج عنه زيادة المجموع من 180,000 إلى 720,000 دولار والوسط يتأثر بكل قيم البيانات. يمكن التفكير في الوسط عن انه يماثل مركز الجاذبية أي نقطة التوازن. بهذا المعني فإنه يشبه أرجوحة الأطفال كما هي موضحة في شكل (٢-١٥).

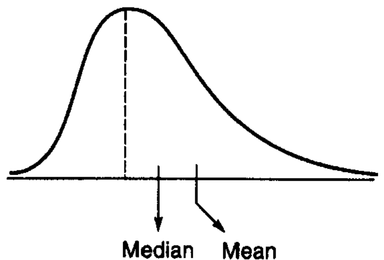
وكما يتضح من شكل (٢-١٥) مدى حساسية الوسط بالنسبة للقيم الشاذة في بيانات العينة. الوسيط غير حساس للقيم الشاذه لأنه يعتمد فقط على مركز أو منتصف المشاهدات. من ناحية اخرى، وحيث ان الوسط يستخدم كل المشاهدات في حسابه، فإنه يتأثر مباشرة بأي تطرف في القيم الشاذه. في الحقيقة كلما كانت مجموعة البيانات ذات عدد قليل من المشاهدات كلما كان تأثير اي قيمة شاذه كبيرا علي المتوسط. وعلى ذلك يقال أن الوسيط يقاوم وجود القيم الشاذه في البيانات أما الوسط فإنه لا يقاوم ذلك.



شكل (٢-١٥) : الوسط كنقطة توازن للبيانات

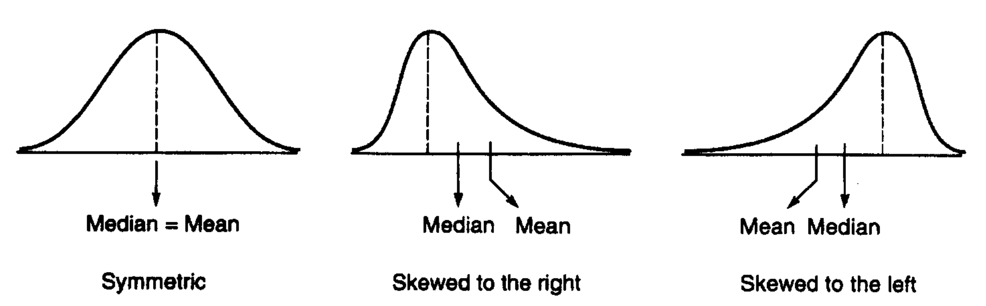
تأثير شكل التوزيع: The Effect of Distribution Shape

نعود الان إلى قضية شكل التوزيع. يأتي تأثير القيم الشاذه ليلعب دوره عندما يكون التوزيع ذو قمة وحيده ملتوية. نفرض ان شكل (٢-١٦) يمثل توزيع الأرباح لمجموعة من موظفي شركة ما. التوزيع ملتوي إلى اليمين لأن أرباح الإدارة العليا كبيرة إلى حد بعيد بالنسبة إلى أرباح اغلب الموظفين. قلة من المرتبات المرتفعة جدا هي في الواقع قيم شاذة. انها تؤثر على الوسط ولكنها لا تؤثر على الوسيط، لذلك إذا رغبنا في مقياس مختصر يمثل المرتبات بالضبط، فإنه يجب تفضيل الوسيط على الوسط.



شكل (٢-١٦): توزيع الأرباح للعاملين: ملتوي لليمين : متوسط أكبر من الوسيط

بصفة عامة، يكون الوسط أكبر من الوسيط للتوزيعات ذات قمة وحيدة وملتوية إلى اليمين، لأن التوزيع يحتوي على قله من القيم الشاذه في هذا الإتجاه. بالمثل يكون الوسط أصغر من الوسيط للتوزيعات ذات قمة وحيده وملتوية إلى اليسار. أما للتوزيعات المتماثله تماما، فإن الوسط والوسيط يكونا نفس الشئ. بصفة عامة، يفضل الوسيط على الوسط كوسيله لقياس الموضع في التوزيعات ذات القمة الوحيده الملتوية، وتأثير شكل التوزيع على الوسط والوسيط موضح في شكل(٢-١٧).



شكل (٢-١٧) : مقارنة بين الوسط والوسيط في ثلاث توزيعات

التطور النظري للمقياس: Status of Theoretical Development

كلما تقدمت في تصفح محتويات هذا الكتاب، ستكتشف ان الإستدلال الاحصائي يهتم بالمتوسط أكثر بكثير من الوسيط، والسبب القوي لهذا ان التطور النظري لعلم الإحصاء شمل الوسط اكثر بكثير من الوسيط، ذلك أن الوسط أسهل في التعامل معه حسابيا. لذلك عند بناء النظريات الإحصائية، نجد أن علماء الاحصاء الرياضي يأخذوا مساراً ذو جهد أقل بالتركيز على الوسط أكثر من الوسيط، وبسبب التقدم التكنولوجي في الحاسب الآلى، فإن الأبحاث المتعلقة بالوسيط أصبحت الان أكثر وفرة، ومع ذلك فهذا العمل هو خارج نطاق هذا الكتاب. مناقشتنا لخصائص الوسط والوسيط ملخصه في الجدول التالي:

مقارنة بين الوسط والوسيط	
الوسط	**الوسيط**
• يتأثر بالقيم الشاذه خاصة في المجموعات الصغيرة من البيانات.	• لا يتأثر بالقيم الشاذه.
• أقل تمثيلا للتوزيعات ذات القمة الوحيدة الملتوية.	• اكثر تمثيلا للتوزيعات ذات القمة الوحيدة الملتوية.
• سهل التعامل معه من الناحية النظرية	• صعب التعامل معه من الناحية النظرية.

خصائص المنوال:

بخلاف الوسط والوسيط، ربما لا يكون للمنوال قيمه وحيده. في بعض المجموعات من البيانات قد لا نجد لها منوال لأن كل قيمه تظهر مرة واحدة وبدون تكرار، وفي بعض المجموعات الآخرى قد نجد بها قيمتين او أكثر تتكرر بكثرة. عموما مجموعات البيانات التي بها اكثر من منوال واحد، يقال عنها انه ليس لها منوال وحيد، لأن آساس وصف القيم المتماثلة مفقود بالفعل. هذا الوضع يكون في حاله مجموعات البيانات كبيرة الحجم ذات قيم متنوعة او مختلفة، وفرصة تكرار هذه القيم ضئيلة. في المقابل، يعد المنوال فعالا لتلخيص مجموعات البيانات التي تحتوي قيم كثيرة متكرره. فمثلا، جدول (٢-٣) يلخص عدد اجهزة الكمبيوتر الشخصي المباعة كل يوم من مكتب مبيعات الشركة في أخر 30 يوم. في هذه البيانات يكون من المفيد ان نشيرإلى أن المنوال هو أحد المبيعات اليومية ليدل على أكثر المبيعات شيوعا.

جدول (٢-٣) : توزيع المبيعات اليومية لأجهزة الحاسب الآلي

عدد الاجهزة المباعة في اليوم	صفر	١	٢	٣	٤
التكرار	٨	١٤	٥	٢	١

المنـــــوال = ١ جهاز كمبيوتر مباع

مفهوم المنوال مفيد أيضا في وصف التوزيع التكراري. لنأخذ توزيع درجات أختبار الإحصاء لعشرين طالب كما في شكل (٢-٦)، أكثر الدرجات شيوعا كانت الـ 80. الفئة ذات اكبر تكرار (أي التي تضم معظم قيم البيانات) تسمى بالفئه المنواليه (model class) ومنتصف الفئة المنوال تعرف على انها المنوال.

تمارين:

(٢-٢٧) ما هو الغرض من مقاييس الموضع.

(٢-٢٨) عرف وفاضل بين المقاييس الأولية الثلاث للموضع.

(٢-٢٩) أي مقاييس الموضع يعتبر أكثر حساسية للقيم الشاذة ؟ أشرح.

(٢-٣٠) أي مقاييس الموضع يناظر النسبة المئوية الـ 50 ؟

(٢-٣١) أي مقاييس الموضع يفضل عادة اذا كان معلوما أن التوزيع له قمة واحدة وملتوي ؟ ولماذا ؟

(٢-٣٢) اعتبر المجموعات الصغيرة التالية من البيانات :

(1) 3,4,5,6,7. (2) 7,8,9,10,11. (3) 1,6,7,8,9. (4) 1,2,3,4,9.

(أ) إحسب الوسط الحسابي والوسيط.

(ب) تأثير وجود أي قيم شاذة في كل مجموعة.

(٢-٣٣) إعتبر المجموعات الصغيرة التالية من البيانات:

(1) 1,2,3,4,5. (2) 1,2,3,4,50. (3) 1,200,220,240,260.

(أ)احسب الوسط الحسابي والوسيط.

(ب) اشرح تأثير وجود أي قيم شاذه في كل مجموعة.

(٢-٣٤) بالرجوع إلى بيانات التمرين (١-٣١) الخاص بالطلب اليومي على نوع معين من الكتب، وكانت البيانات على النحو التالي:

Week 1:	38	35	76	58	48	59
Week 2:	67	63	33	69	53	51
Week 3:	28	25	36	32	61	57
Week 4:	49	78	48	42	72	52
Week 5:	47	66	58	44	44	56

(أ) بالرجوع إلى أشكال المدرجات التكرارية، ماذا تتوقع أن يكون هو الأكبر: الوسيط أم الوسط الحسابي ؟ اشرح.

(ب) احسب الوسيط والوسط الحسابي لتؤكد أو تناقض توقعك في (أ)

(٢-٣٥) شركة خدمات تريد أن تقارن بين متوسط الوقت اللازم لتقديم خدماتها داخل المدينة بواسطة ناقلتين: Saban XL 100, Suny 1000 . البيانات التالية تمثل الوقت المستغرق في تأدية الخدمات لكل سيارة خلال الست أشهر الأخيرة:

الموديل	الوقت بالساعات									
Suny 1000	7.2	3.6	5.5	4.6	3.7	3.1	2.6	7.2	-	-
Saban XL 100	4.4	3.3	5.6	6.1	4.2	3.6	3.4	4.2	5.0	3.0

(أ) عرف المجتمع (أو العملية) الذي يمكن أن تطبق عليه نتائج هذه البيانات.

(ب) احسب الوسط الحسابي والوسيط لكل موديل.

(جـ) ارسم الشكل النقطي على نفس المساحة البيانية لكلا النوعين. اعتمادا على هذا الشكل، هل يتضح لك موديل معين به اختلاف أكبر في الأزمنة؟.

(د) اعتمادا علي نتائجك في (ب)، (جـ)، هل تتوقع إن يكون هناك موديل معين سيكون له أوقات أقل في المستقبل عن موديل آخر؟ أشرح.

(٢-٣٦) أثناء عملية انتاج المصابيح الكهربائية، كثيراً ما تنكسر بعض المصابيح. اقترح مدير الأنتاج نظام جديد لعملية النقل الداخلى، آملا بذلك تخفيض نسبة المصابيح التي تنكسر أثناء النقل كل يوم. لمدة عشرة أيام سجلت المصابيح التي تنكسر بالنظام الحالي، بعد ذلك سجلت المصابيح التي تنكسر وفق النظام الجديد لمدة عشرة أيام أيضا، وذلك بعد مرور عدة ايام كي يتدرب العمال على النظام الجديد، وكانت البيانات كما يلي:

نظام النقل	نسبة المصابيح التي تنكسر يوميا									
قديم	8.7	11.1	4.4	3.7	9.2	6.6	7.8	4.9	6.9	8.3
جديد	10,8	6.2	3.2	4.6	5.3	6.5	4.6	7.1	4.9	7.2

(أ) عرف المجتمع (أو العملية) الذي يمكن أن تطبق عليه نتائج هذه البيانات.

(ب) إحسب الوسط الحسابي والوسيط للنظامين القديم والجديد.

(جـ) ارسم الشكل النقطي للنظامين على مساحة بيانية واحدة. هل يتضح لك نظام معين به إختلافات أكبر في نسبة المصابيح التي تنكسر يوميا.

(د) اعتماداً على النتائج السابقة، هل تعتقد أن النظام الجديد قد خفض نسبة التكسير ؟اشرح.

(٢-٣٧) افترض أن متوسط كمية النقود التي بحوزة 47 طالب هو 12.5 دولار وأن الوسيط هو 9 دولار.

(أ) ما هي الصفات أو الخصائص لتوزيع النقود التي بحوذة الطلاب، والتي يمكن أن تفسر لماذا كان الوسط الحسابي أكبر من الوسيط.

(ب) عرف المجتمع (أو العملية) الذي يمكن أن يطبق عليه نتائج هذ البيانات.

(٢-٣٨) هل صحيح أن نصف سكان مدينتك تقل دخولهم عن الدخل الوسيط ؟ لماذا ؟

(٢-٣٩) بالنسبة للحالات التالية، افترض أن التوزيع المكن استخدامه له قمة وحيدة ومتماثل: هل صحيح أن نصف أطباء مدينتك تقل عن المتوسط ؟ (استخدم أي معيار لأداء ذلك مثل : الدخل، المعرفة الطبية. . الخ)، هل نصف أساتذة الكلية في جامعتك تقل عن المتوسط ؟ هل الطلبة في فصلك تقل عن المتوسط ؟ (مرة أخرى، بالنسبة لفصلك استخدم أي معيار). ماذا توحي اجابتك حول معني تقل عن المتوسط ؟ ناقش ذلك.

(٢-٤٠) أي مقاييس الموضع يمكن أن يأخذ قيمة تختلف عن باقي مفردات عينة البيانات ؟ اعط مثال من عندك لتوضيح اجابتك.

(٢-٤١) أي مقاييس الموضع يمكن أن تأخذ قيمة مساوية لأصغر قيمة بين قيم مفردات عينة من البيانات؟(افترض أن هناك بعض الأختلافات بين مفردات هذه العينة) أعط مثال من عندك لتوضيح اجابتك.

(٢-٤٢) بالرجوع إلى التمرين (٢-٢٤) المتعلق بالخدمات التعليمية، كانت البيانات تمثل عائد المبيعات لعينة من 143 عميل مقسمين حسب النوع:

(أ) حدد الوسط الحسابي والوسيط لحجم المبيعات لكل نوع. هل متوسط عائد المبيعات يبدو مختلفا بأختلاف النوع ؟

(ب) قارن بين الوسط الحسابي والوسيط لحجم المبيعات لكل الأنواع الثلاثة.

(٢-٤٣) بالرجوع إلى التمرين (٢-٢٥) المتعلق بالخدمات القانونية.

(أ) حدد الوسط الحسابي والوسيط لعدد ساعات العمل.

(ب) اشرح نتائجك في (أ) اعتماداً على التوزيع المشاهد في التمرين (٢-٢٥).

(٢-٥) مقاييس الإختلاف Measures of Variation

ناقشنا من قبل في هذا الفصل وفي الفصل الأول، أهمية التعامل بكفاءة مع الإختلاف داخل البيانات، فهناك إختلافات توجد داخل بيانات كل عينة، لأن هناك إختلاف داخل كل مجتمع او عملية. وببساطه الإختلاف هو إنتشار أو تشتت بين قيم بيانات عينه. وعليه فالمهمه الأساسية هي قياس التشتت، تفهمه، التعرف على أسبابه حتي نضع الأساس الذي بموجبه تتخذ الإدارة قراراتها.

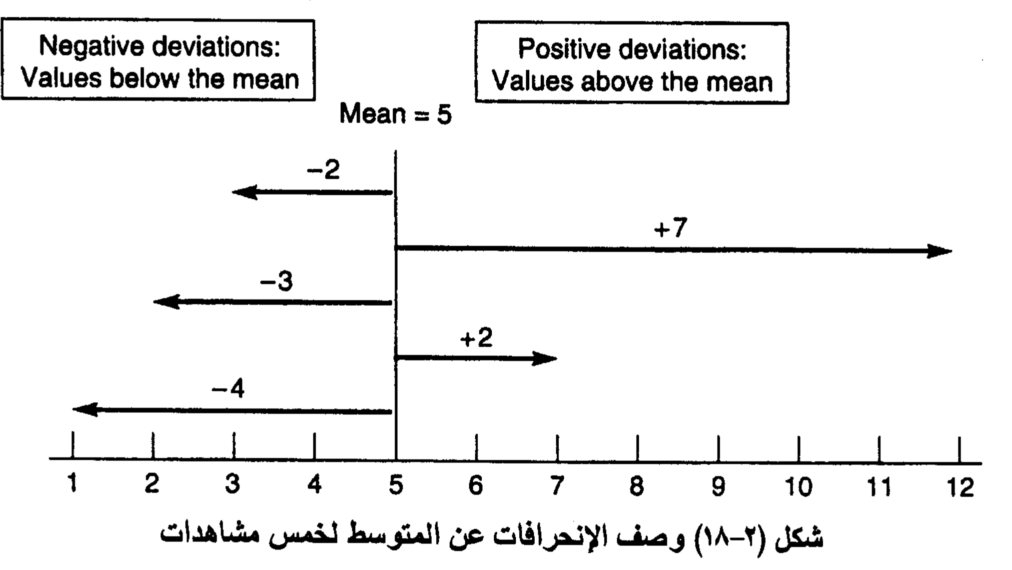
لكي تقييم فكرة الإختلاف، دعنا نعتبر حالة الغياب التام للإختلاف. مثلا لنفرض ان كل طالب في الفصل حصل على نفس الدرجة بالضبط في إختبار الإحصاء، بحصولنا على هذه النتيجة، هل نحن في احتياج إلى شئ لتلخيص البيانات ؟ الإجابة لا، لأن تلخيص البيانات باستخدام التوزيعات ومقاييس الموضع ليس لها هنا اي معني، حيث لا يوجد إختلاف داخل عينة البيانات. وبالتالي لكي نفهم الإختلاف ونتعامل معه بإقتناع، يجب اولا ان نكون قادرين على قياسه. في هذا الفصل، نناقش كثير من المقاييس الهامة والتي تستخدم عادة لهذا الغرض، بصفة خاصة، سنناقش المدى، متوسط الإنحرافات المطلقة، التباين والإنحراف المعياري. وكما سنرى فيما بعد كيف ان المقاييس الثلاث الأخيرة مرتبطه مع بعضها إلى حد بعيد.

(٢-٥-١) المـــدى: The Range

المدى **The range** يعرف على انه الفرق بين اكبر وأصغر قيمة داخل مجموعة البيانات، والميزة الأساسية للمدى سهولة فهمه وحسابه، اما العيب الأساسي فهو اعتماده على قيمتين فقط من مجموعة البيانات، أي حساسيته المطلقه لقيمتين متطرفتين وعدم حساسيته تماماً للقيم الاخرى. مثلا، المدى لمجموعة البيانات 1-2-3-7-12 هو 11 =12-1 والمدى لمجموعة البيانات 1-1-1-12-12 -12 هو ايضا 11، ومع ذلك يلاحظ على المجموعة الثانية انها بصفة عامة ذات تشتت اكبر من المجموعة الاولى. عدم الحساسية هذه تعتبر عائقا امام استخدام المدى لقياس الإختلاف داخل مجموعة كبيرة من البيانات، وقبل ان يصبح الكمبيوتر متاحا على نطاق واسع، كان المدى غالبا ما يستخدم لقياس الإختلاف بسبب بساطته. اليوم قل استخدامه إلى حد ما في اغلب التطبيقات العملية الإحصائية.

(٢-٥-٢) متوسط الإنحرافات المطلقة The Mean Absolute Deviation

الآن نقدم مقياس أكثر حساسية لقياس التشتت، مقياس يستخدم كل البيانات. في هذا المقياس وبالإضافة إلى التباين والإنحراف المعياري، يعرف الاختلاف على أنه درجة إبتعاد قيم بيانات العينة عن المركز.



شكل (٢-١٨) وصف الإنحرافات عن المتوسط لخمس مشاهدات

الفكـرة المبدئية هي تسجيل إنحراف كل قيمة عن المتوسط ثم حساب متوسط تلك الإنحرافات. خذ العينة البسيطة التالية: 12,7, 3 ,2,1 والذي متوسطها هو 5. الإنحرافات عن المتوسط هي: 4−=(1-5) ، 3−=(2−5) ، 2−=(3-5) ، 2+=(7-5) ، (12-5)=7 . هذه الإنحرافات عن المتوسط موضحه في شكل (٢-١٨).

متوسط هذه الإنحرافات هو صفر، لأنه - كما ترى- مجموع هذه الإنحرافات هو الصفر. في الواقع فإن مجموع إنحرافات قيم المفردات عن متوسطها هو دائما الصفر لأى مجموعة بيانات، لأن الإنحرافات الموجبة تعادل تماما الإنحرافات السالبة. يحدث هذا باستمرار لأن المتوسط هو نقطة التوازن في البيانات، أي أنه مركز الجاذبية. وحيث ان متوسط الإنحرافات عن المتوسط هو دائما الصفر، فإنه لا يستخدم كمقياس للإختلاف. للتغلب على هذه المشكلة، فإننا نركز على المسافة بين كل مشاهدة والمتوسط دون أن نأخذ في الأعتبار ما إذا كانت هذه المشاهدة أعلي أو أدني من المتوسط. يلاحظ أن المسافة بين المشاهدة والمتوسط هي دائما عدد موجب سواء أكانت أدنى أو أعلى المتوسط. للحصول على المسافة بعداً عن المتوسط، فإنا ببساطة نهمل إشارة الإنحراف التي حسبناها سابقاً. بمعني أننا نأخذ القيمة المطلقة لكل إنحراف مشاهد بعداً عن المتوسط. وبأخذ متوسط هذه المسافات فإننا نحصل على ما يسمى بمتوسط الإنحرافات المطلقة، لذلك فإن متوسط الإنحرافات المطلقة **Mean Absolute Deviation (MAD)** هو متوسط القيم المطلقة لإنحرافات المشاهدات عن متوسطها.

دعنا نحسب MAD لمجموعة البيانات 12,7,3,2,1 والتي لها المتوسط 5:

$$MAD = \frac{|1-5|+|2-5|+|3-5|+|7-5|+|12-5|}{5} = 3.6$$

بصفة عامة، متوسط الإنحرافات المطلقة للعينة يحدد بالعلاقة التالية (*)

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|}{n} \qquad (2.3)$$

* هذه الصيغة تلائم بيانات العينة، أما الصيغة التي تلائم بيانات المجتمع فنحصل عليها بوضع N بدلا من n وكذلك μ مكان $\overline{X}$

حيث $|X_i - \overline{X}|$ ترمز إلى القيمة المطلقة للفرق بين قيمة X_i والمتوسط لقيم البيانات $\overline{X}$.

متوسط الإنحرافات المطلقة هو طريقة مفيدة لوصف الإختلاف، كما أنه حساس لكل قيم البيانات وسهل في تفسيره. العقبة الرئيسية هي صعوبة بناء نظرية إحصائية لمتوسط الإنحرافات المطلقة لأنه يعتمد على القيم المطلقة، وكنتيجة لذلك فإن متوسط الإنحرافات المطلقة لم يعد مقياساً شائعاً لقياس الإختلاف مثل التباين والإنحراف المعياري والذي يناقش في الفصل التالي.

(٢-٥-٣) التباين والإنحراف المعياري The Variance and Standard Deviation

عند مناقشة متوسط الإنحرافات المطلقة، وجدنا أن متوسط الإنحرافات عن المتوسط هو دائماً الصفر لأي مجموعة بيانات. متوسط الإنحرافات المطلقة يتجنب هذه المشكلة لاهتمامه بالمسافات بعداً عن المتوسط، أي باستخدام القيم المطلقة لحذف الإشارات السالبة. طريقة أخرى لحذف الإشارات السالبة هي تربيعها. بدلا من حساب متوسط المسافة بعداً عن المتوسط(أي متوسط الإنحرافات المطلقة)، يمكننا حساب متوسط مربعات الإنحرافات بعداً عن المتوسط.

التباين: The Variance

سنعتبر البيانات التوضيحية والتي استخدمناها من قبل (12, 7, 3, 2, 1) والتي متوسطها هو 5. سنفترض مؤقتا أن هذه البيانات هي لمجتمع وليس لعينة، (أهمية هذه التفرقة سوف تتضح فيما بعد). أخذاً في الإعتبار أنها مجتمع، فإن متوسط مربعات الإنحرافات بعداً عن المتوسط يسمى تباين **Variance** المجتمع.

التباين لتلك البيانات ينفذ كما يلي:

$$\text{Variance} = \frac{(1-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (12-5)^2}{5} = 16.4$$

للتباين، كمقياس للإختلاف، ميزة على متوسط الإنحرافات المطلقة، فهو يساعد في تسهيل العمليات الحسابية، وكنتيجة لذلك، فإنه يعد أهم مقاييس الاختلاف في عملية تطوير النظرية الإحصائية.

يرمز لتباين المجتمع بـ σ^2 (سجما تربيع) وتحدد بصفة عامة بالصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\chi_i - \mu)^2}{N} \tag{2.4}$$

والأهمية الرئيسية لتباين المجتمع أنه المقياس الأساسي للإختلاف بين مفردات المجتمع، لذلك، فإنه غالباً المؤشر ذو الأهمية الكبرى. ومع ذلك، فإنه في معظم التطبيقات الإحصائية نعتمد على بيانات العينة. وكنتيجة لذلك، فإنه نادراً ما نجد أنفسنا نحسب تباين المجتمع، وبديلا لذلك فإننا نهتم عند إستخدام بيانات العينة بتقدير **estimate** تباين المجتمع.

نفرض أننا نتعامل مع بيانات عينة، هل يمكنك أن تتوقع ما هو شكل صيغة التباين للعينة ؟لتأخذ الآن لحظة لتحاول في ذلك. (ملحوظة: تفحص الصيغة (2.4) وضع التعديلات في الرموز لتعكس تباين العينة بدلا من المجتمع). عندما تشتق نظرياً صيغة تباين العينة، ينتج نظير دقيق لتباين المجتمع وذلك باحلال متوسط العينة $\overline{x}$ محل μ، وحجم العينة n محل حجم المجتمع N في الصيغة(2.4). ومع ذلك فقد تبين أن القسمة على n تسبب ضعفاً في التقدير الناتج لـσ^2 ، بمعنى أنه للعديد من العينات

العشوائية، يكون هذا التقدير في الغالب الأعم أقل من σ^2 عن كونه أكبر من σ^2 . هذه الحالة تسمي بالتحيز **bias** (الفصل الخامس يعطي مناقشة أكثر استفاضة عن التحيز). في العادة التحيز يعد أمراً غير مرغوب فيه، لأن الغرض الأساسي من قياس تباين العينة هو تقدير تباين المجتمع، ومع ذلك فقد تبين أن القسمة على (n-1) بدلا من n يزيل هذا التحيز. لذلك فإن تباين العينة مع القسمة على (n-1) يقال عنه أنه غير متحيز **Unbiased** وهذه الصيغة هي التي نستخدمها خلال هذا الكتاب. وتباين العينة يرمز له بـ S^2 ويحدد بالصيغة التالية:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - \overline{X})^2}{n-1} \qquad (2.5)$$

الانحراف المعياري: The standard Deviation

القيمة العددية لتباين المجتمع أو العينة من الصعب تفسيرها، لأنه معبر عنها بوحدات مربعة. لكي نصل إلى مقياس للتباين أكثر تفسيراً أو وضوحاً ومعبر عنه بوحدات قياس البيانات الأصلية، فإننا نحدد الجذر التربيعي الموجب للتباين والذي يعرف بالإنحراف المعياري **Standard Deviation**. لاحظ أن التباين لا يمكن أن يكون سالب، لأنه متوسط كميات مربعة والإنحراف المعياري بدورة لا يمكن أن يكون سالب، لأنه الجذر التربيعي الموجب للتباين. وعند متابعة هذا الكتاب، سوف ترى أن الإنحراف المعياري هو الأداة الرئيسية التي بها يوصف الاختلاف في معظم الطرق الإحصائية التي تقابلنا.

الإنحراف المعياري في المجتمع يرمز له σ (سجما) والإنحراف المعياري في العينة يرمز له بالرمز S، بمجرد أن يعرف التباين، يتحدد الإنحراف المعياري بسهولة وبساطة، اذ يؤخذ الجذر التربيعي الموجب للتباين وبالتالي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (2.6)$$

$$S = \sqrt{S^2} \qquad (2.7)$$

حساب التباين والإنحراف المعياري للعينة :
Computing the Sample Variance and Standard Deviation

في هذه الأيام عادة ما يتحدد تباين العينة بالحاسب الآلي أو بالآلة الحاسبة. في الواقع، فإن كثير من الآلات الحاسبة رخيصة الثمن تحسب الإنحراف المعياري تلقائياً، وكل ما نحتاجه فقط هو إدخال البيانات. ومع ذلك فتقدير تباين العينة يستحق فحص أكثر ليتحقق فهم أفضل لهذا المقياس. البسط في تباين العينة S^2 (صيغة (2.5)) هو مجموع مربعات الإنحرافات عن متوسط العينة. أنه يسمى بمجموع المربعات الكلي **total sum of squares** ويرمز لها بالرمز *SST وهكذا:

$$SST = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad (2.8)$$

$$S^2 = \frac{SST}{n-1} \qquad (2.9)$$

(*) إذا استخدمت آلة حاسبة ليس بها مفاتيح دوال إحصائية، فإننا نوصيك باستخدام الصيغة التالية لحساب SST بدلا من إستخدام الصيغة (2.8).

$$SST = \sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}$$

هذه الصيغة من الناحية الجبرية تعادل الصيغة (2.8) وهى تساعد في حساب SST بكفاءة أكثر. من ناحية اخرى إذا كانت آلتك الحاسبة تحسب الإنحراف المعياري ذاتياً، فإنه يمكن الحصول على SST بتربيع الإنحراف المعيارى وضرب الناتج في (n-1)

مجموع المربعات الكلي هو كمية هامة لأنها تلعب دوراً في كثير من الطرق الإحصائية التي ستقابلنا فيما بعد، خاصة في تحليل التباين والإنحدار. أنها تقيس الأختلاف الكلي بين قيم مجموعة البيانات (بينما التباين يقيس أساساً متوسط الأختلاف). مثلاً، إذا كانت كل القيم متماثلة تماماً، فإنه لا يوجد إختلاف وأن SST يساوي الصفر. وكلما زادت قيمة SST كلما زاد الإختلاف بين قيم مجموعة البيانات.

دعنا نعمل من خلال مثال آخر لكي نساعدك في تفهم أفضل للصيغ (2.5)(2.8)(2.9) وهذه الصيغ غير معدة لحسابات يدوية، لأن استخدامها في الواقع يعد عملية مجهدة تماما مع أي بيانات بإستثناء بيانات عينه بسيطة. بديلاً لذلك، الصيغة التي في الهامش السفلي (في الصفحة السابقة) مخصصة للحسابات اليدوية، خاصة إذا رغبت في تنفيذ حسابات التباين بنفسك، لأنها سوف توفر وقت كبير جداً. الأن، دعنا نستخدم الصيغ الخاصة بكل من مجموع المربعات الكلي [الصيغة(2.8)]، التباين [المعادلة (2.5)] الانحراف المعياري[معادلة (2.7)] مع درجات إختبار الإحصاء: 88, 82, 80, 78, 77, 71, 68, 66, 65 المعطاه في الجزء (٢-٤-١). تذكر أن متوسط هذه الدرجات التسعة كان: $\overline{x} = 75.$

χ_i	$(\chi_i - \overline{X})$	$(\chi_i - \overline{X})^2$
65	65 - 75 = -10	100
66	66 - 75 = -9	81
68	68 - 75 = -7	49
71	71 - 75 = -4	16
77	77 - 75 = 2	4
78	78 - 75 = 3	9
80	80 - 75 = 5	25
82	82 - 75 = 7	49
88	88 - 75 = 13	189
$\sum \chi_i = 675$	$\sum (\chi_i - \overline{X}) = 0$	$\sum (\chi_i - \overline{X})^2 = 502$

يلاحظ أن مجموع المربعات الكلي(SST) يساوي 502، ومن ثم يكون التباين:

$$S^2 = \frac{502}{9-1} = 62.75$$

والإنحراف المعياري:

$$S = \sqrt{62.75} = 7.9215$$

والآن نوضح مخرجات الكمبيوتر عندما يستخدم لتحديد الإنحراف المعياري للبيانات. تذكر درجات الأختبار للفصول الثلاثة التي وضحناها في شكل (٢-٢) الإنحرافات المعيارية ببرنامج Minitab تم تحديدها على النحو التالي:

ST.DEV.= 8.6564
ST.DEV.= 7.9215
ST.DEV.= 16.0918

ويمكن بسهولة تحديد التباين بتربيع الإنحرافات المعيارية ($S_1^2 = 74.9333$ ، $S_2^2 = 62.7502$ ، $S_3^2 = 258.946$ وحيث أن n=10 في الفصل الأول، n=9 في الفصلين الآخرين، يمكنا أيضا تحديد

مجموع المربعات الكلي لكل فصل بضرب التباين في (n-1) كما تبين ذلك من المعادلة (2.9) ومن الحاشية التي في أسفل الصفحة قبل السابقة. وهكذا $SST_1 = 674.4$, $SST_2 = 502$, $SST_3 = 2071.56$. تلك الكميات تؤكد – كما أتضح من شكل (٢-٢) أن اختلاف الدرجات في الفصل الثالث هو الأكبر بينما الأختلاف في الفصل الثاني هو الأقل.

درجات الحرية Degrees of Freedom

هناك حد إحصائي في مقام تباين العينة وهو (n - 1) . أنه يسمي بدرجات الحرية **degrees of freedom**، لماذا هذا الاسم ؟ سنوضح ذلك بمثال. نفرض أنك طلبت من "محمد" أن يختار ثلاثة أعداد وأنه إختار 2, 4, 16. لنفرض أنك أيضا طلبت من "حازم" أن يختار ثلاثة أعداد بشرط أن يكون متوسطها يساوي5، فكان إختياره على الصورة صفر,5, 10 . لاحظ أن محمد كان حراً تماماً في إختيار أي ثلاثة اعداد، لكن حازم كان حراً فقط في إختيار عددين، لأن العدد الثالث يجب أن يكون العدد الذي يعطي المجموع 15 حتى يكون المتوسط 5. بسبب اشتراط ثبات المتوسط، فإننا نقول أن هناك درجتان فقط من الحرية. والآن، دعنا نعمم ذلك، اذا طلب من شخص ما إختيار n من الأعداد بحيث يكون لها متوسط محدد، فإن درجات الحرية يصبح(n-1)، وأن آخر عدد يختار يجب أن يكون القيمة التي تجعل المتوسط المحدد سلفاً يمكن تحقيقه. حيث أن تباين العينة يعتمد على انحرافات قيم البيانات بعداً عن المتوسط، فإننا نقول أن له(n-1) درجة حرية.

متوسط الانحرافات المطلقة مقابل الانحراف المعياري:
The Mean Absolute Deviation Versus the Standard Deviation

كيف يقارن متوسط الانحرافات المطلقة مع الانحراف المعياري كمقياس للتشتت؟ لآي مجموعة بيانات، نجد أن متوسط الانحرافات المطلقة هو دائما أقل من الإنحراف المعياري، لأنه أقل حساسية لتأثير المشاهدات الشاذه (تذكر ان التربيع مرتبط بتحديد التباين). لذلك عندما تحتوي مجموعة البيانات على عدد قليل من المشاهدات الشاذه، فإن متوسط الإنحرافات المطلقة ربما يعطي مقياسا للتشتت اكثر واقعية عن الذي يعطيه الإنحراف المعياري. ومع ذلك وكما بينا من قبل، فإن الإنحراف المعياري هو عادة الاكثر استخداما في التحليل الإحصائي لأن خصائصه الحسابية جعلته اكثر سهولة ومرونه في تطوير النظريات الأحصائية.

(٢-٥-٤) تفسير واستخدام الإنحراف المعياري:
The Interpretation and Use of the Standard Deviation

بصفة عامة يفضل الإنحراف المعياري على التباين كوسيله لقياس التشتت، لأن وحدات قياسه هي نفس وحدات قياس البيانات. دعنا نركز على كيف يمكن تفسير الإنحراف المعياري كوسيلة لشرح التشتت. نفرض أنك وجدت أن المتوسط والإنحراف المعياري لأرباح مندوبي المبيعات للعام الماضي هي: 45 ألف دولار و 15 ألف على التوالي، هل يمكنك ان توضح للمدير غير الملم بالاحصاء، ماذا تعني هذا النتائج بالنسبة للتفاوت والتباين بين أرباح مندوبي البيع؟ أحد الطرق للاقتراب من الإجابة هو ان نسأل السؤال التالى: ما هي نسبة قيم البيانات التي يتوقع ان تقع داخل وحده انحراف معياري (أو إثنين أو ثلاثه. . .إلخ) بعدا من المتوسط؟ بمعنى، ما هي نسبة مندوبي البيع اللذين يتوقع ان تكون أرباحهم بين 30,000 , 60,000 (حيث 30,000 تساوي المتوسط ناقص وحدة انحراف معياري، 60,000 تساوي المتوسط زائد وحدة انحراف معياري) ؟ إحصائي روسي يسمى

تشيبتشف **Tchebysheff** توصل إلى اكتشاف هام في هذا الشأن. لقد اثبت أنه لأي مجموعة بيانات أن 75%على الأقل من المشاهدات يجب ان تقع داخل إثنين وحدة إنحراف معياري بعيدا عن المتوسط وأن 89% على الأقل من المشاهدات يجب أن تقع داخل ثلاث وحدات إنحراف معياري من المتوسط. بصفة عامة، فقد اثبت انه على الأقل $100\{1-(1/K^2)\}\%$ من المشاهدات يحب ان تقع داخل K من الإنحرافات المعيارية بعدا عن المتوسط. لذلك وتأثيثا على إثباته فإن 75% على الأقل من مندوبي البيع يجب أن تكون أرباحهم بين 15,000 ، 75,000 دولار.

[45,000- 2(15,000)=15,000 and 45,000+2(15,000)=75,000]

أيضا 89%على الأقل من مندوبي البيع تكون أرباحهم بين : $0 ,$90,000 .

الآن نفرض أن البيانات لها توزيع متماثل ذو قمة وحيدة. التوزيع النظري الذي يناسب هذا الوصف يعرف باسم التوزيع الطبيعي **normal distribution**. والذي سيناقش بالتفصيل في الفصل الرابع. في التوزيع الطبيعي نسب قيم البيانات التي تقع داخل مسافة واحد، إثنين، ثلاثه وحدات إنحراف معياري من المتوسط معطاه في الجدول التالي. وقد أظهرت الخبرة أن تلك النسب المشار إليها هي غالبا صحيحة في حالة البيانات كبيرة العدد والتي توزيعها متماثل ذو قمة وحيده أو ذوإلتواء معتدل. وبسبب انها معتمدة على اثباتات تجريبية لكثير من مجموعات البيانات ، فإن هذه الإرشادات تعرف باسم القاعدة التجريبية **empirical rule** هذه القاعدة التجريبية موضحة على التوزيع الطبيعي في شكل (٢-١٩).

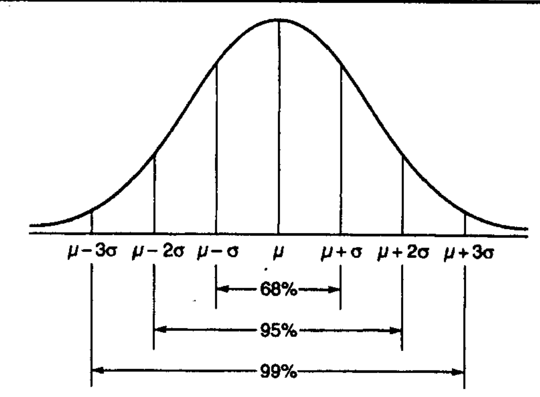
القاعدة التجريبيـــة

في المجموعات الكبيرة إلى حد ما، والتي لها التوزيع الطبيعي نجد أن:

68.26% من قيم البيانات تقع داخل وحدة إنحراف معياري من المتوسط.

95.44% من قيم البيانات تقع داخل وحدتين إنحراف معياري من المتوسط.

99.74% من قيم البيانات تقع داخل ثلاث وحدات إنحراف معياري من المتوسط.



شكل (٢-١٩): خصائص قيم التوزيع الطبيعي داخل ١،٢،٣ إنحراف معياري

ولكن ماذا بشأن مجموعة البيانات ذات الإلتواء الشديد أو التي ليس لها قمة وحيده؟ في مثل هذه الحالات، فإن تلك القاعدة التجريبية تصبح غير دقيقة. النقطه الهامة هنا هي أن تعطي إهتماما لتفسير الإنحراف المعياري، فإذا وجدت أن الإنحراف المعياري أكبر نسبيا من المتوسط، فهذا يمكن أن يكون دليلا على وجود التواء كبير او على وجود قيم شاذة. ومع ذلك فالقاعدة التجريبية هي على الأقل صحيحه تقريبا لعدد كبير من المجموعات.

تمـاريـن:

(٢-٤٤) عرف المقاييس الأولية للأختلاف ؟

(٢-٤٥) لماذا تعتبر قيمة الإنحراف المعياري أسهل في التفسير عن قيمة التباين ؟

(٢-٤٦) أي المقاييس التاليه: متوسط الانحرافات المطلقة (MAD) أو الانحراف المعياري أكثر حساسية للقيم الشاذة ؟ لماذا ؟

(٢-٤٧) ما هي مميزات وعيوب استخدام المدى كمقياس للأختلاف.

(٢-٤٨) أي مقاييس الأختلاف الذي تفضله عادة اذا كان التوزيع له قمة واحدة وملتوي ؟ لماذا ؟

(٢-٤٩) اعتبر مجموعات البيانات التالية:

(1) 48, 49 ,51 ,52. (2) 0, 25 , 75 , 100 .

(أ) أفحص كل مجموعة ثم حدد أيهما أكثر اختلافاً ؟ لماذا ؟

(ب) للتـأكـد من اجـابتك فـي (أ). حـدد: المدى، MAD، التـبـاين والإنحـراف المعيـاري لكل مجموعة. اشرح نتائجك.

(٢-٥٠) اعتبر مجموعات البيانات التالية:

(1) 0,2,4,6,8,10 (2) 0,2,5,8,10 (3) 0,0,0,10,10,10

(أ) أفحص كل مجموعة، ثم حدد ايهما أكثر اختلافاً ؟ ولماذا ؟

(ب) للتـأكـد من إجـابتك فـي (أ)، حـدد : المدى، MAD، التـبـاين والانحـراف المعيـاري لكل مجموعة. اشرح نتائجك.

(٢-٥١) بالرجوع إلى تمارين (٢-١٣) و (٢-١٤) وفيها سجلت أعلى درجات الحرارة اليومية في كل من ريتشموند وفرجينيا في ابريل 1987. كانت البيانات مرة أخرى على الصورة (مرتبه من الأصغر إلى الأكبر):

52	57	57	58	58	65	65	66	68	69	70	71	71	73
74	75	76	78	79	80	81	81	82	83	85	85	85	89

(أ) احسب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لدرجات الحرارة اليومية.

(ب) بالرجوع إلى الجدول التكراري لهذه البيانات (عليك باعداده الآن اذا لم تكن قد اعددته من قبل)، حدد نموذج الفئات، (التوزيع التكراري).

(جـ) إحسب المدى، MAD والإنحراف المعياري. علق على نتائجك.

(د) حدد نسبة القيم التي تقع داخل وحدة انحراف معياري من المتوسط، داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط وأخيراً داخل ثلاث وحدات إنحراف معياري من المتوسط. قارن هذه النسب مع النسب التي تحصل عليها من استخدام مبرهنة تشيبتشف ومن استخدام القاعدة التجريبية.

(٢-٥٢) بالرجوع إلى التمرين (٢-١٧) المتعلق بالزمن اللازم (بالدقائق) لأتمام عمليات التحويل البنكية لعدد 50 عميل بأحد البنوك وكانت البيانات على الصورة:

3.3	2.8	5.8	4.4	2.4	2.4	.4	2,9	.2	2.3
1.2	6.2	.7	4.7	1.8	9.5	5.6	2.5	9.7	3.3
1.9	1.6	7.2	3.7	3.1	1.3	.4	.9	.8	7.8
3.4	5.5	1.1	1.3	.4	2.7	1.5	3.8	4.6	2.4
1.4	.5	1.4	7.6	6.3	5.2	6.8	.5	1.2	4.2

(أ) إحسب الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال. أيهما تعتبره أفضل مؤشر لمقاييس الموضع لهذه البيانات ؟ اشرح.

(ب) إحسب MAD والإنحراف المعياري.

(جـ) حدد نسبة القيم التي تقع داخل وحدة انحراف معياري من المتوسط وداخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط . قارن هذه النسب مع تلك التي تحصل عليها باستخدام مبرهنة تشيبتشف وباستخدام القاعدة التجريبية.

(د) اعتماداً على اجابتك في (جـ) وعلي المدرج التكراري في التمرين(٢-١٧)، هل تعتقد أن القاعدة التجريبية هي الأنسب لهذه البيانات ؟ اشرح ذلك.

(٢-٥٣) في التمرين (٢-٥٢) كان أحد أزمنة التحويل هو 6.3 دقيقة.

(أ) كم عدد الإنحرافات المعيارية تكون أعلى أو أدنى المتوسط بالقيمة 6.3 دقيقة.

(ب) مستخدما مبرهنة تشيبتشف، ما هي نسبة الأزمنه تقريباً يتوقع أن تتعدى 6.3 دقيقة ؟

(جـ) مستخدما القاعدة التجريبية، ما هي نسبة الأزمنة تقريباً يتوقع أن تتعدى 6.3 دقيقة ؟

(٢-٥٤) بالرجوع إلى التمرين (٢-١٨) والمتعلق بالأقساط السنوية للتأمين على الحياة لعدد 40 شركة تأمين، كانت البيانات مرة أخرى كما يلي:

91	91	90	89	89	87	87	86	85	82
98	97	95	95	85	95	95	94	93	92
104	103	103	103	101	101	100	100	99	99
111	110	110	109	107	107	107	106	105	105

(أ) إحسب الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال. أيهما تعتبره أفضل مؤشر لمقاييس الموضع لهذه البيانات؟ اشرح.

(ب) إحسب MAD والإنحراف المعياري.

(جـ) اعتماداً على الوسط الحسابي والإنحراف المعياري، صف حجم الأختلافات التي يمكن توقعها في هذه البيانات.

(د) اعتماداً على إجابتك في (جـ) وعلى المدرج التكراري في التمرين (٢-١٨)، هل تعتقد أن القاعدة التجريبية هي الأنسب هنا؟ اشرح ذلك.

(٢-٥٥) يعتقد مدير الإنتاج في مصنع به آلتين لإنتاج غطاء عبوات بلاستيك، أن الفروق بينهما ربما تتسبب في فروق غير ضرورية في قوة كسر هذه الأغطية (يقاس بالرطل). ثم قياس قوة الكسر لعينة عشوائية من عشرة أغطية سحبت من انتاج كل آله. كلا العينتين سحبتا أثناء عملية انتاج مستقرة وكانت البيانات كما يلي:

الآله A :	.46	.50	.48	.52	.49	.50	.51	.48	.54	.50
الآله B :	.44	.54	.56	.45	.47	.51	.54	.48	.58	.50

(أ) عرف المجتمع (أو العملية) الذي يمكن أن يطبق عليه نتائج تلك البيانات.

(ب) ارسم الشكل النقطي لبيانات الآلتين على نفس المساحة البيانية. هل يتضح لك أن مقاييس الموضع والأختلاف لقوة الإنكسار في الآلتين غير متساويان؟

(جـ) إحسب الوسط الحسابي والوسيط لكل عينة. ما الذي تستنتجه من تلك المقاييس حول الآلتين؟

(د) إحسب المدى والإنحراف المعياري لكل عينة. ما الذي تستنتجه من تلك المقاييس حول الآلتين؟

(هـ) اعتماداً على اجابتك في كل من (ب)، (د). هل تتوقع أن القاعدة التجريبية يمكن تطبيقها على بيانات العينتين؟ اشرح ذلك.

(٢-٥٦) البيانات التالية تمثل حجم المبيعات لعينة عشوائية من 30 فاتورة حديثة أختيرت من كل الفواتير في آخر الشهر من محل كاثي كورنر لملابس الفتيات.

.99	5.00	8.23	11.00	14.99	18.88	21.50	24.50	24.99	28.88
29.98	30.00	31.00	33.73	34.53	34.88	36.00	37.76	39.99	41.64
42.00	44.72	46.26	47.00	48.00	54.44	64.87	73.24	99.98	103.52

(أ) عرف المجتمع (أو العملية) الذي يمكن أن تطبق عليه نتائج هذه البيانات.

(ب) ارسم المدرج التكراري.

(جـ) إحسب الوسط الحسابي، الوسيط، MAD، الانحراف المعياري.

(د) فسر لماذا يكون الوسط الحسابي أكبر من أو أصغر من الوسيط.

(٢-٥٧) للحصول على فكرة حول حجم مراجع كتب مقدمة الإحصاء، قام أحد اساتذة الإحصاء بإختيار عشرة كتب مختلفة من على رف مكتبته، وسجل عدد صفحات كل كتاب مرتبه من أقدم الكتب إلى أحدثها وكانت كما يلي:

321	608	780	786	894	982	1029	1098	1156	1245

(أ) ارسم خريطة التتبع البيانية. ما هي النتيجة التي تحصل عليها.

(ب) حدد الوسط الحسابي، الوسيط، MAD، الانحراف المعياري.

(جـ) إذا طلب منك أن تتنبأ بعدد صفحات أكثر الكتب حداثة عن تلك الكتب، ماذا يكون تنبؤك بالنسبة إلى متوسط هذه الكتب؟ وضح إجابتك.

(٢-٥٨) البيانات التالية تمثل أوقات الإنتظار بالدقائق لأخر 15 مريض في عيادة أحد الأطباء (مرتبة حسب وصول المرضى).

35 23 33 17 31 29 41 15 43 27 25 39 21 19 37

(أ) ارسم خريطة التتبع البيانية. هل يتضح لك أن هناك نظاماً ما لهذه البيانات؟

(ب) إحسب الوسط الحسابي والأنحراف المعياري لأوقات إنتظار المرضى.

(جـ) ما هو تنبؤك لوقت الإنتظار للمريض التالي؟ اشرح ذلك.

(٢-٥٩) البيانات التالية تمثل أوقات الإنتظار بالدقائق لأخر 15 مريض في عيادة أحد أطباء الأسنان (مرتبة حسب وصول المرضى).

45 41 37 39 35 31 29 33 25 27 21 19 23 15 17

(أ) ارسم خريطة التتبع البيانية. هل يتضح لك نظاماً ما لهذه البيانات؟

(ب) إحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأوقات انتظار المرضى.

(جـ) ماهو تنبؤك لوقت الانتظار للمريض التالي؟ اشرح ذلك.

(٢-٦٠) في أي النواحي الأساسية يختلف التمرين (٢-٥٨) عن التمرين (٢-٥٩)، وكيف يؤثر هذا الأختلاف في استخدامك للوسط الحسابي والإنحراف المعياري في عملية التنبؤ؟

(٢-٦) مقاييس الترتيب النسبية: Measures of relative standing

في هذا الفصل، نقدم أساليب عديدة لتوصيف توزيع البيانات، هذه الأساليب تستخدم كبدائل مفيده لدراسة التوزيعات التكرارية، ومفيده أيضا في توضيح ترتيب قيمة معينة بالنسبة إلى مجموعة البيانات كلها. وبالتالي فالكميات التي تناقشها هنا تسمى بمقاييس الترتيب النسبية **relative standing**.

(٢-٦-١) الجزيئيات : Quantiles

هل أديت من قبل إختبار قياس مثل: ACT-SAT-GMAT ؟(أول إختبارين يتعلقا بطلاب المدارس العليا اللذين يخططوا للإلتحاق بالجامعة، أما الاخير يتعلق بخريجي مدارس الإدارة). نفرض إنك أخبرت أن صديقك حصل على 620 درجة في إختبار GMAT، هل هذا يترك فيك إنطباعا طيبا ؟ ماذا لو علمت أن الدرجة 620 كانت اعلى من 92% من الدرجات لكل من أدى هذا الإختبار ؟ ألا يعطيك هذا فكرة جيده عما أداه صديقك في هذا الإختبار ؟ الكميات التي تشير إلى مكان او ترتيب مفرده واحده بالنسبة للمفرادات ككل تسمي جزيئيات **Quantiles**. بصفة عامة، الجزيئية هي عدد يدل إلى أي مدى يقع توزيع الكميات أدنى هذا العدد. ويمكن أن يعبر عن هذه الجزيئيات بصور عديده متنوعة، الاكثر شيوعا منها هو الميئنيات والربيعيات.

الميئنيات: Percentiles

الميئنيات هي أعداد تقسم مجموعة البيانات إلى 100 مجموعة جزئية مرتبة، كل مجموعة لها نفس نسبة قيم البيانات. وهكذا درجة صديقك 620 كانت اعلى من المئين الـ 92 للمجموعة التي أدت إختبار GMAT. تقسيم مجموعة البيانات إلى 100 مجموعة جزئية يتطلب 99 مئين ويمكنك أن تتخيل أن الميئنيات تكون مفيده عندما تحتوي مجموعة البيانات على عدد كبير جدا من قيم البيانات. وفي العادة تستخدم الميئنيات بكثره لتبين الترتيب النسبي لدرجات الأفراد في إختبارات معيارية تعطي لمجموعة كبيره من الأفراد أو انواع أخرى من وحدات المجتمع. المئين الخمسين هو عدد يقع ادناه 50% من البيانات ويقع اعلاه 50%، لذا فالمئين الخمسين في الحقيقة هو الوسيط.

الربيعيات: Quartiles

الربيعيات هي اعداد تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة مجموعات جزئية مرتبه، كل منها تحتوى على نفس النسبة من البيانات. وحيث أن نقط ثلاث تكفي لبناء المجموعات الجزئية الأربعه، فإنه يوجد ثلاث ربيعيات. لنفرض ان سيده عمرها 44 سنه تجري سباق 10 كيلو متر في 51دقيقة (تقريبا 8.2 دقيقة في كل ميل)، هل كان اداء السيده في السباق اداء جيداً ؟ الازمنه بالدقائق لعدد 12 سيده في الاربعينات من عمرهم ممن اشتركوا في هذا السباق هي (مرتبه من الأقل إلى الأكبر) :

72, 69, 61, 60, 59, 55, 54, 51, 49, 47, 44, 42

بتقسيم الأزمنه إلى أربع مجموعات جزئية متساوية، فإننا نحصل على المجموعات الجزئية الموضحة ادناه. كما بينا من قبل، النقط الثلاث التي تقسم المجموعات الأربعه هي الربيعيات: $Q_1= 48$, $Q_2= 54.5$, $Q_3= 60.5$

Group 1		Group 2		Group 3		Group 4
42,44,47	↓	49,51,54	↓	55,59,60	↓	61,69,72
	$Q_1= 48$		$Q_2=54.5$		$Q_3=60.5$	

الآن يمكن ان نفهم بصورة أفضل كيف ادت المتسابقه السباق من بين المتسابقات واللذين هم في فئتها العمريه، كانت هي الخامسة من بين 12 متسابقة، وقد وقعت في المجموعه الثانية من المجموعات الأربعه. لا حظ ان الربيع الثاني هو نفسه الوسيط أو المئين الخمسين.

غالبا ما يستخدم منهج بسيط لتحديد الربيعيات في مجموعة البيانات كما يلي:أولا، قسم البيانات إلى نصفين لتحديد الوسيط وهو الربيع الثاني. بعد ذلك نوجد الوسيط لكل نصف وهما الربيعيات الأول والثالث. في معظم التطبيقات يوجه الإهتمام ناحية المجموعات كبيرة الحجم من البيانات والقيم الدقيقة للربيعيات نحصل عليها باستخدام الحاسب الآلي.

حيث ان الميئنيات تستخدم آساسا لتدل على الترتيب النسبي لقيم مفرده من البيانات، نجد أن الربيعيات أكثر فائدة في تلخيص توزيع البيانات، ونوضح ذلك في المثال التالي الخاص بمكاسب مندوبي المبيع.

مـثـــــال (٢-٣)

سئل محلل التسويق كي يصف مكاسب مندوبي البيع. تقريرة أشتمل على النقاط التالية:

* نصف رجال البيع مكاسبهم أقل من $38,000 والنصف الأخر مكاسبهم أكثر من $38,000.
* النصف الأوسط من رجال البيع مكاسبهم بين $28,000، $54,000. بمعنى 25% تقل مكاسبهم عن $28,000 ، 25% مكاسبهم أكثر من $54,000.
* 5% مكاسبهم أقل من $20,000، 5% مكاسبهم أكثر من $70,000.
* أقل المكاسب كانت $13,000 وأقصى المكاسب كانت $88,000.

هل هذه المعلومات تعطي صورة مفيدة لتوزيع مكاسب البائعين ؟ لاحظ أن المحلل قد سجل ببساطة الربيعات وبعض النسب المئوية وأقل وأكبر مكسب بدون استخدام مصطلحات إحصائية. عرف الكميات الإحصائية التي عرضها تقريره.

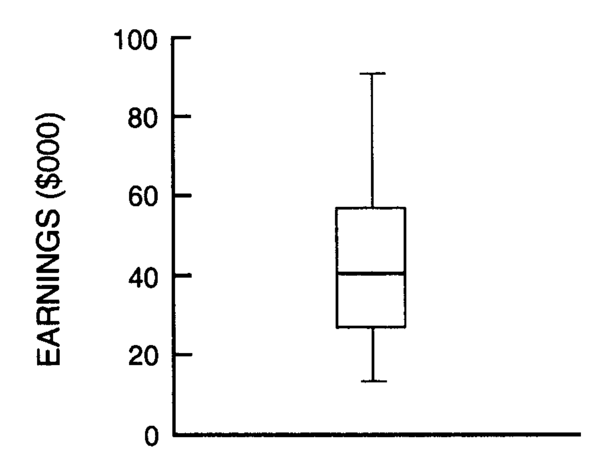
الحل: جاء في تقرير المحلل التسويقي الكميات الإحصائية التالية:

الوسيط(الربيع الثاني)	=$38,000.
الربيع الأول	=$ 28,000.
الربيع الثالث	=$54,000
النسبة المئوية الخامسة	=$20,000
النسبة المئوية الخامسة والتسعون	=$70,000
أقل قيمة	=$13,000
أقصى قيمة	=$ 88,000

(٢-٦-٢) الصندوق البياني: Box Plots

كما ذكرنا من قبل، فإن الربيعيات مفيدة أساساً كمؤشرات عن توزيع مجموعة بيانات مرتبة. في أغلب الأحوال فإن التوزيعات في صورتها البيانية تكون أفضل عن صورتها في جداول رقمية، فالمدرجات التكرارية هي أفضل التعبيرات البيانية للتوزيع التكراري. الصندوق البيانىbox plots يعطي وسيلة فعالة لتوصيل المعلومات عن الربيعيات. أيضاً فهو يتيح لنا أن نستمد معلومات إضافية حول التوزيع.

شكل (٢-٢٠) هو صندوق بياني لمثال مكاسب مندوبي البيع (مثال ٢-٣). الصندوق يصور الـ 50% الوسطى من مكاسب مندوبي البيع وحدودها هي الربيع الأول والثالث. الخط المار خلال مركز الصندوق يصور الوسيط. الخطوط التي تمتد أعلى وأدنى الصندوق تشير إلى المسافة بين الربيع الأول وأصغر القيم والربيع الثالث وأكبر القيم على التوالى. مالذي نستفيده من الصندوق البياني الموضح في شكل (٢-٢٠) والمتعلق بتوزيع المكاسب ؟ لاحظ أن الخط الرأسي العلوي أطول بمسافة كبيرة عن الخط الرأسي الأدنى وهذا يوحي بأن التوزيع موجب الألتواء. معظم مكاسب مندوبي البيع بين $28,000, $54,000 ولكن من هم في الـ 25% العليا يختلفون تماماً عن من هم في الـ 25% الدنيا.



شكل (٢-٢٠) : الصندوق البياني لمكاسب مندوبي البيع

الصندوق البياني يمكن أن يوضح معلومات أكثر وما قدمناه هو صورة مبسطة للصندوق البياني. لماذا يجب استخدام الصندوق البياني بدلا من المدرج التكراري ؟ كلاهما طرق بيانية تصور توزيع البيانات والأختبار هنا يعتمد على التفضيل الشخصي. أحد مميزات الصندوق البياني أنه يدل بوضوح على قيم إحصائية وصفية محدده للتوزيع تسمي الربيعيات.

(٢-٦-٣) قيم Z : Z-Values

نتذكر من مثال المكاسب في البند (٢-٥-٤) أن المتوسط للعام الماضي كان $45,000 والإنحراف المعياري$15,000. نفرض أن أحد مندوبى البيع كسب $85,000. هل هذا الرقم يعد كبيراً بالنسبة إلى مكاسب مندوبي البيع الآخرين ؟ من الواضح أن هذا صحيح. اذا طبقت القاعدة التجريبية، فإن 99% تقريبا من مكاسب مندوبي البيع تقع بين صفر$، $90,000، لذا فإن مكسب رجل البيع هذا يبدو قريبا من قمة مكاسب الـ 1%. هذا المثال يوضح أن قيم الترتيب النسبي للبيانات يمكن تحديدها، بصفة عامة، لو عرفنا عدد الإنحرافات المعيارية التي تقع أعلى أو أدنى المتوسط. عدد الإنحرافات المعيارية لمفرده تقع أعلى أو أدني المتوسط تسمي بقيمة Z، (Z-value). القيمة Z تحدد بطرح المتوسط ($45,000) من مكسب مندوب البيع $85,000 ثم قسمه الفرق على الإنحراف المعياري $15,000 وعلى ذلك فقيمة Z المناظرة لـ $85,000 هي:

$$Z = \frac{85,000 - 45,000}{15,000} = 2.67$$

هذا يعني أن مكسب مندوب البيع يزيد عن المتوسط بـ 2.67 وحدة انحراف معياري. الصيغة العامة لحساب قيمة Z هي:-

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

حيث X قيمة الظاهرة محل الإهتمام، μ هي المتوسط، σ الإنحراف المعياري.

من المهم ملاحظة أن Z محررة من وحدات القياس. وحدة القياس لقيمة Z هي عدد الإنحرافات المعيارية لمشاهدة تقع أعلى أو أدنى المتوسط، بغض النظر ما اذا كانت المشاهدات مقاسة بالساعات، بالبوصات، دولارات، جالونات، قدم مربع، .... الخ. لهذا السبب تصبح قيم Z مفيدة جداً عند مقارنة مشاهدتين ذات قياسات مختلفة مثل درجات SAT, ACT . تحويل قيم البيانات إلى قيم Z المناظرة لها يعرف باسم التحويل المعياري **Standardizing transformation**. مفهوم قيمة Z وضح بصورة مفصلة في الجزء (٣-٩) بالفصل الثالث.

تفسير قيمة Z يعتمد على توزيع البيانات، فإذا كان التوزيع بالصورة التي تمكنا من تطبيق القاعدة التجريبية، فإن تفسير قيمة Z يكون بسيطاً. عندما تكون القيمة المطلقة لـ Z أقل من أو تساوي واحد، فإنه لا يمكن إعتبارها قيمة غير عادية (حوالي 68% من كل قيم البيانات تقع بين +١، −١). ومع ذلك فقيمة Z المطلقة التي تزيد عن 3 هي قيمة غير عادية أو نادرة(أقل من 1% من البيانات لها قيمة Z أكبر من 3 أو أقل من 3-). قيمة Z السالبة تدل ببساطة على أن المشاهدة أقل من المتوسط، وقيمة Z الموجبة تدل على أن المشاهدة أكبر من المتوسط وقد استخدمت قيم Z بكثرة في الفصول التالية.

استخدم الحاسب الآلي: Using the Computer

دعنا نكمل تحليل بيانات التأمين والذي كنا بدأناه في المثال (٢−٢). الأن نركز على الإحصاءات الوصفية لكل من مقاييس الموضع، والتشتت، الربيعيات، الصندوق البياني.

مثال (٢−٤)

الشكل النقطي لمثال (٢−٢) يظهر أنه ربما لا توجد فروق بين متوسط قيمة الوثيقة لكلا الجنسين باستثناء من تسببوا في وجود فروق بسبب دخولهم. جدول (٢−٤) يحتوي على مخرجات برنامج Minitab والذي أعطى الوسط، الوسيط، الإنحراف المعياري، أقصى قيمة، أدني قيمة، الربيع الأول، الربيع الثالث لكل من قيمة الوثيقة والدخل. بعض الإحصاءات الآخرى ظهرت في هذا الجدول (Trmean and Semean) وكلاهما لم تغطي في هذا الكتاب أو لم يتم تناولها بعد. أول مجموعة نواتج تمثل البيانات كاملة، بينما الثانية تعطي نفس المعلومات وفق الجنس. وتوضح المجموعة الثانية أن المتوسط للنساء (الجنس=١) أقل من المتوسط للرجال (الجنس= صفر) لكل من قيمة الوثيقة والدخل. متوسط قيمة الوثيقة للنساء $142,600 مقابل $202,000 للرجال(رأينا هذه النتيجة في الفصل الأول، مثال ١−١) ومتوسط الدخل للنساء $31,810 مقابل $40,340 للرجال. يلاحظ أن الفرق بين وسيطي الدخل لهما قليل جداً ($30,000 للنساء مقابل $30,750 للرجال)، لأن الوسيط لا يتأثر بالدخل الشاذ كما ظهر لأحد الرجال (126,000 $). يلاحظ أيضا أن الرجال يظهر لهم تباين أكثر في كل من قيمة الوثيقه والدخل كما يتضح ذلك من الإنحرافات المعيارية.

جدول(٢−٤) : مخرجات الحاسب الآلى: كميات رقمية تلخص بيانات التأمين
Numerical Quantities for Summarizing the Insurance Data

	N	MEAN	MEDIAM	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
.mount	51	177.5	100.0	155.3	166.1	23.3
income	51	36.83	30.50	34.15	20.20	2.83

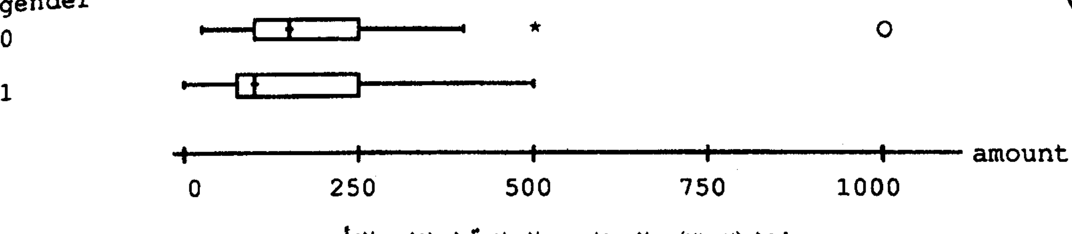
	MIN	MAX	Q1	Q3
.mount	15.0	1000.0	75.0	250.0
income	17.00	126.00	23.00	42.50

	gender	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
.mount	0	30	202.0	162.5	173.5	191.4	36:9
	1	21	142.6	100.0	130.5	116.9	25.5
income	0	30	40.34	30.75	37.01	23.86	4.36
	1	21	31.81	30.00	31.27	12.23	2.67

	gender	MIN	MAX	Q1	Q3
.mount	0	25.0	1000.0	87.5	250.0
	1	15.0	500.0	62.5	250.0
income	0	18.00	126.00	26.00	43.75
	1	17.00	57.00	21.90	41.10

لتسهيل مقارنة التوزيعات إعتماداً على الربيعيات ، فإننا نستخدم برنامج ميني تاب الذي يعطي الصناديق البيانية لقيمة الوثيقة حسب الجنس. هذه الصناديق البيانية موضحة في شكل (٢-٢١). (برنامج ميني تاب يعطي الصناديق البيانية في صورة أفقية بدلا من رأسية).

يلاحظ أن هذه الصناديق والتي توضح المدى لقيمة الوثيقة بين الربيع الأول والثالث ، وأنه لا يوجد اختلاف بينهما تقريباً حسب الجنس. الوسيط والمشار إليه بإشارة + أقل قليلا بالنسبة للنساء. أكبر قيمة وقيمة أخرى كبيرة إلى حدما ثم تميزها بالعلامات (O,*) على التوالي لتدل على إعتبارهما قيم شاذه تختلف بدرجة شديدة. (العلاج الأساسي للقيم الشاذة في الصندوق البياني لم نتعرض له في هذا المرجع).



شكل(٢-٢١) : الصناديق البيانية لبيانات التأمين

يلاحظ أن هناك خط طويل نسبيا على يمين كل صندوق بالمقارنة مع الخط الذي على الجانب الأيسر. هذا يدل على أن التوزيعات ملتوية ناحية اليمين ، كما أشرنا إلى ذلك من قبل في رسومات الجذع والورقة والمدرجات التكرارية. وسوف نكمل التحليل لبيانات التأمين ببرنامج ميني تاب في نهاية الفصل التالي.

تمارين

(٢-٦١) اشرح لماذا تعد مقاييس الترتيب النسبية مفيدة.

(٢-٦٢) افترض أنه بعد تخرجك ، تسلمت أول راتب وكان 29,500 دولار. وأنت تعلم أن هذا الراتب يناظر النسبة المئوية الـ 60 من بدايات الرواتب في مجال عملك. اشرح ماذا يعني ذلك.

(٢-٦٣) بالرجوع إلى التمرين (٢-٦٢) ، افترض أيضا أن متوسط بدايات الرواتب هو 28,500 دولار بانحراف معياري 2000$. حدد قيمة Z وفسر معناها.

(٢-٦٤) افترض أن الـ % 50 الوسطى من المبيعات الشهرية لأجهزة التليفزيون تتراوح بين 80, 120 جهاز. حدد الربيع الأول والثالث وفسر معنى كل منهما.

(٢-٦٥) بالرجوع إلى التمرين (٢-٦٤) ، افترض أن الـ 80% الوسطى من المبيعات الشهرية تتراوح بين 150,50 جهاز. حدد النسبة المئوية الـ 10والـ 90 وفسر معنى كل منهما.

(٢-٦٦) افترض أن تاجر التجزئة في تمرين (٢-٦٤) يبيع في المتوسط 100 جهاز تليفزيون في الشهر بانحراف معياري 20 جهاز. في شهر معين، باع التاجر 75 جهاز. بفرض ثبات الظروف ، أوجد قيمة Z وفسر معناها.

(٢-٦٧) بالرجوع إلى تمرين (٢-١٧)، ارسم الصندوق البياني لتلك البيانات. هل ما وجدته يتفق مع إجابتك في التمرين (٢-١٧) ؟ وضح ذلك.

(٢-٦٨) بالرجوع إلى تمرين (٢-١٨)، ارسم الصندوق البياني لتلك البيانات. هل ما وجدته يتفق مع إجابتك في التمرين (٢-١٨) ؟ وضح ذلك.

(٢-٦٩) بالرجوع إلى تمرين (٢-٢٢)، ارسم الصندوق البياني لتلك البيانات. هل ما وجدته يتفق مع اجابتك في التمرين (٢-٢٢) ؟ وضح ذلك.

(٢-٧٠) بالرجوع إلى تمرين (٢-٥٦)، ارسم الصندوق البياني لتلك البيانات. هل ما وجدته يتفق مع إجابتك في التمرين (٢-٥٦) ؟ وضح ذلك.

(٢-٧١) بالرجوع إلى التمارين (٢-٢٤)و(٢-٤٢)والمتعلقة بالخدمات التعليمية. ارسم الصندوق البياني لكل نوع. هل ما وجدته يتفق مع إجابتك في تمرين(٢-٢٤) ؟ وضح ذلك.

(٢-٧٢) بالرجوع إلى التمارين (٢-٢٥) و(٢-٤٣) والمتعلقة بساعات العمل في مكتب الخدمات القانونية. ارسم الصندوق البياني لتوزيع ساعات العمل وقارن ذلك مع ما وجدته في التمرين (٢-٢٥).

(٢-٧٣) بالرجوع إلى تمرين (٢-٢٦) المتعلق بالمبيعات اليومية من الأيس كريم. ارسم الصندوق البياني لتوزيع المبيعات اليومية وقارن ذلك مع ما وجدته في التمرين (٢-٢٦).

(٢-٧) العلاقات بين متغيرين: Relationships Between Two Variables

ناقشنا كثير من الأساليب لوصف بيانات عن متغير واحد، فمثلا ناقشنا الدرجات في إختبار إحصائي، قيمة وثيقة التأمين على الحياة، كميات مخلفات الانتاج. ومع ذلك، فغالبا ما يكون من المهم دراسة العلاقة بين متغيرين، فمثلا ربما نرغب في معرفة ما اذا كانت درجات إختبار الطلبة ترتبط بعدد ساعات الدراسة. مدير التأمين ربما يريد معرفة ما اذا كانت قيمة وثيقة التأمين تتجه إلى الزيادة للعملاء ذوي الدخول المرتفعة. مدير الجامعة ربما يرغب في معرفة ما اذا كان نسب الطلبة من خارج الولاية يختلفون بإختلاف المدارس التي تعدهم للجامعة. التعرف على مثل هذه العلاقات يمكن أن يشارك بقوة في تحسين العمليات الإحصائية.

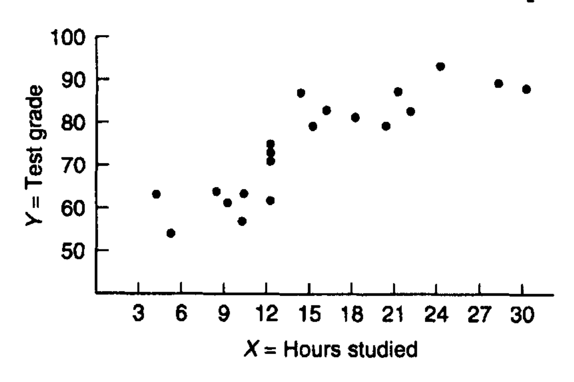
(٢-٧-١) الأشكال الانتشارية: Scatter Diagrams

سنأخذ المثال الذي اشتمل على درجات إختبار 20 طالب. هل درجات الطلاب هذه تبدو أنها تعتمد على عدد الساعات التي استغرقت في دراسة هذه المادة ؟ لنفرض أننا عرفنا المتغير X ليدل على عدد الساعات التي ذاكرها الطالب عند دراسته لمقرر معين. الرمز y يمثل درجة الإختبار والبيانات على النحو التالي:

y (درجة الأختبار) :	54	56	63	64	62	61	63	73	78	72
X (ساعات المذاكرة) :	5	10	4	8	12	9	10	12	15	12
y (درجة الإختبار) :	74	78	83	86	83	81	88	87	89	93
X (ساعات المذاكرة) :	12	20	16	14	22	18	30	21	28	24

خاصية الجودة التي تعتمد على درجة الاستعداد لأداء الأمتحان، هي درجة الأختبار، ومؤشر الأداء المراد فحصه هو عدد ساعات المذاكرة. حيث أن درجة الأختبار تعتمد إلى حد ما على عدد ساعات المذاكرة، فإن درجة الأختبار تسمى بمتغير الأستجابة **Response Variable** . حيث أن عدد

ساعات المذاكرة يمكن أن تستخدم للتنبؤ (إلى حد ما) بدرجة الإختبار، فإنها تسمى متغير تفسيري **Predictor Variable**. لكي نفحص العلاقة بين متغيرين، فإن الشكل الأنتشاري يعد أداة مفيدة جداً، والشكل الإنتشاري **Scatter Diagram** هو رسم بياني لبيانات متغيرين، فيه المحرر الأفقي يمثل المتغير التفسيري والمحور الرأسي يمثل متغير الأستجابة، والشكل الأنتشارى لبيانات الأختبار موضح في الشكل (٢-٢٢) والأن، ماذا يوحى لك هذا الشكل الإنتشاري حول العلاقة بين درجات الإختبار وعدد ساعات المذاكرة؟ فكر في هذا قبل متابعة القراءة.



شكل (٢-٢٢) : الشكل الإنتشاري لدرجات الإختبار مقابل ساعات المذاكرة

نقطتان هامتان يوحي بهما الشكل الإنتشاري:(1) الطلاب اللذين ذاكروا ساعات أكثر يتجهوا إلى الحصول على درجات أعلى. فمثلا قارن الدرجات للذين ذاكروا أقل من10ساعات مع اللذين ذاكروا أكثر من 20 ساعة. (2) عدد ساعات المذاكرة لا تنبأ بدقة تامة درجة إختبار الطالب. الطلاب اللذين ذاكروا تقريبا نفس عدد ساعات المذاكرة يختلفوا إلى حد ما في درجاتهم الإختبارية. لماذا تختلف درجات هؤلاء الطلاب ؟ يجب أن يكون هناك عوامل أخرى تفسر الإختلاف في الدرجات بين الطلاب. هناك سببان محتملان لذلك: استعدادهم أو أهليتهم للتفكير الإحصائي، وجودة المقررات التكميلية التي درسوها مثل مقرر الرياضيات، وأيضا قد يتواجد قدرا من الحظ في ذلك.

الإرتباط الإحصائي كأساس للعمل: Statistical Association as a Basis of Action

هل الشكل الأنتشارى رقم (٢-٢٢) يوحي بتواجد علاقة السبب والنتيجة بين عدد ساعات المذاكرة ودرجة الأختبار؟ اذا زيدت أوقات المذاكرة للطلاب فهل يحصلوا على درجات أفضل في الأختبار ؟ ربما، ولكن الشكل الإنتشاري بمفرده لا يمكن أن يؤكد السبب والنتيجة. تفسير آخر مقبول للعلاقة التي في الشكل الإنتشاري وهو أن هناك بعض العوامل الأخرى تسبب إختلاف درجات الطلاب وتسبب أيضا وفي نفس الوقت، اختلاف ساعات المذاكرة بينهم فمثلا، ربما يكون العامل المسبب الحقيقي هو مستوى النضج(أو النمو العقلي) للطلاب، والدليل، ربما يكون نقص النضج يسبب أن بعض الطلاب يكونوا ذو أداء سئ في الإختبار ويؤدي أيضا بهم إلى مذاكرة أقل. هذا محتمل، فإذا تتبعنا الطلاب ذوى النضج الأقل ليذاكروا أوقات أكثر من أجل الإختبار التالي، فإن درجاتهم لن تتحسن لأنهم غير ناضجين بدرجة كبيرة كي يفهموا المادة العلمية. هذا التفسير لايمكن حسمه على أسس إحصائية. بدلا من ذلك فإننا يجب أن نعتمد على معرفتنا الشخصية كي نكون رأيا. فمثلا خبرتنا مع الطلاب الأقل نضجا ربما تؤدي بنا إلى الأعتقاد بأن هؤلاء الطلاب عندما يزيدوا من أوقات المذاكرة، فمن المؤكد تحسن درجاتهم. إذارغبت في دليل قوي عن تأثير زيادة أوقات المذاكرة، فإنه يمكنك أن

تدير تجربة إحصائية، فيها بعض الطلاب الأقل نضجا قد وافقوا على مضاعفة ساعات المذاكرة. فإذا تحسنت درجاتهم بالمقارنة مع الطلاب الآخرين واللذين ظلوا على ساعات المذاكرة المعتادة، فإنه يكون دليلا إحصائيا مقنعا عن علاقة السببية.

هذا المثال يوضح نقطة هامة تتعلق بادارة العملية الصناعية. الشكل الأنتشاري يساعد في التعرف على متغيرات العملية التي ربما تسبب إختلافات في نواتج العملية الصناعية. هذه المعرفة تتيح لنا تعديل العملية الصناعية بهدف تخفيض حجم تلك الإختلافات. ومع ذلك فتخفيض الإختلافات لن يكون نتيجة، مالم تتواجد علاقة السبب والنتيجة. أفضل طريقة لإقامة دليل مقنع لعلاقة السبب والنتيجة هو أن ننفذ تجربة تصمم بعناية بحيث نغير عمليا في مستوى أحد متغيرات العملية الصناعية مع بقاء المتغيرات الأخرى ثابته. فإذا تغيرت النواتج أيضا، فإن علاقة السبب والنتيجة تصبح متحققة.

مثال (٢-٥)

دعنا نكمل تحليل مثال الطباعة بحبر ذو أساس مائي، مثال (١-٥). خاصية الجودة كانت كمية الفضلات بالرطل التي تظهر في كل 1000 ياردة من المنتج. خريطة ضبط الجودة أوضحت أن العملية الصناعية مستقرة. وقد كان يشك في أن أحد مصادر الإختلافات في مقدار الفضلات هو الأنتاجية والتي قيست بعدد الياردات المطبوعة كل دورة إنتاجية. كل من الإنتاجية والفضلات سجلت لعينة من 23 دورة أستخدمت الحبر ذو الأساس المائي. بيانات العينة على النحو التالي :

الأنتاجية: 20	22	21	23	9	44	48	21	22	19	18	18
الفضلات: 36	31	45	14	38	15	25	46	30	21	28	24
الإنتاجية : 19	38	24	38	21	38	33	33	40	23	18	--
الفضلات : 51	15	51	12	19	10	44	22	17	36	41	--

(أ) ارسم الشكل الإنتشاري.

(ب) فسر الشكل الأنتشاري. صف العلاقة بين مقدار الفضلات المنتجة (بالرطل) كل 1000 ياردة والأنتاجية (بالياردة المطبوعة كل دورة).

(جـ) ماذا يكون تفسيرك حول التعديل المحتمل في العملية الصناعية كي تخفض من مقدار الفضلات ؟

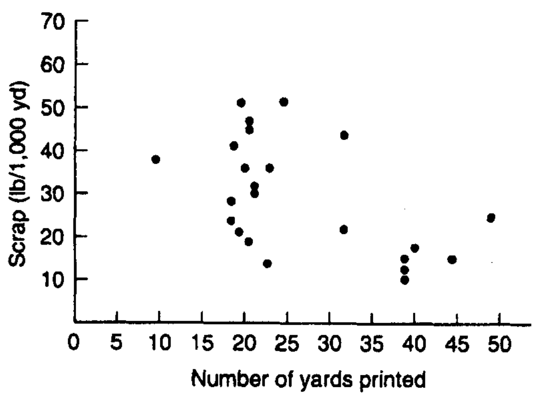
الحـــل:

(أ) الشكل الإنتشاري موضح في شكل (٢-٢٣).

(ب) يوضح الشكل الأنتشاري أن مقدار الفضلات المنتجة كل 1000 ياردة تتجه إلى التناقص كلما زادت الإنتاجية. فمثلا عندما يكون الإنتاج في المدى من (50-35) ياردة، يبدو حجم الفضلات بين (25-10) رطل. ولكن عندما يكون حجم الإنتاج أقل من 35 ياردة، يتراوح حجم الفضلات ما بين 15 وأكثر قليلا من 50 رطل. ومع ذلك، فإنه عند أي مستوى معين من الإنتاجية، يختلف جوهريا مقدار الفضلات وبالتالي فإن العوامل الصناعية الأخرى تساهم في اختلافات أحجام الفضلات.

(جـ) اذا أمكن تخطيط العملية الصناعية بحيث أن دورات الإنتاج تصبح أكثر اتساقا، فإن المستوى

العام للفضلات ربما ينخفض إلى حد ما. هنا نحتاج إلى تجربة لتحديد ما اذا كان ذلك سيحدث فعلا أم لا. تجارب أخرى يجب تنفيذها للتعرف على أسباب أخرى للإختلاف في مقدار الفضلات.



شكل (٢-٢٣): الشكل الإنتشاري لمثال (٢-٥)

(٢-٧-٢) جداول الإقتران : Contingency Tables

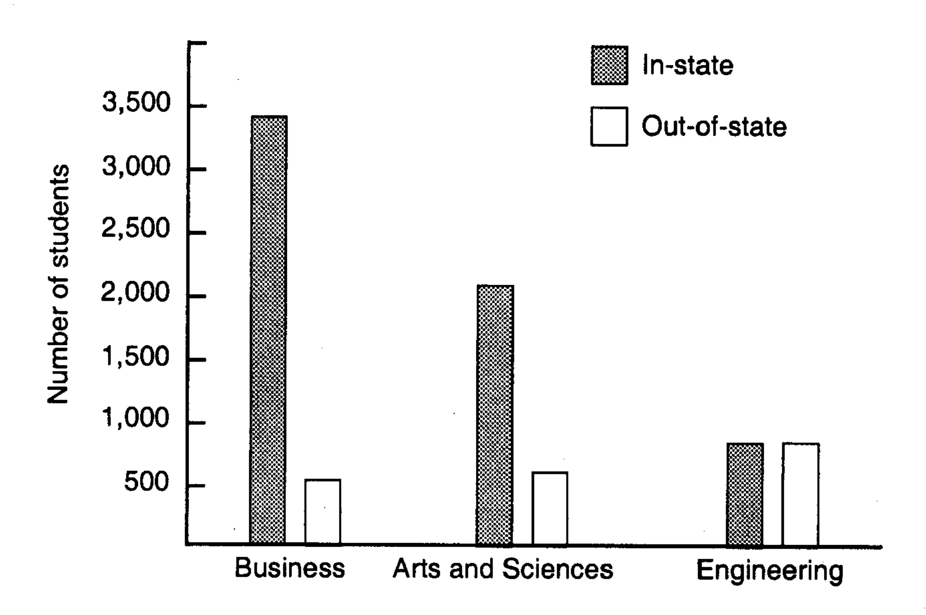
اعتبر مثالا عن إقتصاد ما يعاني من حالة كساد أدى إلى ان إقترحت إحدى الجامعات الخاصة زيادة الرسوم الدراسية للطلاب الوافدين من خارج الولاية، وتوقعت نتيجة لذلك أن ينخفض عدد الطلاب المسجلين بنسبة 25% . ومع ذلك فإن زيادة الرسوم الدراسية سيكون اكثر منفعة من الخسارة الناتجة عن نقص أعداد المسجلين. لتقييم المشروع المقترح، أراد مدير الجامعة معرفة ما إذا كانت نسبة الطلاب الوافدين يختلفون بإختلاف الكليات التي يلتحقون بها. قامت الجامعة بتجميع بيانات عن الطلاب الحالين في ثلاث كليات: الإدارة، الفنون والعلوم، الهندسة. اوضحت البيانات لكل طالب: اسم الكلية، الأصل أو المنشأ أي ما إذا كان الطالب من داخل الولايه أو من خارجها. جداول (٢-٥) يوضح عدد الطلاب من داخل الولايه أو من خارجها وذلك لكل كلية. لاحظ أن صفوف الجدول هي توزيع تكراري لأصل أو منشأ الطلاب أخذا في الإعتبار الكلية لكل طالب، بالمثل الاعمدة هي توزيع تكراري للكليات أخذا في الإعتبار منشأ كل طالب. أحد الاعمدة مخصص للطلبة من داخل الولاية والاخر للطلبه من خارج الولايه. مثل هذا التوزيع التكراري الذي في إتجاهين يسمى جدول إقتران **Contingency table**.

جدول (٢-٥) : عدد الطلاب داخل وخارج الولاية ووفق نوع الكلية

الكلية	أصل الطالب		المجموع
	من داخل الولاية	من خارج الولاية	
الإدارة	3400	600	4000
الفنون والعلوم	2200	600	2800
الهندسة	800	800	1600
المجموع	6400	2000	8400

ماذا تكشف هذه البيانات عن توزيع الطلاب من داخل الولاية ومن خارج الولايه في الكليات الثلاث؟ كما هو معتاد، يساعدنا التحليل البياني في تفسير ذلك. يمكن تصوير جدول الإقتران بيانيا

عن طريق خريطة اعمده بسيطه. شكل (٢-٢٤) يوضح ذلك. هذه الخريطة تكشف عن أن نسبة الطلاب من خارج الولايه في كلية الهندسة كبيرة جدا عن أي كلية اخرى. لو زيدت الرسوم الدراسية للطلاب من خارج الولاية فإنها ستخفض اعداد المسجلين من خارج الولايه وهذا النقص سوف يؤثر بوضوح في كلية الهندسة أكثر مما يؤثر في الكليات الاخرى.



شكل (٢-٢٤) : خريطة الاعمدة لطلاب الجامعة

إستخدام الحاسب الآلي Using The Computer

ننهى هذا الفصل بتحليلات الحاسب الآلي عن بيانات التأمين (نوقشت من قبل في الأمثلة (١-١)، (٢-٢)، (٢-٤)) وذلك بتقديم الأشكال الإنتشارية وجداول عن متغيرين.

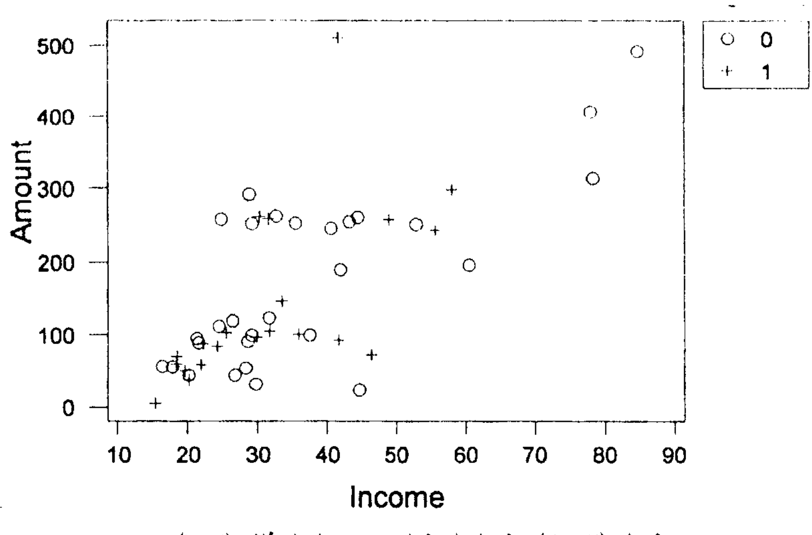
مثال (٢-٦)

في شكل(١-٣) (الفصل الاول، البند ١-٢) رسمنا الشكل الإنتشاري والذي بين العلاقة بين قيمة وثيقة التأمين والدخول السنوية لمجموعة من العملاء. ورأينا بوضوح علاقة موجبة حيث كان العملاء ذوى الدخول المرتفعة يميلوا إلى إمتلاك وثيقة كبيرة القيمة. التحليل السابق في هذا الفصل(الامثله ٢-٢، ٢-٤) أظهر ان قيمة الوثيقة ربما يرتبط بالجنس بسبب إختلافات الدخل بين الرجال والنساء. ولاجراء المذيد من التحليل، ندخل تعديلات طفيفة في الشكل الإنتشاري الخاص بقيمة الوثيقة مقابل الدخل كما وضح في شكل (١-٣).

أولا: تجنب المشاهدات الخاصة بالرجال ذوي الدخول المرتفعة جدا بغرض أن ترى بوضوح الجزء الادنى الأيسر من الشكل.

ثانيا: المشاهدات الخاصة بالرجال أشير إليها بدائرة والمشاهدات الخاصة بالنساء اشير إليها بعلامة الجمع+، الشكل الإنتشاري الناتج عن ذلك موضح في شكل (٢-٢٥). وكما وضحنا من قبل في الشكل النقطي(شكل ٢-١٤) أن معظم الدخول الكبيرة هي للرجال وأنهم يميلوا لامتلاك وثائق كبيرة القيمة ومع ذلك، يلاحظ انه لأي مجموعة عملاء ذوي دخول متساوية تقريبا فإنه يبدو

انه لا توجد فروق منتظمة بين قيم الوثائق للرجال والنساء. الشكل الإنتشاري عن طريق برنامج ميني تاب يدعم الإفتراضات التالية: (1) الدخل هو العامل الأساسي في تحديد قيمة الوثيقة(2) الجنس ليس عاملا عند اي مستوى من الدخل.



شكل (٢-٢٥) :شكل إنتشاري معدل لمثال (٢-٦)

هناك سؤال هام وهو ما إذا كان إختيار نوع الوثيقة (شاملة مقابل مؤقته) يعتمد على الجنس أم لا. كل من "الجنس" و"نوع الوثيقة" متغيرات وصفية لأن كل منهما مميز بصفة أو بلقب. جدول(٢-٦) يبين جدول الاقتران الناتج عن برنامج ميني تاب وهو يلقي الضوء على هذا السؤال. الصفوف توضح الجنس بينما الاعمدة توضح نوع الوثيقة يلاحظ ان تأثير الجنس يبدو متحققا.

في العينة التي بها 30 رجل ، نجد أن منهم 24 يختاروا الوثيقة المؤقته(80%) بينما في العينة التي بها 21 سيده، هناك 11 سيده فقط فضلت الوثيقة المؤقته (52%). هل هذا التفاوت يعكس إختلاف النسب الحقيقية بسبب اختلاف الجنس ؟ يمكن ان نعيد صياغة السؤال بصورة أخرى، هل من الممكن أن تعطي عينتين نسب مختلفه مثل 52%,80% لمجرد انها عشوائية فقط، على فرض ان النسب الحقيقية في المجتمع متساوية ؟ الأسلوب العلمي لمعالجة مثل هذا السؤال قدم في الفصول السابع والرابع عشر.

جدول (٢-٦) : جدول الاقتران لمثال (٢-٦)

ROWS:	gender	COLUMNS:	type
	0	1	ALL
0	6	24	30
1	10	11	21
ALL	16	35	51

تمـاريـــــن:

(٢-٧٤) البيانات التالية تمثل الطاقة الكهربائية المولدة يوميا (بالألف ميجاوات) خلال عشرة أيام متتالية في شهر أغسطس 1990 وكذلك أعلى درجات حرارة مسجلة خلال تلك الفترة (الدرجات فهرنهيت):

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الحرارة	99	99	97	97	97	76	84	81	96	95
الطاقة	153	158	148	138	149	112	124	103	136	124

(أ) ارسم الشكل الإنتشاري للطاقة الكهربائية ودرجات الحرارة اليومية.

(ب) ما الذي يوحي به الشكل الإنتشاري عن العلاقة بين الطاقة المولدة في يوم معين.

(جـ) هل درجة الحرارة في يوم معين تتحكم في (أو تؤثر في) كمية الطاقة المولدة في هذا اليوم؟ ام ان هناك عوامل أخرى ؟وهل من الممكن أن يتواجد تأثير مباشر بينهما؟

(د) هل اجابتك في (ب)، (جـ) تعتمد علي تحليل إحصائي أم على معرفة خاصة بهذا الموضوع؟ اشرح ذلك.

(هـ) اذا كانت درجة الحرارة في أحد ايام شهر أغسطس الأخرى هي °88 ما هي كمية الطاقة التي تتوقع أن يتم توليدها ؟(ملحوظة: اجعل تنبؤك شخصيا، أي معتمداً على الشكل الإنتشاري).

(و) اعتماداً على هذا التحليل، ما هو توقعك بالنسبة لأحد أيام شهر ابريل الذي بلغت فيه درجة الحرارة °55 ؟

(٢-٧٥) اكسبريس جرافيكس هي احدى شركات الطباعة . هذه الشركة تطبع عبوات مختلفة ومتنوعة على نطاق واسع مثل: عبوات علب السجائر، علب مساحيق الغسيل، عبوات مستحضرات التجميل وعبوات الأغذية السريعة. اعمال الطباعة تتنوع من حيث الحجم، الشكل، جودة الطباعة، نوع الورق المستخدم. اكملت الشركة حوالي 200 عملية في أحد الأشهر، ولتقييم كفاءة عملية التسعير الحالية، اهتم المدير بدراسة علاقة التوافق بين سعر البيع المستهدف(X) والمبلغ النهائي المسجل في فاتورة البيع (y) وفيما يلي بيانات عن عينة عشوائية لعدد 15 عملية تمت في آخر شهر:

سعر البيع المستهدف (بالدولار)	المبلغ النهائي المسجل في الفاتورة (بالدولار)
5295	6417
83	85
2336	2178
123	127
4285	4349
76	115
125	381
44	122
551	328
469	534
1882	2577

545	404
13596	15090
929	292
633	1045

(أ) ارسم الشكل الأنتشاري لهذه البيانات.

(ب) ماالذي يشير إليه الشكل الإنتشاري بخصوص علاقة التوافق بين اسعار البيع المستهدفه والمبالغ الفعلية في الفواتير؟

(جـ) استخدم الشكل الإنتشاري بطريقة موضوعية تعتمد على خبرتك في تقدير مبلغ الفاتورة لعملية ما سعر بيعها المستهدف 5000 دولار.

(٢-٧٦)عقد مدير إدارة المستخدمين إختباراً في الذكاء لكل مندوبي البيع الجدد، وكان الغرض من ذلك معرفة ما اذا كان هذا الإختبار قادراً على التنبؤ بنجاحهم في اتمام عمليات البيع. البيانات التالية تمثل درجات الإختبار ومتوسط المبيعات الأسبوعية لثمانية من مندوبي البيع

متوسط المبيعات :	8	12	28	24	18	16	15	12
درجات الإختبار :	55	60	85	75	80	85	65	55

(أ) ارسم الشكل الإنتشاري.

(ب) اشرح ذلك الشكل الإنتشاري ثم صف أي ظهور لعلاقة بين درجات الإختبار لمندوبي المبيعات ومتوسط مبيعاتهم.

(٢-٧٧) في دراسة حديثة شملت عينة عشوائية من 300 من حوادث السيارات، صنفت المعلومات حسب حجم السيارة وما اذا كان هناك حالات موت قد حدثت:

	صغيرة	متوسطة	كبيرة
على الأقل حادث موت واحد	42	35	20
لا توجد حوادث موت	78	65	60

اعتماداً على التحليل البياني، هل يتضح لك أن حجم السيارة وثيق الصلة بحوادث الموت ؟ اشرح ذلك.

(٢-٧٨)عملية انتاجية تستخدم اربع ماكينات في ثلاث ورديات عمل. صنفت عينة عشوائية من 135 عطل طبقا للماكينة والوردية التي حصل بها العطل، وكانت البيانات كما يلي:

الوردية	الماكينة			
	A	B	C	D
1	10	12	8	14
2	15	8	13	8
3	12	9	14	12

اعتماداً على التحليل البياني، هل يبدو لك أن الوردية وثيقة الصلة بوقوع حوادث الأعطال للماكينات ؟ اشرح ذلك.

(٢-٨) فحص وتلخيص البيانات : مثال شامل A Comprehensive Example

مجموعة HAVCOR تمتلك وتشغل 11 مركزا لرعاية المرضى، تيرويلجير بلازا Terwilliger Plaza هو احدث فروعها والذي يدار بسياسة فريدة ومثيرة للجدل. البداية كانت عن طريق السماح لمجموعة من المرضى الذين يتم علاجهم على نفقة الدولة. لقد كانت الشركة تعتقد أن مركز رعاية المرضى سيحقق ربح اكثر لو أن معظم المرضى دفعوا من حسابهم الخاص أو من خلال برنامج الدعم الحكومي. هذه السياسة يبدو انها سببت مشكلة، فبعد 9 شهور فقط تم إشغال 63% من 120 سرير في ذلك الفرع في حين أن نسب الأشغال في المراكز الأخرى كانت 96% . معدل الأشغال المنخفض هذا أدى إلى ان ملاك المجموعة تناقشوا مع المسئول عن سياسة هذا الفرع، ثم قرروا إحالة الموضوع إلى محلل إحصائي لالقاء الضوء على هذه المشكلة، ومحاولة التنبؤ بطول الفترة الزمنية التي بعدها سوف يصل الفرع إلى معدل الأشغال المستهدف وهو 97.5%.

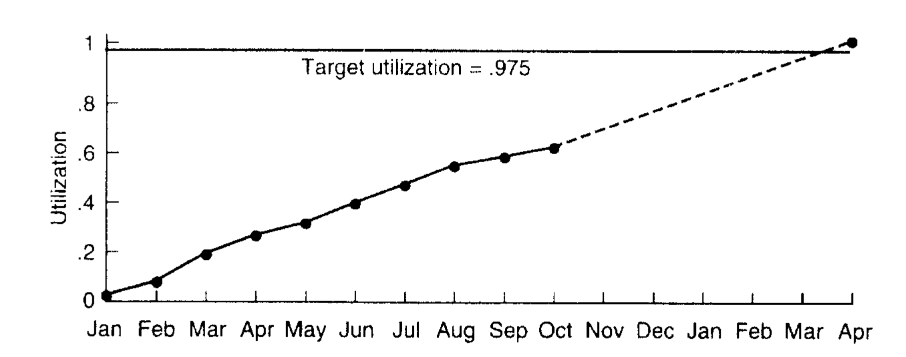
كانت أول خطوة هي دراسة تاريخية لمعدل استخدام الأسرة، ومحاولة التعرف على وجود نمط أو إتجاه معين. حيث أن أقصى استخدام ممكن خلال شهر مكون من 30 يوم يحدث عندما يتم إشغال 120 سرير كل يوم من أيام الشهر، وبالتالي يكون أقصى استخدام خلال 30 يوم في الشهر= 30x120=3600 . أما الإستخدام الفعلي في الشهر فيتحدد عن طرق معرفة عدد الأسره المستخدمه يوميا على مدار الشهر. اما معدل الإستخدام الشهري فنحصل عليه من خلال قسمة الإستخدام الفعلي على أقصى استخدام ممكن . جدول (٢-٧) يوضح الإستخدام الشهري وكذلك معدل الإستخدام الشهري وأيضا النمو في معدل الإستخدام وذلك بالنسبة للعشر شهور الاولى من نشاط فرع تيرويلجير- بلازا.

فحص البيانات يشير بوضوح إلى وجود إتجاه نحو الزياده. حيث أن معدل الإستخدام ينمو من 0.02 في يناير إلى 0.63 في اكتوبر وهذا يمثل زيادة في المعدل بنسبة 0.068 لكل شهر خلال العشر شهور السابقه.

جدول (٢-٧): معدل الإستخدام الشهرى لفرع تيرويلجير بلازا

الشهر	الإستخدام	معدل الإستخدام	النمو في معدل الإستخدام
يناير	74	.02	
فبراير	291	.08	.06
مارس	717	.19	.11
إبريل	975	.27	.08
مايو	1182	.32	.05
يونيو	1408	.39	.07
يوليو	1766	.47	.08
اغسطس	2046	.55	.08
سبتمبر	2083	.58	.03
اكتوبر	2340	.63	.05
	متوسط معدل النمو	=	.068

الرسم التوضيحي في شكل (٢-٢٦) يوضح الإتجاه العام بيانيا. يلاحظ أن الاتجاه التزايدي عبارة عن خط مستقيم ولو دققنا النظر سنجد ان اخر معدلين للزيادة 03. ,05. هما إلى حدما أقل من المعدل المتوسط. هل هذا الأنطباع الاولى يعني ان معدل النمو في معدل الإستخدام كان بطيئا ؟



شكل (٢-٢٦)خريطة بيانية لمعدل الإستخدام الشهري

من النتائج السابقة، يبرز لنا السؤال التالي: لو أنه في كل شهر استمر معدل الإستخدام في الزيادة بمعدل 068، متى سنصل إلى معدل الإستخدام الكامل ؟ بهذا المعدل من النمو، فإننا نصل إلى معدل الإستخدام 97.5% بعد 5 شهور. لاحظ ان الخط المنقط في شكل (٢-٢٦) والذي يعكس معدل نمو 0.068 يصل إلى المستوى 97.5% بعد 5 شهور(*).

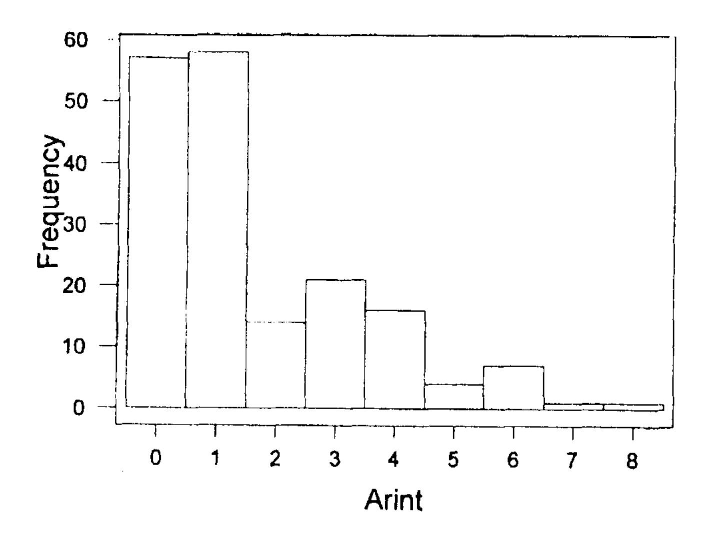
هذا التحليل يمثل الخطوة الاولى في هذه الدراسة. الخطوة الثانية هي نظره متعمقه لذلك التحليل. حيث أن مستوى الإستخدام يتحدد من خلال معدل وصول مرضى جدد إلى المركز وأيضا طول الفترة الزمنية التي يقضيها المريض في المركز قبل مغادرته. يمكن اعداد بيانات من خلال السجلات الخاصة بكل مريض حيث تشمل قاعدة البيانات تاريخ وصول المريض، المصدر : أي المكان الذي أتى منه المريض (مستشفى أو محول من جهة اخرى)، طول مدة الاقامة. بهذه البيانات يمكن أن نصل إلى نتائج عن معدل الوصول وعن طول مدة الإقامة. لدراسة معدل الوصول للفرع، فإن المتغير هنا هو الفتره الزمنية البينية، أي عدد الأيام بين الوصول المتتالي. جدول (٢-٨) يعطي ملخص بإحصائيات عن الفترات البينية الخاصة بعدد 179 مريض وصلوا خلال 10 شهور، متوسط الفترات البينية كان 1.62 يوم بإنحراف معياري 1.764يوم. المدرج التكراري للفترات البينية موضح في شكل (٢-٢٧) ويلاحظ أن التوزيع ملتوي تماماً ناحية اليمين. معظم الفترات البينية هي يوم واحد أو أقل ولكنها تصل إلى 8 أيام.

جدول(٢-٨): ملخص بإحصائيات للفترات الزمنية البينية ببرنامج ميني تاب

	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
arint	179	1.620	1.000	1.447	1.764	0.132

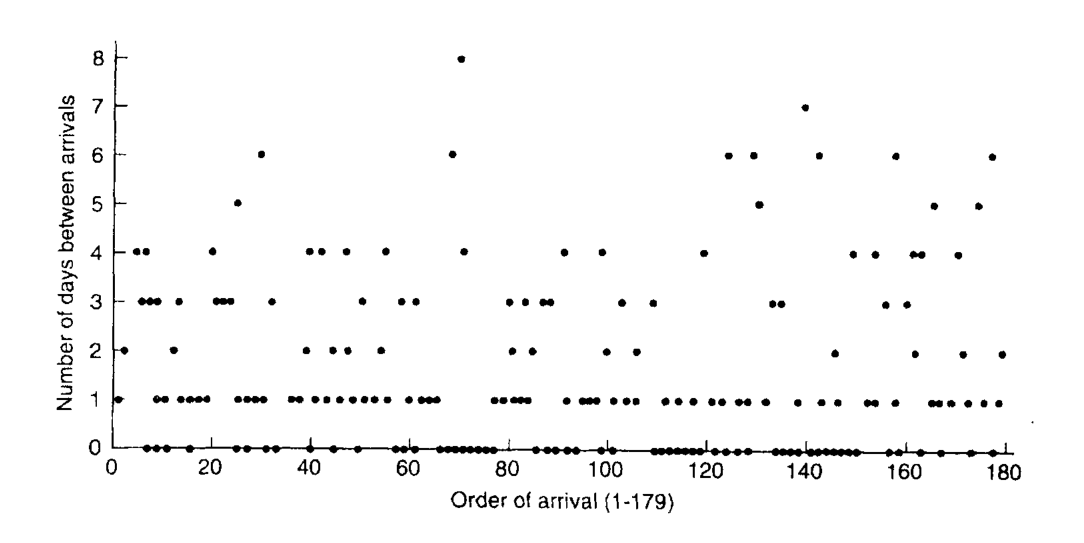
	MIN	MAX	Q1	Q3
arint	0.000	8.000	0.000	3.000

* هذه النتيجة تم تأكيدها بطريقة السلاسل الزمنية الموضحة في الفصل الحادي عشر.



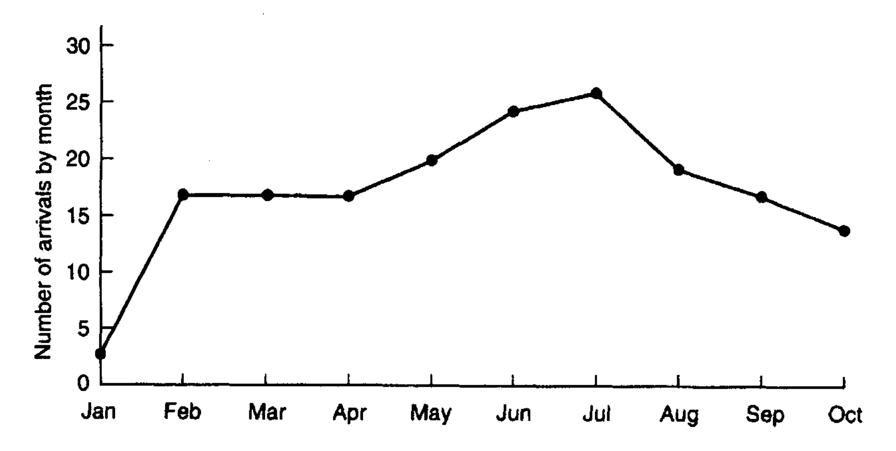
شكل (٢-٢٧) المدرج التكراري للفترات البينية ببرنامج ميني تاب

شكل (٢-٢٨) يوضح رسم بياني للفترات البينية ومن المثير للإنتباه أنه بالنسبة لوصول أخر 55 مريض، كانت الفترات البينية أطول إلى حد ما. لفحص التغير المكن في معدل الوصول الذي ظهر من خلال الرسم البياني، فقد تم تقسيم المرض إلى مجموعات شهرية، وبالتالي فإنه يمكن فحص خريطة بيانية لعدد المرضى كل شهر. عدد الوافدين (المرضى) خلال الشهر موجود في جدول (٢-٩)(*) ومن الملاحظ وضوح الإنخفاض في معدل الوصول خلال الشهور الثلاثة الأخيرة والتي تناظر أخر 55مريض وهو ما يوضحه شكل (٢-٢٩).



شكل (٢-٢٨): خريطة بيانية للفترات البينية

* خمس حالات من المرضى وصلت مبكراً في نوفمبر ولم تظهر في الجدول



شكل (٢-٢٩): خريطة بيانية لعدد حالات الوصول الشهرية

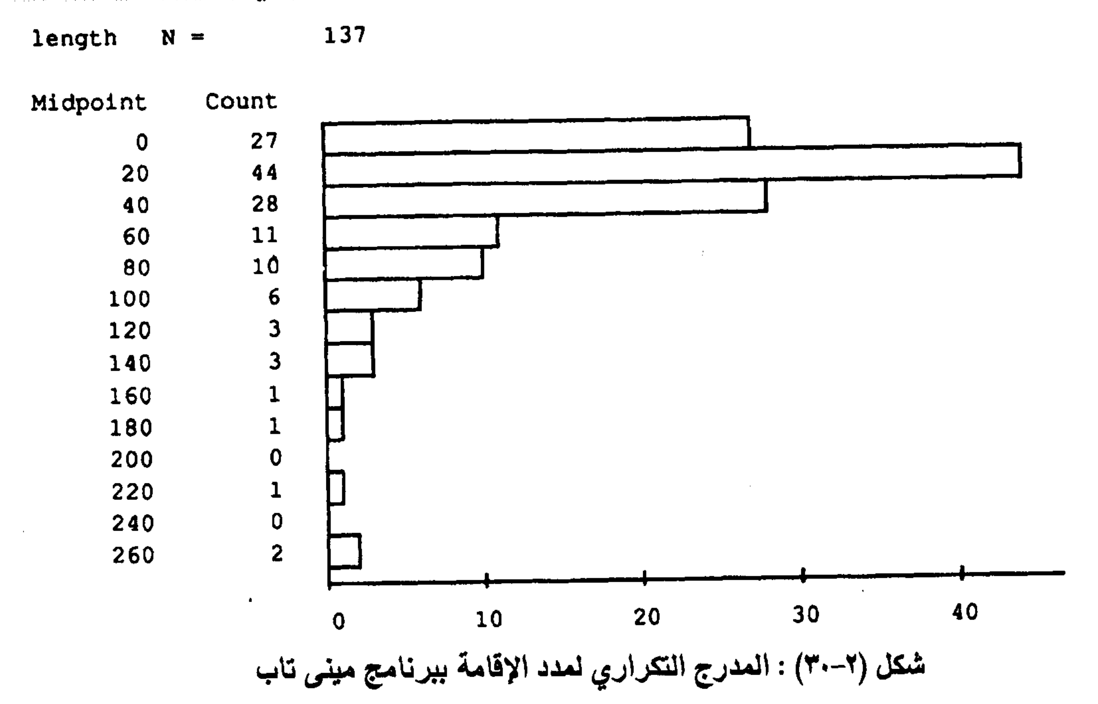
جدول (٢-٩): عدد حالات الوصول كل شهر

الشـــهر	عدد حالات الوصول
يناير	3
فبراير	17
مارس	17
إبريل	17
مايو	20
يونيو	24
يوليو	26
أغسطس	19
سبتمبر	17
أكتوبر	14

التناقص الواضح في معدل الوصول يثير التساؤل، لذلك يتحول الإنتباه إلى أطوال مدد الإقامة. جدول (٢-١٠) عباره عن ملخص لأطوال مدد الإقامة لكل مريض. متوسط طول مده الإقامة لعدد 137مريض غادروا المركز كان 43.59 يوما بإنحراف معياري 47.46 يوماً.

جدول (٢-١٠): ملخص بأطوال مدد الإقامة ببرنامج ميني تاب

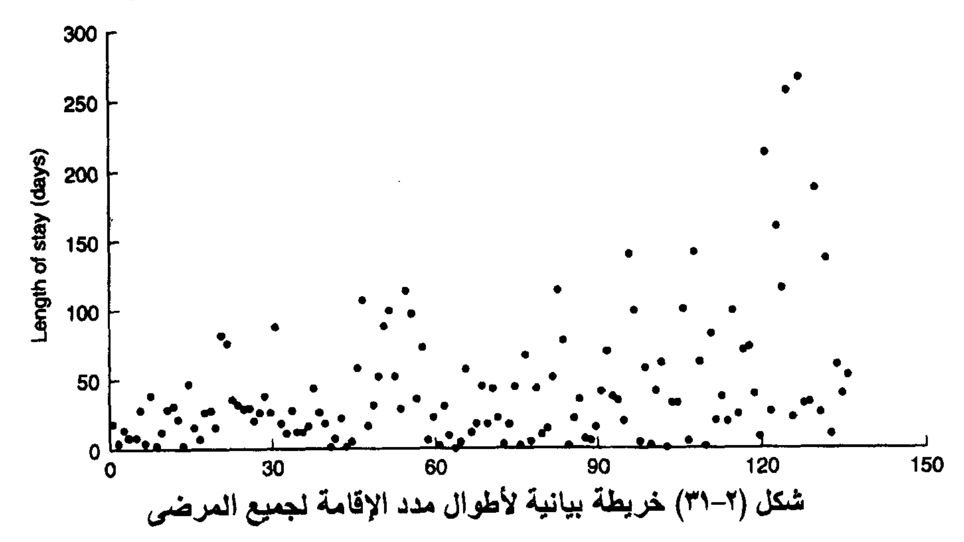
```
         N      MEAN     MEDIAN   TRMEAN   STDEV   SEMEAN
length   137    43.59    29.00    37.28    47.46   4.06
         MIN    MAX      Q1       Q3
length   1.00   267.00   13.00    55.50
```



شكل (٢-٣٠) : المدرج التكراري لمدد الإقامة ببرنامج مينى تاب

شكل (٢-٣٠)عبارة عن مدرج تكراري لمدد الإقامة والذي يكشف عن إلتواء واضح ناحية اليمين. إذا كان معدل الوصول يتناقص بحده، لماذا معدل الإستخدام يستمر في الزيادة؟ أحد الإحتمالات لهذا، أن مدد الإقامة قد زادت لأكثر المرضى الحاليين. شكل (٢-٣١) بين الخريطة البيانية لأطوال مدد الإقامة لكل المرضى من تاريخ دخولهم. الخريطة البيانية تشير بوضوح إلى أن أطوال مدد الإقامة قد زادت بالنسبة لمعظم المرضى الحاليين، بذلك يتعادل تأثير النقص في معدل الوصول.

لكي نلقي نظرة فاحصه على هذه الظاهرة، فإن أطوال مدد الإقامة قد قسمت إلى مجموعتين، الاولى تتكون من 95 وافد أو مريض والأخيرة تتكون من 42 وافد، وهذا يناظر تقريبا النقطة التي عندها تبدأ تظهر فترات الاقامة الأطول. جدول (٢-١١) يعطي ملخص وصفي لأطوال مدد الإقامة لهاتين المجموعتين [حيث الفترة1(قبل) الفترة 2(بعد)]، لاحظ أن المتوسط زاد لأكثر من الضعف من 31.76 يوم إلى 70.4 يوم والوسيط زاد من 23 يوما إلى 41 يوما. التباين أيضا زاد وكذلك الإنحراف المعياري لأطوال مدد الإقامة زاد لأكثر من الضعف من 27.73 إلى 68.2 والزيادة المثيرة في كل من متوسط طول مدة الإقامة والتباين تم توضيحها بواسطة الصندوق البياني الموضح في شكل(٢-٣٢).

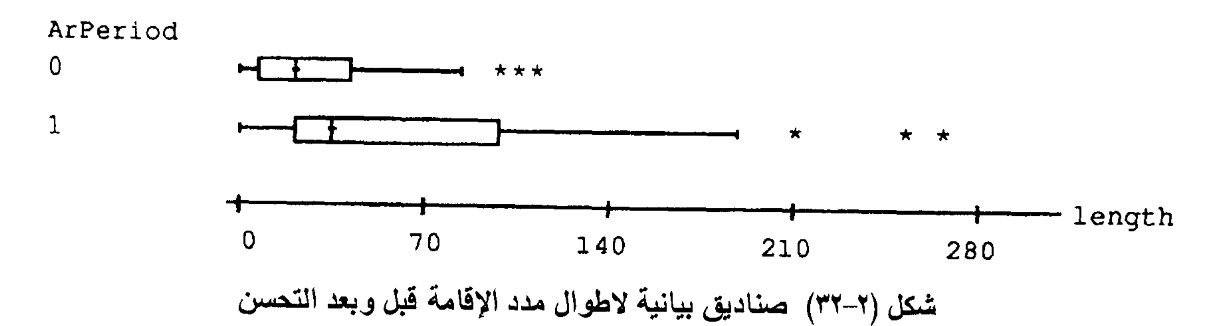


شكل (٢-٣١) خريطة بيانية لأطوال مدد الإقامة لجميع المرضى

جدول (٢-١١) ملخص بإحصاءات وصفية لأطوال مدد الإقامة قبل وبعد التحسن

	ArPeriod	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
length	1	95	31.76	23.00	29.06	27.73	2.85
	2	42	70.4	41.0	63.9	68.2	10.5

	ArPeriod	MIN	MAX	Q1	Q3
length	1	1.00	115.00	12.00	44.00
	2	1.0	267.0	24.5	100.3



شكل (٢-٣٢) صناديق بيانية لاطوال مدد الإقامة قبل وبعد التحسن

هذه النتائج تثير الإهتمام حيث ان طول مدة الإقامة من الممكن الايستمر في التزايد لمدة طويلة، وبذلك يبطل تأثير تناقص الإلتحاق بالمركز. إذا كان معدل الإلتحاق لا يمكن الحفاظ عليه، فإن التنبؤ بالإشغال الكامل خلال 5 شهور لا يمكن ان نتوقع حدوثه.

لماذا يتناقص الإلتحاق بالمركز ؟ هذا السؤال يقودنا إلى ان نبحث عن المصدر الذي يأتي منه المرضى. جدول (٢-١٢) عبارة عن جدول تكراري يحدد توزيع مصادر المرضى.(*) الجدول يوضح ان مصادر المرضى الرئيسيه هي دار ميرز، مستشفى الجامعة، مستشفى جرين بروك. هذه المعلومات تم تنظيمها في جدول إقتران يوضح التكرارات حسب المصدر وللفترة الزمنية (يناير- يوليو مقابل اغسطس- اكتوبر)، كما هي مبينة في جدول (٢-١٣).

الملاحظة الآساسية في جدول (٢-١٣) هي أن إنخفاض التوافد موجود في المصادر الثلاث الأساسية اما التوافد من الاماكن الاخرى يظل مرتفع. في الواقع معدل التوافد الشهرى من المصادر الاخرى كان مرتفعا في الشهور الثلاث الاخيرة عنه في الستة شهور الاولى. استأجرت مجموعة HAVCOR مندوبين للتسويق كي يتعاملوا مع المستشفيات ومع مراكز الرعاية التي تعتبر من المصادر الرئيسية للمرضى. الوافدين من المصادر الاخرى لم يكونوا عن طريق مندوبي التسويق. قليل من المكالمات التليفونية بينت أن مندوبي التسويق نفروا الناس من كل من المصادر الثلاث الرئيسية والذين يعتبرون الان مرضى وافدين من مكان أخر. هذه المعلومات تثير الدهشة، مندوبي التسويق يجب أن يصححوا الوضع ويزيدوا من معدل التوافد.

* التكرار الكلي هو 164 بدلاً من 179 لأن مصدر الوافدين لعدد 15 مريض كان غير معلوم.

جدول (٢-١٢) : توزيع المرضى حسب المصدر

المصدر	التكرار	النسبة المئوية
دار ميرز الصحية	47	45.1
مستشفى الجامعة	32	19.5
مستشفى جرين بروك	29	17.7
اخرى (21 مصدر مختلف)	29	17.7
المجموع	**164**	**100.0**

جدول (٢-١٣) : توزيع المرضى وفق المصدر ووفق الفترة الزمنية

المصدر	يناير - يوليو	أغسطس - أكتوبر	يناير - اكتوبر
دار ميرز الصحية	52	22	74
مستشفى الجامعة	24	8	32
مستشفى جرين بروك	24	5	29
اخرى (21 مصدر مختلف)	16	13	29
المجموع	**116**	**48**	**164**

(٢-٩) ملخص : SUMMARY

في هذا الفصل ناقشنا طرق فحص وتلخيص البيانات، حيث يوجد طريقتين لتلخيص البيانات الأولى وصف توزيع البيانات بين أقل وأكبر القيم في جداول أو رسوم بيانية والثانية هي استخدام كميات رقمية.

توزيع البيانات مهم، لأنه يكشف عن النموذج الذي تتوزع به البيانات. معظم أشكال التوزيعات الشائعة تلك التي تتمركز حول قمة وحيده، إما متماثلة أو ملتوية إلى اليمين او إلى اليسار، ولكي نكشف عن توزيع البيانات نستخدم الأشكال النقطية ، شكل الجذع والورقة، الصندوق البياني والمدرج التكراري.

الكميات العددية قسمت إلى ثلاث انواع متمايزة:(1) مقاييس الموضع،(2) مقاييس الإختلاف،(3) مقاييس الترتيب النسبية، مقاييس الموضع تصور القيمة التي حولها تميل البيانات إلى أن تتمركز، وهناك ثلاث مقاييس أساسية للموضع: الوسط، الوسيط، المنوال. مقاييس الإختلاف تصور التشتت أو الإنتشار بين مجموعة من القيم، ومن المقاييس الأساسية: المدى، متوسط الإنحرافات المطلقة، التباين والإنحراف المعياري. مقاييس الترتيب النسبية تصور مكان أو موضع قيمه معينة بالنسبة لبقية القيم كلها، الجزيئيات وقيم Z تمثلان المقاييس الأساسية في الترتيب النسبية.

ناقشنا أيضا طرق دراسة العلاقة بين متغيرين، الأشكال الإنتشارية وجدول الأقتران وكلها تساعد في فهم العلاقة التي يمكن ان تنشأ بين متغيرين.

المراجع: References

1- J. Chambers, W. Cleveland. B. Kleiner. and P. Tukey. *Graphical Methods For Data Analysis,* Pacific Grove, CA:Brooks,Cole, 1983.

2- J. Devore and R. Pect. *Statistics: The Exploration and Analysis of Data.* 2nd ed.Belmont, CA: Duxbury Press,1993.

3- J. Tukey. *Exploratory Data Analysis*. Reading, MA:Addison- Wesley 1977.

تمارين إضافية:

(٢-٧٩) بدأ أحد المصانع الإنتاجية برنامجاً جديداً لتدريب العاملين به على معدات انتاجية حديثه. البرنامج التدريبي يتكون من تقييم تحريري وعملي. التقييم العملي يتكون من ست مهام على المتدرب أن يجتازها بنجاح. البيانات تمثل الزمن (بالثواني) الذي إحتاجه المتدرب لأكمال مهمة واحدة من المهام السته وذلك لعدد 78 متدرب.

المتدرب :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
الزمن :	247	238	226	274	274	271	241	249	294	254	264	244	259
المتدرب :	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
الزمن :	256	292	210	210	225	213	318	206	215	193	195	252	255
المتدرب :	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
الزمن :	201	253	301	247	271	270	214	229	294	274	195	222	264
المتدرب :	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
الزمن :	258	238	231	263	313	238	240	197	271	296	209	217	198
المتدرب :	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
الزمن :	228	309	286	244	262	217	324	224	265	302	179	299	226
المتدرب :	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
الزمن :	236	242	239	218	266	267	221	220	259	239	258	254	244

(أ) احسب الوسط الحسابي، الوسيط والانحراف المعياري.

(ب) ارسم المدرج التكراري ثم استخدمه في تفسير توزيع أزمنة اكمال المهام.

(جـ) كيف يمكن للإدارة أن تستخدم هذا التوزيع لتحسين البرنامج التدريبي؟

(٢-٨٠) فيما يلي نتائج المكسب والخسارة للفريق القومي لكرة القدم الأمريكية في البطولات الدولية في آخر 50 سنه.

	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952
مكسب	41	14	15	24	28	7	14	30	24	17
خسارة	21	7	14	14	21	0	0	28	17	7

	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962
مكسب	17	56	38	47	59	23	31	17	37	16
خسارة	16	10	14	7	14	17	16	13	0	7

	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
مكسب	14	27	23	34	35	33	16	23	16	24
خسارة	10	0	12	27	10	14	7	7	13	3

	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
مكسب	14	24	16	21	32	27	35	31	27	26
خسارة	7	7	6	17	14	10	31	19	10	21

	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
مكسب	27	38	38	46	39	42	20	55	20	37
خسارة	17	9	16	10	20	10	16	10	19	24

(أ) ارسم خريطة التتبع البياني لنتائج المكسب والخسارة. هل هناك نظاماً يمكن أن يرى في هذا الشكل ؟ اشرح.

(ب) حدد الوسط الحسابي والوسيط والانحراف المعياري لكل من المكسب والخسارة بالإضافة إلى تكوين اشكال الجذع والورقة لكل منها ثم قارن بين ما تحصل عليه.

(٢-٨١) البيانات التالية تمثل عدد افراد دافعي الضريبة علي الدخل وإجمالي الدخل فى 50 ولاية أمريكية عام 1988.

الولاية State	عدد دافعي الضرائب بالألف Number of Returns (in thousands)	إحمالي الدخل (بالمليون دولار) Adjusted Gross Income (in million $)	الولاية State	عدد دافعي (الضرائب بالألف) Number of Returns (in thousands)	إجمالى الدخل (بالمليون دولار) Adjusted Gross Income (in million $)
ME	560	13,613	NC	2,930	72,137
NH	551	16,986	SC	1,463	33,860
VT	262	6,719	GA	2,741	73,302
MA	2,958	93,776	FL	5,760	159,547
RI	473	13,237	KY	1,462	33,897
CT	1,676	62,073	TN	2,097	50,988
NY	8,066	262,846	AL	1,624	38,631
NJ	4,012	137,372	MS	970	19,463
PA	5,416	144,761	AR	932	19,932
OH	4,910	126,962	LA	1,625	36,696
IN	2,444	62,376	OK	1;261	29,224
IL	5,196	154,863	TX	7,005	179,977
MI	4,071	115,419	MT	341	6,994

WI	2,169	56,322	ID	391	8,632
MN	1,955	53,715	WY	199	4,870
IA	1,225	28,546	CO	1,493	39,650
MO	2,224	57,033	NM	623	13,548
ND	279	5,844	AZ	1,520	39,322
SD	299	5,987	UT	634	13,548
NE	707	16,680	NV	538	15,779
KS	1,077	28,071	WA	2,129	58,391
DE	316	9,222	OR	1,245	30,732
MD	2,281	72,437	CA	13,012	398,831
DC	324	9,766	AK	336	7,327
VA	2,775	82,543	HI	521	14,216
WV	679	15,439			

(أ) احسب متوسط حجم الدخل لكل ولاية، ثم استخدم هذه المتوسطات في حساب الوسط الحسابي، الوسيط، الإنحراف المعياري، القيم المتطرفه، الربيع الأول والثالث.

(ب) استخدم المعلومات في (أ) لرسم الصندوق البياني لمتوسط الدخل واشرح ما تحصل عليه.

(جـ) رتب الولايات عن طريق حساب القيم المعيارية لها.

(٢-٨٢) في عملية تصنيع رقائق النيلون، ترش إضافات على الرقائق. عملية الرش هذه يتم التحكم فيها بدقة وذلك بسحب عينات من الرقائق كل ساعتين وتسجيل درجة تركيز النحاس. التركيزات التالية هي نتائج اختبار ثلاثة أيام.

34	31	32	33	33	32	34	34	35
37	36	35	38	39	39	39	35	37
36	37	38	36	33	33	41	41	40
36	44	38	35	38	38	39	39	34

(أ) ارسم خريطة تتبع بيانية وحدد ما إذا كانت عملية الرش مستقرة ام لا، اخذا في الإعتبار تركيز النحاس أثناء هذه الأيام الثلاثه.

(ب) كون شكل الجذع والورقة وكذلك الصندوق البياني لهذه البيانات ثم اشرح ما تحصل عليه.

(جـ) إلى أي مدى تكون نتائجك في (أ) مفيدة لو أنك استنتجت في (أ) ان العملية لم تكن مستقرة؟ أشرح.

(٢-٨٣) في دراسة استطلاعيه حول العلاقة بين الإنتماء الحزبي والرأي حول تنظيم تملك الأسلحة النارية كانت النتائج كما يلي:

الحزب	مؤيد	معارض	لم يقرر
ديموقراطي	110	64	26
جمهوري	90	116	14
مستقل	55	35	10

اعتمادا على التحليل البياني ، هل يتضح لك أن هناك علاقة بين الإنتماء الحزبي والرأي حول تملك الأسلحة النارية ؟

(٢-٨٤) نشرت مجلة Business week في عددها الصادر في October 29, 1990. الترتيب الذي وضعته لأفضل 20 من مدارس الإدارة في الدولة ونشرت كذلك الترتيب الذي وضعه كل من إتحاد الناخبين وخريجي هذه المدارس.

المدرسة	ترتيب المجلة	ترتيب الناخبين	ترتيب الخريجين
North western	1	2	7
Pennsylvania	2	1	10
Harvard	3	3	9
Chicago	4	5	1
Stanford	5	7	3
Dartmouth	6	8	5
Michigan	7	4	14
Columbia	8	6	11
Carnegie-Mellon	9	11	4
UCLA	10	16	2
MIT	11	10	13
North Carolina	12	14	6
Duke	13	13	12
Virginia	14	12	16
Indiana	15	9	23
Cornell	16	19	15
NYU	17	20	18
Texas	18	28	8
Berkeley	19	23	19
Rochester	20	27	17

(أ) ارسم الشكل الإنتشاري بين التراتيب التي وضعتها المجلة والتي وضعها اتحاد الناخبين. هل هناك أي علاقة بين هذه التراتيب تتضح لك ؟ اشرح ذلك.

(ب) كرر المطلوب (أ) ولكن بإحلال تراتيب الخرجين محل تراتيب اتحاد الناخبين. هل الإقتران هنا أضعف ام أقوى مما هو موجود في (أ) ؟ اشرح ذلك.

(جـ) كيف يمكنك تفسير أي اختلافات تتضح لك في (أ) ، (ب) ؟

(٢-٨٥) اجريت دراسة على عينة من خريجي أحدى الجامعات شملت صفتين: متوسط درجة التخرج (GPA) ودرجات الـ (SAT) وفيما يلي المعلومات التي حصلنا عليها:

GPA	SAT Score		
	900-1100	1100-1300	1300-1500
>3.5	50	65	38
3.0-3.5	78	72	42
2.5-3.0	97	80	18
2.0-2.5	105	25	18

(أ) اعتمادا علي التحليل البياني، هل يتضح لك ان هناك علاقة بين درجات الـSAT وبين متوسط درجات التخرج ؟

(ب) هل تعتقد ان هناك صفات اخرى يجب أن تؤخذ في الإعتبار ؟

(٢-٨٦) بالرجوع إلى تمرين (٢-٢٥) والمتعلق بعدد ساعات عمل المساعدين في مكتب الخدمات القانونية، كان يفترض أن عدد سنوات الخبرة، ربما تكون ذات تأثير على عدد ساعات العمل، أي يفترض انه كلما زادت سنوات الخبرة، كلما زادت عدد ساعات عمل المساعدين بالمكتب. فيما يلي بيانات عن عدد ساعات عمل المساعدين (البالغ عددهم 43) خلال تسعة أشهر وكذلك عدد سنوات الخبرة لكل منهم.

الساعات	820	1275	1225	1178	1275	797	1424	1328	1223
السنوات	3	10	5	9	7	4	9	7	2
الساعات	790	1399	1434	1050	796	1308	1464	1389	1316
السنوات	4	4	7	3	5	5	8	5	6
الساعات	1325	1494	1096	1482	1493	1452	1060	1407	1067
السنوات	6	7	3	15	2	7	3	12	5
الساعات	934	901	1400	1320	1132	1256	858	1346	885
السنوات	5	4	6	4	10	4	2	6	4
الساعات	1084	1062	1211	1379	1340	1098	1407	-	-
السنوات	5	4	4	10	8	7	5	-	-

(أ) ارسم الشكل الإنتشارى بين عدد ساعات العمل وسنوات الخبرة.

(ب) صف العلاقة بين عدد ساعات العمل وسنوات الخبرة.

(٢-٨٧)بالرجوع إلى تمرين(٢-٢٦) يعتقد أن هناك عاملين ربما يفسرا بصورة أوضح التغيرات المشاهدة في المبيعات اليومية من الأيس كريم وهما درجة الحرارة وترتيب اليوم في الأسبوع. تعتقد الإدارة أن المبيعات تزيد مع نهايات الأسبوع وتزيد كلما كان الجو حاراً. البيانات التالية تمثل درجات الحرارة في منتصف اليوم وكذلك أيام الأسبوع وحجم المبيعات اليومية.

المبيعات	373	761	412	180	242	148	221	436	640	462	254	257
اليـــوم	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2
الحرارة	67	64	65	57	53	57	60	43	43	45	44	43

المبيعات	259	220	382	737	610	246	238	342	307	505	739	591
اليـــوم	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
الحرارة	41	37	46	54	58	54	55	59	61	63	52	75
المبيعات	260	262	317	419	335	550	884	793	379	497	407	423
اليـــوم	1	2	3	4	5	6	6	7	1	2	3	4
الحرارة	61	59	70	77	55	41	89	92	81	80	65	73
المبيعات	702	815	777	583	494	509	456	587	878	674	480	322
اليـــوم	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2
الحرارة	78	77	85	89	81	82	79	84	88	96	89	81
المبيعات	453	477	726	779	795	381	445	465	443	594	869	881
اليـــوم	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
الحرارة	70	78	85	80	76	73	78	76	79	83	90	94
المبيعات	700	668	349	349	419	440	780	700	321	242	385	287
اليـــوم	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
الحرارة	72	72	77	80	75	76	74	83	87	84	84	77
المبيعات	438	749	600	300	311	373	196	452	441	514	290	245
اليـــوم	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2
الحرارة	79	85	90	87	90	85	86	60	63	75	72	73
المبيعات	193	301	385	643	583	343	544	190	200	173	193	372
اليـــوم	3	4	5	6	7	1	7	1	2	3	4	5
الحرارة	72	67	63	66	65	67	62	60	72	43	35	50
المبيعات	547	528	274	285	168	250	495	635	306	198	368	263
اليـــوم	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
الحرارة	52	64	66	52	51	53	64	63	45	35	50	44
المبيعات	226	296	468	416	331	324	464	544	336	498	380	
اليـــوم	4	5	6	7	1	2	4	5	6	7	1	
الحرارة	28	37	48	45	50	46	41	46	40	48	49	

كود أيام الأسبوع:

1: الأثنين ، 2:الثلاثاء ، 3: الأربعاء ، 4: الخميس ، 5:الجمعة ، 6: السبت ، 7: الأحد .

(أ) ارسم الشكل الإنتشاري بين المبيعات اليومية ودرجات الحرارة، ثم مرة أخرى بين المبيعات اليومية وأيام الأسبوع .

(ب) اعتمادا على الشكل الإنتشاري في(أ)، صف العلاقة بين المبيعات اليومية وأيام الأسبوع والعلاقة بين المبيعات اليومية ودرجة الحرارة.

(جـ) هل الأشكال الانتشارية السابقة توحي لك أن أيام الأسبوع ودرجات الحرارة هما عوامل تفسر بعض الإختلافات في المبيعات اليومية؟.

حالة تطبيقية (٢-١) : إختيار نموذج آلة تصوير وخطة التسعير :

غالبا ما تؤجر آلات التصوير للمستهلك ولاتباع بصفة نهائية. يشمل اتفاق الإيجار على القسط الشهري الذي يعتمد في مجمله على حجم التصوير ونظام الإستخدام. أي نموذج من آلات التصوير يمكن أن يؤجر مع اي خطه من خطط التسعير المتعدده. خطة التسعير الجيده تتحدد في ظل عدد النسخ الشهرية وكذلك نظام الإستخدام. يمكن وصف نظام الإستخدام الخاص باى آلة تصوير على أنه مجموعة متتالية من وظائف أو مهام التصوير والتي تحدث خلال فترة زمنية وتختلف تلك الوظائف وفق عدد الأصول التي يتم تصويرها وطول دورة التصوير، وتحدث الوظيفة عندما يقوم الشخص بتصوير وثيقة ما. على فرض ان سكرتيره ما تستطيع تصوير 15 نسخة من احد التقارير المكون من 10 صفحات وبالتالي في هذه الوظيفة او المهمة، هناك 10 أصول وطول دورة التصوير 15 ويكون الناتج الإجمالي15x10=150 نسخه تم تصويرها.

هذه الحالة التطبيقية تشمل تأجير نموذج لآلة تصوير وخطة تسعير من جانب مصنع آلات التصوير. مهمة وكيل الشراء ان يختار نموذج واحد من بين نموذجين للآت التصوير اما النموذج 3000 او النموذج 5000 بجانب شروط التسعير. عند مقارنة النموذج 3000 مع النموذج 5000 نجد ان الاخير يكون مناسبا للمستخدم الذي يقوم بعمليات نسخ كبيرة الحجم شهريا. عند المقارنة مع خطط التسعير C,A نجد أن خطط التسعير D,B هما الأفضل للعملاء اللذين يستخدمون نسبة وظائف اكبر في ألات التصوير وبأطوال دورات أكبر. اختيارات خطط التسعير للنماذج 5000,3000 محدده وموضحه فيما يلي:

النموذج	خطة التسعير	الشروط
3000	A	$500 أقل ثمن يطلب شهريا $.03 للنسخة الواحدة
3000	B	$500 أقل ثمن يطلب شهرياً $.04 للنسخة الواحدة وعدد النسخ (1-5) $0.02 للنسخة الواحدة وعدد النسخ (6-10) $.01 للنسخة الواحدة وعدد النسخ 11 أو أكثر
5000	C	$750 أقل ثمن يطلب شهريا $.025 للنسخة الواحدة
5000	D	$750 أقل ثمن يطلب شهريا $.05 للنسخة الواحدة وعدد النسخ (1-5) $.015 للنسخة الواحدة وعدد النسخ (6-10) $.004 للنسخة الواحدة وعدد النسخ 11 أو أكثر

من المعروف من سجلات الفواتير أن وكيل الشراء في الوقت الحالي يستطيع تصوير 40,000نسخة شهرياً على ماالديه من آلة تصوير. لمساعدة وكيل الشراء في إختيار النموذج المناسب من آلات التصوير وكذلك شروط خطة التسعير الملائمة، فقد سجلت وظائف التصوير على آله التصوير المتاحة له حالياً خلال فترة أسبوع (من الأثنين إلى الجمعة) وقد شمل التسجيل معلومات عن 232وظيفة.

المطلوب منك الأن تحديد وتلخيص البيانات وتقديم توصيه بالأختيار لأقل النماذج تكلفة بالنسبة للعميل مع تحديد ما قد يكون هناك من قيود على النموذج المختار.

محتويات الملف:

البيانات موجودة في الملف: CASE 0201 في الإسطوانة المرفقة بالكتاب. كل صف من البيانات يحتوي على مشاهدات خاصة بوظيفة معينة. الأعمدة تعطي معلومات حول تلك الوظائف كما يلي:-

C1 = رقم الوظيفة (مرتبه)

C2 = يوم (1= الأثنين 2 = الثلاثاء، وهكذا)...

C3 = عدد الأصول

C4 = طول المدة

C5 = عدد النسخ (عدد الأصول × طول الدورة)

حالة تطبيقية(٢-٢) : شركة سبوكس للدراجات:

شركة سبوكس للدراجات(*) تقوم بتسويق الدراجات والمنتجات المتعلقة بها بالبريد، ومنتجاتها على انتشار واسع في الولايات المتحدة الأمريكية وهذه الشركة تنافس وبمهارة عالية بتقديم منتجات خاصة عالية الجودة وعند أسعار تنافسية كما أنها تعطي خدمة مجانية للعميل.

تقدم شركة سوبكس للدراجات خط إنتاجي كامل. الدراجات في صورتها النهائية هي التي تساهم بنصيب كبير في الإيراد وفي الربح. ومع هذا فإنها تنفذ منتجات أخرى مرتبطة بالدراجات ضمن خطتها الإنتاجية. بعض الوحدات يتم إنتاجها على الرغم من أن لها هامش ربح بسيط، لكن شركة سوبكس ترغب في أن تكون قادرة على تلبية كل إحتياجات عملائها المستمرة، ومن ثم لا يذهبوا إلى منافس آخر لشراء قطعة واحدة، حيث تبين لها أن معظم طلبات العملاء التي وصلت بالبريد، تركز على شراء مكون واحد. إذا طلب العملاء مكون واحد من شركة منافسة فمن المحتمل أن يطلبوا أيضاً أكثر من مكون من مكونات الدراجة.

منتجات شركة سوبكس يمكن تقسيمها إلى أربع خطوط إنتاج:

* **دراجات:** دراجات تامة الصنع.
* **مكونات:** إطارات، عجل، جهاز نقل الحركة،.. الخ أي ما يحتاجه العميل لتركيب دراجة أو تحسينها أو المحافظة عليها.
* **كماليات:** خوذة، زجاجات مياة.. الخ.
* **ملابس:** كل ما يكسو ويزين الدراجة.
* **كل خط إنتاج له مدير إنتاج.**

تقوم شركة سوبكس للدراجات باصدار أربع نشرات مصورة كل سنة، وكل مدير إنتاج يرغب في الحصول على مساحة عرض أكبر في تلك النشرات (بالبوصة المربعة). وعلى الرغم من أن

* سبوكس للدراجات اسم مستعار استخدم لأضفاء نوع من الثقة. هذه الحالة تمثل مشكلة حقيقية واجهت شركة ما.

المديرين لم يقوموا بالتحليلات الكافية، إلا أنهم يؤمنوا بأنه كلما زادت مساحة العرض في النشرة المصورة عن منتجاتهم، كلما زادت مبيعات تلك المنتجات. حديثاً، حاز الإنخفاض الواضح في المبيعات إهتمام كل من رئيس مجلس إدارة شركة سوبكس للدراجات والمدير العام، فالمبيعات وفق آخر نشرة كانت أقل من مبيعات آخر ثلاث سنوات. وهم لا يعرفوا ما إذا كان هذا الإنخفاض راجع إلى تغيرات عشوائية أم أنه اتجاه عام. من أجل رفع المبيعات، قامت الشركة بزيادة مساحة العرض المخصصة للدراجات تامة الصنع في نشراتها، وكان لهذا أثره الطيب في زيادة الإيراد ولكن ليس بالصورة المرضية.

الجدول التالي يوضح أرقام المبيعات وعدد البوصات المربعة المخصصة لكل خط إنتاج في النشرة الدورية في آخر ثلاث سنوات. ما هي النتائج التي يمكن أن نصل إليها؟ هل هذه البيانات تشير إلى تغيرات عشوائية أم أنها تشير إلى وجود مشكلة خطيرة؟ مهمتك هي أن تفسر أثر ديناميكية التسويق الحالية على شركة سوبكس للدراجات وأن تضع توصية بالقرارات التسويقية المكنة اعتماداً على تحليلاتك لتلك البيانات. توصياتك يجب أن تركز على حجم مساحة الإعلان التي يجب تخصيصها لكل منتج. هل بعض خطوط الإنتاج تحتاج إلى مساحة أكبر؟ أم لمساحة أقل؟

بيانات سوبكس للدراجات

Period	Year	Catalog	Toal Sales	Bikes sq. in.	Bikes Sales	Comp. sq. in	Comp. Sales	Access. sq. in.	Access. Sales	Cloth. sq.in.	Cloth. Sales
1	1988	1	6,575	500	2,875	360	1,560	380	720	440	420
2	1988	2	6,140	460	2,530	630	2,700	320	660	270	250
3	1988	3	5,915	630	3,030	420	1,995	270	510	360	380
4	1988	4	6,925	680	4,290	340	1,580	470	880	190	175
5	1989	1	6,220	620	2,780	430	2,490	340	640	290	310
6	1989	2	5,980	570	2,370	430	2,590	360	680	320	340
7	1989	3	6,190	420	1,750	550	3,380	420	750	290	310
8	1989	4	6,710	720	3,550	370	2,300	230	550	360	310
9	1990	1	5,890	760	2,380	370	2,670	320	630	230	210
10	1990	2	5,780	960	2,560	420	2,370	350	640	220	210
11	1990	3	5,220	840	2,260	320	2,240	280	530	240	190
12	1990	4	4,840	920	1,800	300	2,380	240	430	220	230

البيانات موجودة في اسطوانه البيانات (المرفقة بالكتاب) في ملف أسمه CASE 0202 وهي منظمة في أعمدة على النحو التالي:

C1 = دليل الفترة (3,2,1، . . . . .)
C2 = السنه
C3 = النشرة (1= الربيع، 2= الصيف، 3= الخريف، 4= الشتاء)
C4 = جملة المبيعات
C5 = بوصات مربعة للدراجات الكاملة (خط الأنتاج 1)
C6 = مبيعات الدراجات الكاملة (خط الإنتاج 1)
C7 = بوصات مربعة لمكونات الدراجة (خط الإنتاج 2)
C8 = مبيعات المكونات (خط الإنتاج 2)

C9 = بوصات مربعة للكماليات (خط الإنتاج 3)
C10 = مبيعات الكماليات (خط الإنتاج 3)
C11 = بوصات مربعة للملابس (خط الإنتاج 4)
C12 = مبيعات الملابس (خط الإنتاج 4)

حالة تطبيقية(٢-٣) إدارة الخدمات الإجتماعية بشركة فورد

ادارة الخدمات الإجتماعية بشركة فورد(*) لها قسم يمكن للعملاء الأتصال به تليفونياً للإستفسار وكذلك تسجيل شكواهم. حجم الشكاوى كان هائلاً منها على سبيل المثال:

* لماذا لا يستقبل العمال تليفونات أيام الأربعاء؟
* هل هناك حالة طوارئ؟
* أعطني رقم مشرف العمال الخاص بمكالمتي.
* دعني أتحدث مع المندوب.
* العامل الخاص بمكالمتي لا يرد على التليفون.

العدد الكبير من المكالمات والشكاوى ولد ضغطاً كبيراً داخل الإدارة مما جعل من الصعب تحديد المسئولية.

قسمت الإدارة إلى سبع مناطق جغرافية (G, F, E, D, C, B, A) أكبر عدد من الشكاوى كانت في المنطقة C تليها المنطقة D. هذه المناطق كانت تتعرض لضغوط كبيرة لتخفيض عدد الشكاوى بها.

في محاولة لفهم هذه المشكلة بصورة أفضل، جمعت بيانات عن أعداد الشكاوى خلال شهر أغسطس في كل منطقة من المناطق السبعة. بالإضافة إلى عدد المكالمات لكل منطقة، هناك معلومات أخرى وثيقة الصله بالموضوع شملت عدد الحالات وعدد العمال في كل منطقة وكانت البيانات على النحو التالي وهي أيضاً موجودة في أسطوانه البيانات (المرفقة بالكتاب) تحت اسم CASE 0203، حيث:

C1 = المنطقة (المنطقة A=1، المنطقة B=2، وهكذا)

C2 = الشكاوى

C3 = عمال حالة

C4 = حالات

* هذا اسم مستعار لإضفاء نوع من الثقة. هذه الحالة تمثل مشكلة حقيقية في شركة ما والبيانات هنا حقيقية.

حالات	عمال حالة	شكاوى	منطقة
3275	18	89	A
4116	24	34	B
8716	46	266	C
8116	48	186	D
3974	23	72	E
3391	22	6	F
1096	7	14	G
--	--	38	غير معلوم

هل هذه البيانات توحي بأن المناطق C وD تستحقان بأن يكونا من أعلا المعدلات في المكالمات؟ هل هذه البيانات توحي بأن هناك مناطق تؤدي عملها بصورة ضعيفة؟ وأن هناك مناطق تؤدى عملها بصورة أفضل من غيرها؟ أخيراً صف أثر القرار على الإدارة من خلال البيانات التي جمعت، بمعنى كيف يمكن أن تتغير بيئة العمل داخل إدارة الخدمات الإجتماعية بشركة فورد.

ملحق (٢) : Appendix 2

الأوامر المستخدمة في برنامج ميني تاب

بمجرد إدخال البيانات الحاسب الآلي، فإن كثيراً من الحسابات التي قدمت في هذا الفصل يمكن أداؤها بجمله واحدة من جمل الحاسب الآلي. وبالمناسبة فإننا نحتاج إلى تعديل الرسم خاصة فيما يتعلق بالشكل البياني للجذع والورقة، وكذلك المدرجات التكرارية الناتجة عن طريق برنامج ميني تاب. ويمكن تحقيق ذلك باستخدام الأوامر الفرعية Start, Incrementوسوف نستخدم الدرجات العشرين الخاصة بإختبار الأحصاء والمبينة في الفصل (٢-٣-٢) لتوضيح أوامر برنامج ميني تاب.

للحصول على شكل الجذع والورقة الموضح في شكل (٢-٤)، فإننا نحتاج إلى اتباع خطوتين أساسيتين:(1) إستخدام الأمر SET لإدخال البيانات. (2) إستخدم الأمر STEM-AND-LEAF مع الأمر الفرعي INCREMENT. الأمر الفرعي INCREMENT يستخدم لتحديد المسافة المرغوبة بين قيم الجذوع. لاحظ في أوامر ميني تاب التالية أن المسافة المرغوبة هي عشر وحدات (أي 50,60 الخ).

```
MTB> set   c 1 ;
DATA> 93  83  86  83  56  63  64  73  78  81  62  88  54 72  74
DATA> 87  78  61  63  89
DATA> end
MTB> Stem - and - leaf c1;
SUBC> increment =10.
```

للحصول على المدرج التكراري كما في شكل (٢-٧) إستخدام برنامج ميني تاب تحت النوافذ، يستخدم الأمر Histogram مع الأمر الفرعي Cutpoint كما يلى. لاحظ في الأمر الفرعي أننا نحدد الحدود للفئات أو أننا نستخدم الأمر الفرعي Midpoint لتحديد مراكز الفئات.

```
MTB > histogram  c1;
SUBC > cutpoint  50  60  70  80  90  100.
```

للحصول على المدرج التكراري كما في شكل(٢-٧) باستخدام برنامج ميني تاب تحت الدوس Dos فإننا نستخدم الأمر Ghistogram مع الأوامر الفرعية Increment و Strat كما يلي: الأمر الفرعي Start يحدد مركز أول فئة والأمر الفرعي Increment يحدد المسافة بين مراكز الفئات.

```
MTB > ghistogram  c1 ;
SUBC >  increment =10 ;
SUBC >  start   = 45
```

نفس الخطوات يتم اتباعها للحصول على الأشكال النقطية وكذلك الصناديق البيانية باستخدام برنامج ميني تاب. فمثلا، الأوامر :

```
MTB > dotplot c1
```

and

```
MTB > boxplot c1
```

تعطي الصندوق البياني والشكل النقطي للدرجات العشرين لأختبار الإحصاء والمخزنة في العمود C1. هذه الأوامر واحدة سواء استخدم برنامج النوافذ أو أوامر الـ Dos. بالإضافة إلى ذلك يمكن

الحصول على الشكل النقطي لمتغيرين متمايزين باستخدام نفس المقياس (أنظر مثلا للشكل (٢-١٤) وذلك بتعريف عمودين يحتويان على قيم المتغيرين وذلك في الأمر Dotplot يلي ذلك الأمر الفرعي SAME SCALE.

```
MTB > dotplot c1  c2;
SUBC > same scale.
```

للحصول على الشكل الإنتشاري لمتغيرين، يستخدم الأمر Plot. للتوضيح، نتناول المثال(٦-٢) الخاص بالعلاقة بين قيمة الوثيقة والدخل. يستخدم الأمر SET لتخزين قيمة الوثيقة والدخل في الأعمدة C2,C1 على التوالي. بعد ذلك نستخدم الأمر التالي للحصول على الشكل (٢-٢٥). لاحظ أن المتغير الأول الموضح في أمر Plot يوضع على محور y والمتغير الثاني على محور X.

```
MTB > plot c1  c2.
```

من الممكن أن نحسب ببساطة شديدة كميات رقمية مثل: المتوسط الحسابي، الوسيط والأنحراف المعياري بإستخدام برنامج ميني تاب. فمثلا الأوامر :

```
MTB > mean c1
MTB > median c1
MTB > stdev c1
```

تظهر قيمة الوسط الحسابي، الوسيط، الانحراف المعياري على التوالي وذلك للمتغير الذي قيمة مخزنه في العمود C1 بمجرد ادخال كل أمر للحاسب الآلي.

ويمكنك تحديد العديد من الكميات الرقمية الهامة بالأمر DESCRIBE. فمثلا، الأمر:

```
MTB > describe c1
```

يطبع بالإضافة إلى كل من الوسط، الوسيط، الانحراف المعياري- القيم المتطرفة، الربيع الأول والثالث وذلك للمتغير الذي قيمه مخزنه في العمود C1 (للتوضيح انظر للمثال (٢-٤).

الفصل الثالث

الإحتمال، المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية

PROBABILITY, RANDOM VARIABLES, AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

محتويات الفصل

الفصل الثالث

الإحتمال، المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية

PROBABILITY, RANDOM VARIABLES, AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

(٣-١) نظرة عامة على محتويات الفصل: Bridging to New Topics

قدمنا في الفصل الثاني طرقاً مختلفة لفحص ووصف وتلخيص بيانات العينة، فنحن نستخدم بيانات العينة لنتعرف على المجتمع الذي سحبت منه العينة، وحيث أن العينة هي جزء من المجتمع، فإن أي إستدلال نصل إليه من العينة يتضمن عدم التأكد. ومن المهم أن يكون لدينا بعض الأفكار إلى أي مدى يتواجد عنصر عدم التأكد قبل أن نتخذ قرارات هامة، فإذا كان عدم التأكد كبيراً جداً فإن القرارات التي نقترحها من خلال بيانات العينة تكون على درجة كبيرة جداً من الخطورة ولا يمكن تبريرها. في هذا الفصل وفي الفصل الرابع، نقدم طرقاً تتناول عدم التأكد، ولكي نساعدك في فهم عدم التأكد، فإننا غالباً ما نستخدم أمثلة بسيطة مثل رمي قطعة عملة أو إلقاء زهرة طاولة لأنها أمثلة معروفة جيداً وتوضح مبادئ هامة.

إن العالم المحيط بنا مملؤ بعنصر عدم التأكد، فنحن نتخذ قرارات يومياً تتأثر في الواقع بعدم التأكد، فعلى سبيل المثال، إذا قال خبير الأرصاد الجوية "هناك إحتمال قدره 40% لسقوط الأمطار" فهل لابد من حمل مظلة مطر معنا؟ وإذا قال سمسار للأوراق المالية موثوق به "الفرص الآن أفضل في شراء سهم معين، حيث أن قيمته سترتفع خلال العام القادم" فهل نقوم بالشراء؟ مدير قسم الكومبيوتر بإحدى الشركات يبني قراره بتحديث نظام الكومبيوتر بالشركة على أساس أن إستخدام الكومبيوتر سوف يتجاوز 90% من طاقة العمل بالشركة مع نهاية العام. أو ربما يكون إختيارك للكلية أو الجامعة للإلتحاق بها يرجع إلى إعتقادك بأنها ستوفر لك فرصة جيدة للنجاح بها. لاحظ أن كلمة فرصة **Chance**، إمكانية **likelihood**، تتكرر كثيراً عندما نناقش عدم التأكد، وكل منها مرادف أساسي لكلمة الإحتمال **Probability**. ولكي ندرس ونقيس عدم التأكد، فإننا نرجع إلى فرع في الرياضيات يسمى الإحتمال **Probability**. في هذا الفصل، نناقش الأفكار الأساسية في الإحتمال ونقدم مصطلحين إحصائيين هامين: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية. والإحتمال يضع الهيكل الأساسي للتفكير في حالات عدم التأكد.

أحد الموضوعات الإحصائية الهامة ووثيقة الصلة بعدم التأكد هي نواتج المعاينة. الأمثلة التالية توضح إستخدام الإحتمال في مجال إتخاذ القرارات.

مثال (٣-١)

تنافست مرشحتان أ، ب في إنتخابات لمنصب معين. وقبل موعد الإنتخابات بشهر، كان هناك

إعتقاد بتقارب السباق بين المرشحتان ومن المهم معرفة ما إذا كان هذا الإعتقاد له ما يبرره. إذا إعتقدت المرشحة أ بأنها ستخسر الإنتخابات، فإنها سوف تغير إستراتيجية حملتها الإنتخابية في الشهر الأخير. وفي إقتراع أجري قبل موعد الإنتخابات بشهر على 1000مواطن، أختيروا بطريقة عشوائية ممن يعتقد بأنهم سيصوتون في يوم الإنتخابات، تبين أن 400 مواطن سوف يصوتوا للمرشحة أ. إعتماداً على هذه المعلومات هل من المقبول الإستمرار في الإعتقاد بتعادل السباق بين المرشحتين؟ وهل على المتسابقة أ تغيير إستراتيجيتها نتيجة لإعتقادها الآن بأنها سوف تخسر السباق؟

الحل

إحدى الطرق للتفكير في هذا السؤال ما يلي: إذا كانت الفرضية القائلة بتقارب السباق صحيحة وإذا كانت عينة الـ 1000 مواطن ممثلة لمجتمع الناخبين، فإننا نتوقع توزيع متعادل للتفضيلات بين الـ 1000 ناخب، ومع ذلك فالنتيجة كانت 400 (وليس 500) فقط يفضلوا المرشحة أ. عودة الآن إلى السؤال الأصلي: هل من المقبول أن نستمر في الإعتقاد بتعادل السباق؟ نتجه بالسؤال ناحية تحديد فرصة أو إحتمال أنه في السباق الذي فيه المجتمع الإنتخابي ينقسم إلى 50/50 بين أ، ب فإن عينة عشوائية من 1000 ناخب تقسم بعدم تعادل مثل 400/600. هذا الإحتمال نتيجته قليلة جدا (أقل من فرصة واحدة في كل1000). سواء أكان من النادر إختيار مثل هذه العينة أو أن الإعتقاد الأصلي غير صحيح، يظل عدم التأكد باقيا في هذه الحالة، ولكن معظم الناس قد يوافقوا على أن قرار المرشحة أ بتغيير سياسة حملتها الإنتخابية له ما يبرره.

في سياق المثال (٣-١) من المهم أن نفهم أن تصويت العينة (1000 ناخب) يعكس تصويت المجتمع في الوقت الذي سحبت فيه العينة، وأن اي تغيير في تفضيلات الناخبين تحدث بعدما تسحب العينة من الممكن معرفته بسحب عينات متتالية. لذلك فإن إستخدام الإحتمال في مجال إتخاذ القرارات يجب أن يدرس أو يفحص كعملية تحليلية مستمرة والتي فيها تسحب العينات بصفة دورية من المجتمع محل الإهتمام.

(٣-٢) المبادئ الأساسية للإحتمال The Basic Elements of Probability

لكي نفهم الإحتمال بصورة تكفي إحتياجك لتتعلم التفكير الإحصائي، يكون من الضروري أن نتعرض بالشرح لبعض المفاهيم الأساسية، وكيف ترتبط تلك المفاهيم مع بعضها. سنبدأ بالمفاهيم: التجربة العشوائية، النواتج، الحوادث وفراغ العينة.

عند سؤال 1000 ناخب عن مرشحهم المفضل في مثال (٣-١)، كان الغرض هو الحصول على معلومات حول ظاهرة غير مؤكدة- المرشح المفضل قبل الإنتجابات. إحدى الطرق للحصول على معلومات حول ظاهرة في ظل عدم التأكد، هي أن ندير تجربة فيها نلاحظ أو نقيس بعض المعالم الظاهرة عن الخاصية موضوع الدراسة. يعرف المصطلح: التجربة العشوائية **random experiment** على أنها عملية الحصول على معلومات من خلال ملاحظة أو قياس ظاهرة ما، والتي نتائجها غير مؤكدة، بمعنى أن النواتج لا يمكن التنبؤ بها بدقة متناهية.

بعض الأمثلة التقليدية عن ظواهر يمكن دراستها بتجارب عشوائية هي:

* عدد رحلات الطيران التي لم تتم حسب جداول الإقلاع.

* تفضيل منتج معين محتمل الشراء.
* عدد العملاء اللذين يصلون إلى مركز خدمة خلال فترة زمنية محددة.
* طول العمر لبعض المكونات الكهربائية.
* حجم المبيعات اليومية في متجر تجزئة.
* طول الزمن المستغرق في مكالمة تليفونية.
* الدرجة الرقمية المتحصل عليها في إختبار الإحصاء.

عندما تقوم بتجربة ما، فإننا نلاحظ النتيجة **outcome** ونقول أن النتيجة خاضعة للصدفة، لأنها تختلف عن نتيجة سابقة إذا كررت التجربة تحت نفس الظروف. فمثلاً، في تجربة إلقاء قطعة عمله، هناك نتيجتين محتملتين في كل مرة نلقي فيها قطعة العملة (أي في كل مرة تنفذ فيها التجربة) إما أن نشاهد الصورة **heads** أو الكتابة* **tails**. وحيث أننا لا نعرف أي هذه النواتج سوف تقع عند إلقاء قطعة العملة، فإن نتيجة التجربة تكون خاضعة للصدفة. لماذا لا نستطيع أن نتنبأ بنتيجة رمي قطعة العملة بصورة يقينية؟ تتأثر دائما نتيجة أي تجربة ببعض المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها بدقة في كل مرة تتكرر فيها التجربة. ففي تجربة إلقاء قطعة العملة، مثل هذه المتغيرات تشمل الدوران السريع للعملة عند إلقاءها، الإرتفاع الذي وصلت إليه العملة، الموضع الذي تسقط عليه عندما تستقر. لا يمكن أن نجد تجربة يمكن تكرارها تحت نفس الظروف السابقة تماماً. نحن نحاول أن نتحكم في أهم العوامل ولكن لا يمكن أبداً التحكم في كل العوامل. الإختلاف بين المشاهدات التجريبية هو نتيجة لتأثير عوامل قليلة الأهمية ولا يمكن التحكم فيها وعادة ما تجمع مع بعضها ويطلق عليها الإختلاف العشوائي **random variation**. ونفترض أن هذه التأثيرات تتغير عشوائياً ولا يمكن التنبؤ بها من تكرار التجربة من مرة إلى أخرى.

دعنا نرجع إلى إلقاء قطعة العملة، تسمى الصورة أو الكتابة بحوادث بسيطة، لأنها أقصى مشاهدات أساسية يمكن الحصول عليها عند إلقاء قطعة العملة. فالحدث البسيط **Simple event** هو أقصى مشاهدة أساسية في أي تجربة، وهي لا يمكن تجزئتها إلى حوادث أبسط. لنفرض أننا نسجل الصور عند القاء قطعة العملة، معنى ذلك أننا نستبعد الكتابات من عملية التسجيل. وهكذا عند القيام بتجربة ما، فإن واحدة فقط من الحوادث البسيطة الممكنة يمكن أن تقع.

في أي تجربة عشوائية، هناك مجموعة من الحوادث البسيطة الممكنة، فراغ العينة **Sample space** لتجربة عشوائية يتكون من مجموعة الحوادث البسيطة الممكنة، فعند إلقاء قطعة العملة، فراغ العينة يتكون من حدثين بسيطين: الصورة والكتابة. والتعرف على فراغ العينة هو خطوة هامة في تحديد الإحتمالات لمختلف النواتج الممكنة. يرمز لفراغ العينة بالحرف الكبير S. نفرض أننا نلقي قطعتين مختلفتين من العملة، فهل يمكنك التعرف على فراغ العينة ؟أنه يتكون من أربع حوادث بسيطة (E4,E3,E2,E1) معروضة في الجدول (٣-١).

* من المقبول أن نفترض أن أحد النواتج مثل وقوف قطعة العملة على حافتها هو في واقع الأمر مستحيل

جدول (٣-١)
فراغ العينة عند إلقاء قطعتي عملة

حدث بسيط	العملة 1	العملة 2
E_1	صورة	صورة
E_2	صورة	كتابة
E_3	كتابة	صورة
E_4	كتابة	كتابة

غالباً نهتم بالبحث عن إحتمال أن ناتج ما، إما أن يكون صفة معينة أو كمية في مدى معين، فمثلا في الأمثلة المعروضة سلفا، ربما نبحث في إحتمالات وقوع الحوادث التالية:

* ألا يزيد عدد الرحلات التي لم تتم عن خمس رحلات وفق جداول الإقلاع.
* تفضيل المنتج A أو المنتج B (من بين عدة إختيارات أخرى).
* ألا يزيد عدد العملاء إلى مركز الخدمة عن 15 عميل خلال أسبوع.
* تعطل جهاز كهربائي خلال عام من إستخدامه.
* حجم المبيعات لمتجر التجزئة يتجاوز 100,000$ في يوم معين.
* طول أخر مكالمة تليفونية تزيد عن 30 دقيقة.
* الحصول علي 75 درجة أو أكثر في إختبار الإحصاء.

نواتج التجارب التي يمكن تجزئتها إلى حوادث أبسط تسمى بحوادث **Events** * فمثلا، أعتبر الحادث الممكن التالي:" على الأقل صورة واحدة" عند إلقاء قطعتي عمله في جدول (٣-١)، يلاحظ أن هناك ثلاث حوادث بسيطة E3,E2,E1 تشترك جميعها في هذه الخاصية. وتعرف الحادثة **Event** على أنها مجموعة حوادث بسيطة لها خصائص مشتركة محدده. ومن الممكن أن تكون الحادثة متحققة من خلال حدث بسيط واحد أو أن تكون الحادثة متحققة بأكثر من حادث بسيط أو ان تكون غير متحققة بأي حدث بسيط، وهي الحالة التي تعرف بأسم حادثة خالية أو فارغة **empty event**.

في داخل فراغ العينة، من الممكن أن نجد مجموعة تشمل حادثة بسيطة واحدة أو عدة حوادث بسيطة تشترك في خاصية معينة لتكون معا حدث معين، بينما باقى الحوادث البسيطة الأخرى تشترك في خاصية أخرى. هنا يقال أن الحدث قد وقع لو أن نتيجة التجربة هو الإهتمام بأحد الحوادث البسيطة التي تشترك في هذه الخاصية. فمثلا "يجتاز مقرر الإحصاء"، هو حدث ممكن في التجربة العشوائية "يدرس مقرر الإحصاء". فراغ العينة يتكون من العلامات الدرسية (حوادث بسيطة) F,D,C,B,A. " يجتاز المقرر الدراسي" يحدث إذا كان أي من العلامات المدرسية D,C,B,A متحققة. في هذا السياق، فراغ العينة هو في حد ذاته حادثة، وربما نفكر فيه على أنه حادث مؤكد **certain event** لأن أحد الحوادث البسيطة في فراغ العينة هو من المؤكد وقوعه عند القيام بالتجربة.

دعنا نتفق على إستخدام حروف كبيرة C,B,A. . . .أو حروف كبيرة مع دليل مثل A_1,A_2,A_3. . لترمز إلى الحوادث المختلفة. فيما يلي أمثلة للحوادث المكنة عند إلقاء قطعتي عمله (إنظر جدول(٣-١)).

* إضافة من المترجم: يقصد بالحوادث هنا الحوادث المركبة

A_1: الحدث "على الأقل صورة واحدة"، (E_3, E_2, E_1).

A_2: الحدث" على الأقل كتابة واحدة"، (E_4, E_3, E_2).

A_3: الحدث "لا يزيد عن صورة واحدة"، (E_4, E_3, E_2).

A_4: الحدث" لا يزيد عن كتابة واحدة"، (E_3,E_2,E_1).

لاحظ أن الحوادث A_4 , A_1 هي حوادث متطابقة بالمثل للحوادث A_3,A_2. إنهما ببساطة طريقتين لقول نفس الشئ. يلاحظ أيضا الخصائص المحددة يتم تقسيمها بحوادث بسيطة مثل A_1، وهو حدث يتكون من كل أزواج قطعتي العملة التي يظهر عليها صورة واحدة أو أكثر.

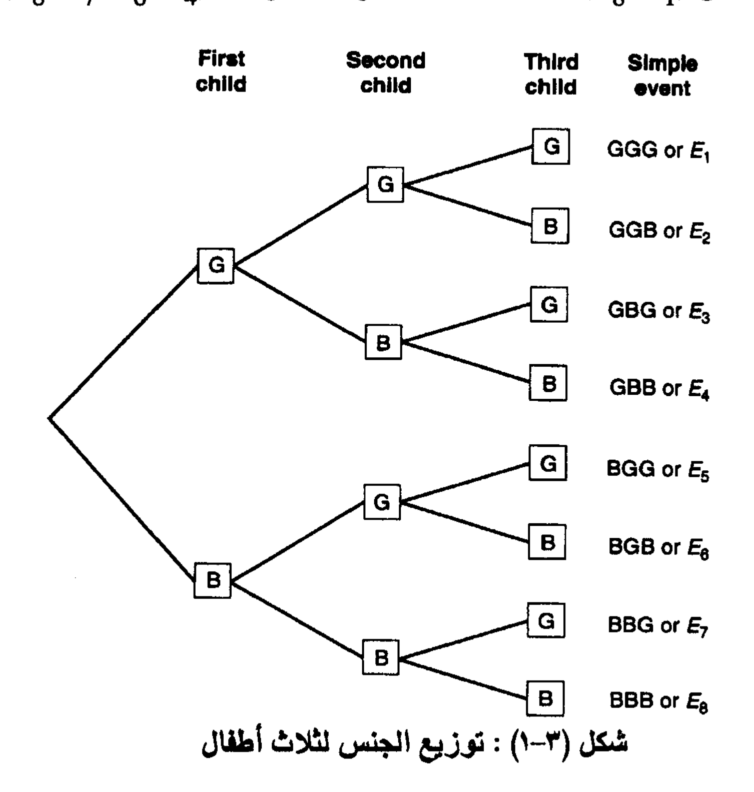
مثـــال (٣-٢)

تخيل تجربة تشمل زوجان لهما ثلاثة أطفال وفيها نهتم بمعرفة كل النواتج الممكنة لجنس الطفل(ولد، بنت). ولو كانت التجربة تشمل عددا كبيرا من الأزواج فنصفهم تقريبا سوف يرزق بنت في أول مرة والنصف الآخر سوف يرزق ولد في أول مرة. في مجموعة الأزواج ممن لديهم بنت أول مرة، بعضهم سوف يرزق بنتا أيضا في المرة الثانية والباقي سيرزق ولدا. ويمكن توضيح هذا السلوك بفروع في الرسم الشجري في شكل (٣-١). للتبسيط سنستخدم الرمز G (girl) والرمز B (boy)لتدل على بنت وولد على التوالي.

يلاحظ أن فراغ العينة لهذه التجربة يتكون من ثمان حوادث بسيطة BBB,GGB...,GGG ويرمز لها بالرموز $E_8,.......E_2, E_1$ على التوالي. وفيما يلي أمثلة عن حوادث في فراغ العينة هذا، وحوادثها البسيطة.

C: على الأقل بنتين، (E_5, E_3, E_2, E_1) D: بنتين بالضبط (E_5, E_3, E_2)

E: الكل من نفس الجنس (E_8, E_1).   F: بنت واحدة أو أقل (E_8, E_7, E_6, E_4)



شكل (٣-١) : توزيع الجنس لثلاث أطفال

الحوادث المتكاملة Complementary Events

عودة إلى المثال (٣-٢) دعنا نأخذ صورة قريبة للحوادث F ,C. الحدث C: " على الأقل بنتين" يتكون من الحوادث البسيطة E_1,E_2,E_3,E_5. الحدث F "بنت واحدة أو أقل" يتكون من الحوادث البسيطة: E_4,E_6,E_7,E_8. عند مقارنة هذين الحدثين، نجد ملاحظتين أساسيتين: محتويات الحدثين لا يوجد فيهما حوادث بسيطة مشتركة، ومحتويات الحدثين معا يكونا فراغ العينة بأكمله. مثل هذين الحدثين يعرفا على أنهما حوادث متكاملة Complementary Events . لذا فإن C هو الحدث المكمل لـF وأن F هو الحدث المكمل لـ C.

المكمل لأي حدث هو مفهوم هام وقد إستخدم عبر مادة هذا المرجع. لنفرض ان A أي حدث في فراغ العينة S، فإن مكمل Complement الحدث A ويشار إليه بالرمز $\overline{A}$ هو الحدث المحتوي على كل الحوادث البسيطة الموجودة في فراغ العينة ولكن ليست في A.

الحوادث المتنافية الشاملة Mutually Exclusive Events

نفرض أننا حددنا العديد من الحوادث المكنة في تجربة ما، فأذا كان من المستحيل وقوع أكثر من حادث واحد معا عند تنفيذ هذه التجربة، فإننا نقول أن هذه الحوادث هي حوادث متنافية شاملة mutually exclusive فمثلا، "الصورة، الكتابة" في إلقاء قطعة عملة واحدة هي حوادث متنافية شاملة، لأنه لايمكن أن تحدثا معا. والآن حاول بنفسك هذه التجربة: إذا ألقيت قطعتي عمله. هل الحوادث:"على الأقل صورة واحدة"، "على الأقل كتابة واحدة "هي حوادث متنافية وشاملة ؟ الإجابة لا. فبالرجوع إلى الجدول (٣-١) نجد أن الحدث البسيط E_2 (أيضا الحدث E_3) يحقق كلا الحدثين: إذ أنه يحتوي على الصورة والكتابة. كلا الحدثين "على الأقل صورة واحدة"، على الأقل كتابة واحدة " يقعا عندما يقع E_2 لذلك فهما ليسا حدثين متنافيين شاملين. بصفة عامة، يقال لأي حدثين بأنهما متنافيين شاملين إذا لم يشتركا في حوادث بسيطة.

تمــارين:

(٣-١) ما هو الغرض من التجربة العشوائية؟ أضرب مثالا لتجربة عشوائية.

(٣-٢) ماذا تطلق على مجموعة النواتج المكنة لتجربة عشوائية ؟ بالنسبة للمثال الذي ذكرته في التمرين (٣-١)، اسرد كل الحوادث المكنة في هذه التجربة.

(٣-٣)ماذا نطلق على مجموعة الحوادث البسيطة في تجربة عشوائية والتي لها خاصية مشتركة ؟ عرف مثل هذه المجموعة في إجابتك عن التمرين (٣-١).

(٣-٤) ماذا نطلق على حادثين لا يشملا على حادث مشترك بينهما.

(٣-٥) بالنسبة للتجارب العشوائية التالية، حدد فراغ العينة ثم اسرد كل الحوادث البسيطة المكنة.

(أ) إلقاء زهرة نرد ذات ستة أوجه. (ب) إلقاء ثلاث قطع عمله.

(٣-٦) أخذا في الأعتبار الجزء (ب) من التمرين (٣-٥)، أسرد الحوادث البسيطة الموجودة في الحالات التالية:

(أ) على الأقل صورة واحدة.

(ب) على الأكثر كتابة واحدة.

(جـ) على الأكثر صورة واحدة.

(د) صورتان بالضبط.

(هـ) كتابتان بالضبط.

(٣-٧) قام أحد المستثمرين بشراء أسهم من ثلاث شركات C,B,A . بإفتراض أنه بعد عام واحد ستكون قيمة السهم إما أعلى أو أقل من سعر الشراء.

(أ) اسرد كل النواتج بالنسبة لسعر السهم بعد مرور عام من الشراء.

(ب) اسرد الحوادث البسيطة التي تعبر عن الحدث "سهمان فقط ذو سعر أعلى".

(جـ) اسرد الحوادث البسيطة التي تعبر عن الحدث" على الأقل سهمان ذو سعر أعلى"

(د) اسرد الحوادث البسيطة التي تعبر عن الحدث" على الأكثر سهمان ذو سعر أعلى".

(هـ) اسرد الحوادث التي تعبر عن الحدث "سهم واحد فقط ذو سعر أعلى".

(٣-٨) بالنسبة للتمرين (٣-٦)، عرف واسرد الحوادث البسيطة التالية:

(أ) الحدث المكمل للحدث الوارد في (أ).

(ب) الحدث المكمل للحدث الوارد في (جـ).

(٣-٣) تفسير الإحتمال: تطبيقات الإحتمال في الحياة الواقعية Interpreting Probability

الإحتمال هو فرع من علم الرياضيات وهو مفيد جدا عند تعاملنا مع حالة عدم التأكد في العالم الذي نعيش فيه. في هذا الفصل، نناقش ثلاث تفسيرات للاحتمال إستخدمت لوصف الأوضاع الحقيقية وهي: التفسير التقليدي، تفسير التكرار النسبي، تفسير التقييم الشخصي.

في البداية سنتناول بإيجاز بعض المبادئ الأساسية في الإحتمال، بعد ذلك نناقش هذه التفسيرات للإحتمال. الإحتمال هو قياس رقمي لدرجة التأكد المقترنةبحدث ما. الإحتمالات تقع دائما بين صفر، 1. إذا كان حدث ما لا يمكن أن يقع فإن إحتمال هذا الحدث هو الصفر وإذا كان الحدث من المؤكد وقوعه فإن إحتماله هو الواحد. أما إذا كانت إمكانية وقوع الحدث مساوية لإمكانية عدم وقوعه، فإن إحتمال الحدوث هي 0.5. وكلما زادت إمكانية وقوع الحدث، كلما زادت القيمة الرقمية للإحتمال. ففي تجربة إلقاء قطعة العملة، وإذا كانت القطعةمتوازنة تماماً فإن إحتمال ظهور الصورة هو 0.5 لأن الصورة لها نفس فرصة الكتابة، لذا فإن إحتمال ظهور الصورة مماثل تماماً لإحتمال عدم ظهورها.

(٣-٣-١) التفسير التقليدي للإحتمال: The Classical Interpretation of Probability

إستخدام الإحتمال كوسيلة تقليدية لدراسة عدم التأكد ترجع إلى القرن السابع عشر. التطبيقات المبكرة شملت تحليل الألعاب وتحليل الفرص. هل الطلبة في ذلك الوقت مهتمين بشدة بألعاب المغامرة؟ لا، فقد كانوا مهتمين أساساً بمجالات أخرى مثل علم الأرصاد الجوية، الطب، الفلك. ولكن قطاع

العائلات الملكية في أوربا، كانت تلعب ألعاب المغامرة والحظ في الكازينوهات، وكانت تحتاج إلى مساعدة علماء الرياضيات لتحسين فرصهم في الكسب. كثير من ألعاب الصدفة أو الحظ كانت سهلة في تحليلها لأن خصائصها وقواعدها كانت تفهم جيداً، ونتائجها الممكنة ذات فرص متساوية في الحدوث. وقد كانت هذه الألعاب نقطة بداية مشجعة في هذا المجال لبذل الجهد فيه.

لنأخذ عملية رمي زهرة النرد، فإذا فرض أن الزهرة متوازنة تماماً، فإن الأوجه الستة الممكنة (1,2,3,4,5,6) جميعها ذات فرص متساوية لكي تسقط ويظهر إحداها. لنفرض أننا نهتم بظهور عددين عند رمي قطعتي نرد متوازنتين. هناك 36 من أزواج الأعداد تظهر في جدول (٣-٢).

جدول (٣-٢) قيم الأوجه الممكنة عند رمي قطعتي نرد

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

فإذا كانت القطعتين متوازنتين تماماً، فإن الحوادث البسيطة الـ36 تكون حوادث ذات فرص متساوية الوقوع، كما أنها حوادث متنافية وشاملة، بمعنى أنه لا يمكن أن يظهر على السطح العلوى للقطعتين حادثين أو أكثر من الحوادث الـ 36.

والآن دعنا نتأمل في إمكانية مشاهدة مجموع معين على القطعتين، فمثلاً ما هو إحتمال ظهور المجموع 7؟ بفحص الأزواج الـ 36 في الجدول (٣-٢)، فإننا لا نجد صعوبة في أن هناك 6 أزواج تعطي المجموع 7، خمس أزواج تعطي المجموع 8 وهكذا.. والعلماء اللذين قدموا الإحتمالات في بادئ الأمر، كانوا قادرين على إثبات رياضياً ما يلي: حيث أن الحوادث البسيطة الـ 36 هي حوادث متساوية الإحتمال، فإن الإحتمالات المفردة يجب أن تساوي 1/36. أيضاً أوضحوا: حيث أن الحوادث البسيطة الستة تعطي المجموع 7، فإحتمال حدوث 7 عند رمي قطعتي نرد متوازنتين بساوي 6/36، أي مجموع ست إحتمالات فردية.

هذا المنهج في حساب الإحتمالات والذي يطبق فقط عندما تكون الحوادث البسيطة الممكنة حوادث متنافية وشاملة وذات فرص (إحتمالات) متساوية، عرف على أنه التفسير التقليدي **classical interpretation** وينص على: "إذا كانت الحوادث البسيطة في تجربة ما هي حوادث ذات فرص متساوية ومتنافية شاملة، فإن إحتمال أي حدث يساوي نسبة عدد الحوادث البسيطة التي تحقق هذا الحدث إلى مجموعة الحوادث البسيطة الممكنة".

وعلى الرغم من أن التفسير التقليدي مفيد تماما في ألعاب الحظ، إلا أن عليه تحفظ شديد في التطبيقات الأخرى. صلاحية حساب الإحتمالات إعتمادا على التفسير التقليدي تعتبر جيدة فقط طالما أن الحوادث بسيطة ذات فرص متساوية. وفي التطبيقات الواقعية، فإن مثل هذه الفروض ربما يكون من النادر تحققها بصورة مؤكدة.

التفسير التقليدي

إذا كانت هناك تجربة خاضعة للصدفة لها نواتج K من الحوادث البسيطة المتنافية الشاملة وذات فرص متساوية، وإذا كان هناك K_A من هذه الحوادث البسيطة يحقق الحدث A، فإن إحتمال A يكون:

$$P(A) = \frac{K_A}{K}$$

مثــال (٣-٣)

إستكمالا للمثال(٣-٢) الذي يشتمل على أشكال الجنس المكنة للأسر ذات ثلاثة أطفال.

(أ) بالإشارة إلى شكل الشجرة في شكل (٣-١) وبتطبيق التفسير التقليدي، حدد الإحتمالات للحوادث F,E,D,C والتي عرفت من قبل على النحو التالي:

C: على الأقل بنتين، (E_5, E_3, E_2, E_1)

D: بنتين بالضبط (E_5, E_3, E_2)

E: الكل من نفس الجنس(E_8, E_1)

F: بنت واحدة أو أقل (E_8, E_7, E_6, E_4)

(ب) علق على أية قيود لبيان صحة إجابتك

الحـل

(أ) يجب أن نتذكر أن الحوادث البسيطة الثمانية في شكل (٣-١) هي حقا حوادث متنافية شاملة، فحدوث أحد أشكال الجنس (مثلا GBG) يستبعد حدوث أيا من الحوادث السبعة الباقية. فإذا فرض أن فرصة أن يكون المولود ولد تساوي فرصة البنت، فإن سلسلة نواتج الجنس الثمانية يجب أن تكون ذات فرص متساوية. أربع حالات متتالية تؤدى إلى احتمال الحدث C وقيمته 4/8. بالمثل إحتمال الحدث D هو 3/8 وإحتمال الحدث E يساوى 2/8 أما إحتمال الحدث F فهو 4/8.

(ب) تعتمد الإجابة على الفرض بأن الشروط الضرورية للتفسير التقليدي متحققة هنا. ومن المفترض أن ميلاد الولد ذو إحتمال يساوي ميلاد البنت فإذا كان هذا غير حقيقي، فإن الإجابات يمكن أن تكون غير صحيحة.

(٣-٣-٢) تفسير التكرار النسبي للإحتمال:

The Relative Frequency Interpretation of Probability

في الواقع يتميز التفسير التقليدي بسهولة فهمه وبوضوحه وبكثرة تطبيقاته. ومع ذلك فهناك الكثير من التجارب التي لا يمكن أن يطبق فيها هذا التفسير التقليدي. هذه التجارب اما أن لها خصائص غير معروفة جيدا أو ذات أحداث بسيطة غير متساوية الإحتمال. فمثلا لنأخذ تجربة فيها يختار طالب بطريقة عشوائية من فصل ما. ما هو إحتمال أن يكون هذا الطالب معتمدا على يده اليسرى في الكتابة ؟ على الرغم من أن كل طلبة الفصل لهم إحتمالات متساوية في عملية الإختيار، إلا أننا لا يمكن تحديد هذا الإحتمال، لأننا لا نعلم عدد الطلبة في الفصل ممن يستخدمون يدهم اليسرى. افترض أن هناك

قطعة عملة غير متوازنة، التفسير التقليدي لا يمكن استخدامه لتحديد احتمال ظهور الصورة أو الكتابة لأننا لا يمكن أن نفترض أن هذه الإحتمالات متساوية القيمة. مثل هذه المواقف وغيرها تؤدي إلى تفسير التكرار النسبي للإحتمال.

يعتمد تفسير التكرار النسبي على افتراض أن التجربة العشوائية يمكن تكرارها عدة مرات تحت نفس الظروف، وفي كل مرة تنفذ فيها التجربة تقوم بتسجيل نواتجها . هذه النواتج لا يمكن التنبؤ بها بسبب طبيعة الصدفة أو العشوائية للتجربة العشوائية. في بعض الأحيان قد يتحقق حدث معين وقد لا يتحقق، ولكن كلما كررنا التجربة العديد من المرات فإن هذا الحدث سوف يتحقق في نسبة من الوقت وبالتالي الإحتمال لأي حدث يمكن تعريفه على أنه نسبة من المرات أو المحاولات (أي التكرار النسبي) به يتحقق الحدث خلال عدد لا نهائي من تكرار التجربة تحت نفس الظروف.

حيث أن الأمر يتطلب تكرار التجربة عدد لا نهائي من المرات، فإن الإحتمال لا يمكن تحديده بدقة تامة لأنه لا يمكن تكرار عدد لا نهائي من المرات. ولكن يمكن تقريب الإحتمال لأي حدث عن طريق تسجيل التكرار النسبي الذي يتحقق به الحدث من خلال تكرار التجربة عدد محدد من المرات تحت نفس الظروف تقريبا. مثل هذا التقريب يسمى بالإحتمال التجريبي **empirical probability** لأنه يعتمد على تسجيل نواتج التجربة. عندما يقرر الطبيب أن نسبة الشفاء من أحد الأمراض هو 75% فهذا يعني أن 75% من كل المرضى المتشابهين في نفس المرض قد تم شفاؤهم. هذا مثال عن الإحتمال التجريبي ومن المهم أن تدرك أن الإحتمال التجريبي هو تقدير **estimate** لإحتمال وقوع الحدث والذي لا يمكن تحديده بدقة، وكلما زاد عدد المرات التي تكررها في التجربة زيادة كبيرة، كلما أقترب الإحتمال التجريبي للحدث من القيمة الحقيقية لإحتمال وقوع الحدث.

الآن نطبق تفسير التكرار النسبي في حساب احتمال ظهور الصورة عند رمي قطعة عملة واحدة. طبقا لهذا التفسير، فإن احتمال الصورة هو نسبة عدد المرات التي تظهر فيها صورة إذا ما القيت العملة عددا غير محدود من المرات. لتقريب هذا الإحتمال، فإننا يمكن أن نرمي القطعة 1000 مرة مثلا ونسجل عدد مرات ظهور الصورة. لاحظ أن نسبة الصور في المدى الطويل ستكون كبيرة وقريبة مثلا من 0.492 ويزداد الإقتراب من 0.5 كلما زاد عدد مرات الألقاء زيادة كبيرة جدا.

سنأخذ مثال آخر أكثر واقعية، وهو يتعلق بمشكلة تحديد نسبة الوحدات المعيبة المنتجة في ظل عملية إنتاجية مستقرة. للوصول إلى ذلك، فإننا نسحب عينة من عدد محدد من الوحدات، معتبرين أن كل وحدة يتم سحبها وكأنها تجربة. نتيجة كل تجربة تتحدد بتسجيل ما إذا كانت الوحدة معيبة أو لا. لنفرض اننا سحبنا عينة من 200 وحدة من هذه العملية الإنتاجية ووجدنا بها خمس وحدات معيبة. عندئذ التكرار النسبي (الإحتمال التجريبي) للوحدات المعيبة هو 5/200. بالطبع نحن نتوقع أن التكرار النسبي للوحدات المعيبة في العينة سيقترب من نسبة الوحدات المعيبة في العملية الإنتاجية، كلما زاد عدد الوحدات بالعينة.

تفسير التكرار النسبي

إذا كررت تجربة ما n من المرات تحت نفس الظروف، وكان n_B هو عدد الحوادث البسيطة التي يتحقق بها الحدث B ، فإن النسبة $\frac{n_B}{n}$ تقترب من احتمال وقوع الحدث B كلما زادتn زيادة كبيرة جدا. لذلك وطبقا لتفسير التكرار النسبي فإن احتمال وقوع الحدث B يكون على الصورة:

$$P(B) = \text{Limit of } \frac{n_B}{n} \text{ as n becomes infintely large.}$$

عند تكرار n عدداً مناسبا من المرات، فإننا يمكن أن نستخدم النسبة المشاهدة لوقوع الحدث B أي $\frac{n_B}{n}$ كتقريب للإحتمال المجهول P (B). لذلك فإن تقدير الإحتمال للحدث B يعطي بالإحتمال التجريبي:

$$P(B) \approx \frac{n_B}{n} \quad \text{If n is sufficiently large}$$

توضيح التكرار النسبي بواسطة الكمبيوتر:

لتوضيح تفسير التكرار النسبي للإحتمال، نستخدم الكومبيوتر لمحاكاة المعاينة لوحدات من عملية تصنيعية يفترض فيها أن نسبة الإنتاج المعيب 5% . في الحقيقة فإن هدفنا هو تقدير هذه النسبة. سنستخدم تسع قيم من أحجام العينات تتراوح من n=20 إلى 10,000 = n. عند كل حجم من هذه العينات، فإننا نحاكي المعاينة لهذا العدد من الوحدات من العملية التصنيعية ونحصر عدد الوحدات المعيبة والنتائج معطاه في جدول (٣-٣). من الواضح أن التكرار النسبي للوحدات المعيبة يقترب من النسبة 05. كلما زادت n. وهكذا، في مثل هذه الحالات، يمكننا أن نستخدم نسبة المعيب في العينة كتقريب لإحتمال ظهور وحدة معيبة في العملية الإنتاجية.

جدول (٣-٣): نتائج محاكاة تجربة بالكمبيوتر

عدد الوحدات بالعينة n	العدد المشاهد من الوحدات المعيبة	التكرار النسبي
20	2	.10
50	3	.06
100	4	.04
200	12	.06
500	28	.056
1000	54	.054
2000	97	.0485
5000	244	.0488
10000	504	.0504

(٣-٣-٣) تفسير التقييم الشخصي للإحتمال :

The Subjective Assessment Interpretation of Prabability

إن تطور تفسير التكرار النسبي قد سمح بتطبيق الإحتمالات على التجارب التي تفتقد الخصائص المعروفة جيدا، أو على الحوادث البسيطة غير متساوية الإحتمال. وعلى الرغم من أن الإحتمالات لا يمكن تحديدها بدقة بهذا التفسير، إلا أن الإحتمالات التجريبية تعطي نتائج دقيقة طالما أن التجربة يتم تكرارها عددا كافيا من المرات. ومع ذلك فنحن غالبا ما نتخذ قرارات تتعلق بتجارب لا تسمح بعملية التكرار ولكنها تحتاج باستمرار إلى بعض أفكار الإحتمالات وإليك بعض الأمثلة:

عند التفكير في شراء أسهم فإن المرء عادة مايقوم بتقييم خطر مثل هذا الإستثمار.

عندما تكون هناك لوحة فنية ثمينة للغاية يتم التأمين عليها ضد السرقة أو التلف، فإن شركة التأمين يجب أن يكون لديها فكرة عن المخاطر المتضمنة عملية تقييم قسط التأمين الملائم.

عندما قررت شركة زيروكس Zerox الإستثمار بشكل كبير في تطوير اختراع جديد اطلق عليه الناسخ(ألة التصوير) لم تكن هناك احتمالات عملية متاحة لتوضيح احتمالات النجاح لها. لقد كان هذا موقفا فريدا إلا أن القرار قد تم اتخاذه بالقيام بالإستثمار في هذا المجال.

في جميع الأمثلة السابقة لا يمكننا أن نتخيل أنه يمكن تكرار التجربة تحت نفس الظروف، وكل ما علينا هو أن نصيغ أو نضع عبارة إحتمالية لذلك فعلى سبيل المثال، عندما يقول شخص ما "الشحنة من المحتمل أن تصل غدا"، أو عندما يقوم سمسار بأبداء النصح إلى عميل، بأن سهما معينا من المحتمل أن تزداد قيمته، فإن إفتراضات فرص الحدوث، يكون تم اقتراحها بصورة شخصية.

أن الإحتمالات المتعلقة بالأمثلة السابقة، لا يمكن أن تستند إلى مفهوم التكرار النسبي، ولكن يتم التعبير عنها بدرجة من الأعتقاد الشخصي أو إقتناع بإمكانية وقوع هذا الحدث. في هذا السياق فإن الإحتمال يمثل حكما شخصيا يتعلق بظاهرة لا يمكن التنبؤ بحدوثها. هذا التفسير للإحتمال يطلق عليه التقييم الشخصي **subjective assessment** . فعلى سبيل المثال طلب من إثنين (A,B) من مهندسي شركة البترول أن يقيما مدى إمكانية أكتشاف بترول في منطقة معينة، وكل منهما لم يرى مطلقا من قبل منطقة مماثلة تماما لهذه المنطقة، وبالتالي فإن المعلومات السابقة عن التكرار النسبي لمثل هذا الموقع غير متاحة. المهندس A، كان رده أنه متأكد بنسبة 80% أن البترول سوف يكتشف في هذه المنطقة، بينما المهندس B أكد أن هناك بترول بنسبة 70% سوف يظهر في المنطقة. بطريقة بديلة، إجابات B,A تعني ضمنيا أنه بالتأكيد لن يكتشف بترول في هذه المنطقة بنسبة 30%,20% على التوالي. كل نسبة تم اقرارها تقيس درجة إعتقاد المهندس (أو درجة التأكد) بأن البترول سوف يكتشف. وهكذا نجد أن قياسات مختلفة لدرجة الإعتقاد ربما تخصص لنفس الموقف من قبل أشخاص مختلفين.

إن القارئ بحاجة إلى أن يتفهم مدخل التقييم الشخصي للإحتمال لكي يمكن تطبيقه على التجارب المتكررة. المثال التالي يعد مثالا شائعا. افترض أن سجلات مبيعات شركتك اشارت إلى أن 8% من كل مكالمات البيع تم بعدها عملية البيع، وهكذا فإن الإحتمال التجريبي للبيع هو 8%. هل هذا يعني أن الإحتمال الخاص بمكالمات البيع القادمة سوف تنجح بنسبة 8% ؟ هذا ليس ضروريا. الإحتمال التجريبي او العملي يعبر بصفة عامة عن أداء قوة البيع في التعامل مع العديد من الزبائن المحتملين. فأنت ربما تعتقد أنه من الممكن أن تنجح وتزيد في المبيعات عن متوسط المبيعات المعروف، أو ربما تعتقد أن عملائك المحتملين يكونوا شغوفين بمنتجاتك. في كل حالة، يكون لديك أحساس بتقييم شخصي لدرجة احتمال النجاح، ومن ثم يكون الاحتمال التجريبي هنا غير مناسبا. مع معلوماتك الشخصية، فإن هذا التكرار الخاص للتجربة يغير من شروط التجربة وبالتالي تصبح حدث وحيد، بسبب مثل هذه التطبيقات، فإن مدخل التقييم الشخصي للإحتمال قد تناوله العديد ليصبح أكثر عمومية عن مدخل التكرار النسبي.

(٣-٤) القواعد الأساسية للإحتمالات: The Fundamental Rules of Probability

الإحتمال لأي حدث بسيط في فراغ العينة هو عدد يقيس إمكانية وقوعه عند إجراء التجربة. وبنفس المعنى، فإن الاحتمال لحدث ما هو عدد يقيس امكانية تجمع مجموعة من الأحداث البسيطة والتي تحقق

هذا الحدث عند إجراء التجربة. وأيا كانت مناهج الإحتمال (التقليدي، التكراري النسبي، التقييم الشخصي) فإن القواعد الأساسية للإحتمال يجب أن تتحقق. افترض أن B,A حوادث في فراغ العينة S . القواعد التالية هى قواعد أساسية في الإحتمالات:

القاعدة الأولى : $O \leq P(A) \leq 1$. هذه القاعدة تؤكد أن جميع الإحتمالات، هي أعداد تقع بين الصفر والواحد الصحيح.

القاعدة الثانية : $P(S) = 1$. هذه القاعدة تؤكد أن أي حدث بسيط في فراغ العينة من المؤكد وقوعه عند إجراء التجربة.

القاعدة الثالثة : إذا كان B,A حدثان متنافيان فإن :

$$P \text{ (either A or B)} = P(A) + P(B)$$

هذه القاعدة تؤكد ان إحتمال حدوث A أو B من الحوادث المتنافية هو مجموع إحتمالات حدوث كل منهما.

مدلولات هذه القواعد بسيطة جدا لكنها في غاية الأهمية:

* لاحظ أن الإحتمال لحدث ما لا يمكن أن يكون عددا مثل 1.7 أو 0.4-، فطبقا للقاعدة الأولى، جميع الإحتمالات يجب أن تقع بين (صفر، 1)

* إذا كان هناك حدثا ما، لا يمكن أن يقع، فإن إحتماله هو صفر، وإذا كان هناك حدثا من المؤكد وقوعه فإن احتماله هو واحد صحيح. إذا كان إحتمال الحدث قريبا من الصفر، فهذا يعني أن هذا الحدث له فرصه ضعيفة في الحدوث، أما اذا كان احتمال الحدث قريبا من الواحد، فهذا يعني أن الحدث له فرصة كبيرة في الحدوث.

* القاعدة الثانية توضح أنه وفقا لتعريف فراغ العينة، فإن بعض الأحداث البسيطة داخل فراغ العينة يجب أن تقع، فمثلا عند إلقاء قطعة العملة فإن الصورة أو الكتابة لابد من ظهورها.

* من النتائج الهامة عن القاعدتين الثانية والثالثة، أن أحتمالات الحوادث البسيطة في تجربة عشوائية يجب أن يكون مجموعها واحد. فمثلا عند إلقاء قطعة العملة فإن احتمالات الصورة والكتابة يجب أن يكون مجموعهم واحد. وعند إلقاء قطعة نرد واحدة فإن احتمالات ظهور الأوجه 1,2,3,4,5,6, يجب أن يكون مجموعها يساوى الواحد. إذا كان عدد الدراجات التي تباع فى أحد المحلات في يوم معين تتراوح ما بين صفر، 25 فإن احتمالات بيع: صفر، 3,2,1. . . . . ، 25 دراجة في أي يوم يكون مجموعها مساويا واحد صحيح.

اعتبر عملية القاء قطعة نرد متوازنة، الحوداث البسيطة المكنة هي: 6.5.4.3.2.1 وهي حوادث شاملة ومتنافية، وحيث أن القطعة متوازنة فإن تلك الحوادث البسيطة هي أيضا ذات احتمالات متساوية. لذلك فإن كل وجه يكون له الإحتمال 1/6. لنفرض أننا نبحث عن احتمال ظهور رقم زوجي. تخبرنا القاعدة الثالثة أنه يمكن تجميع الأحتمالات المفردة لكل من الأوجه 6,4,2 وبالتالي فإن احتمال ظهور رقم زوجي يساوي: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

إليك تطبيق أخر مهم على القاعدة الثالثة. أي حدث A والحدث المكمل له $\overline{A}$ هماحوادث متنافية شاملة بالتعريف، فوقوع $\overline{A}$ تعنى أن A لا يمكن أن تقع والعكس صحيح. وحيث أنه من المؤكد أن

أحدهما A أو $\overline{A}$ سوف يقع، فإن احتمال وقوع A أو $\overline{A}$ يساوي واحد. والآن، القاعدة الثالثة توضح أن إحتمال وقوع A أو $\overline{A}$ يساوي مجموع احتمالات وقوع كل منهما لذا:

$$P(\text{either } A \text{ or } \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

وبالتالي:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad . \qquad (3.1)$$

أي أن احتمال الحدث المكمل يساوي واحد مطروحا منه احتمال الحدث نفسه، ويعرف ذلك بأسم قاعدة الإحتمال للحوادث المكملة، **probability rule for complementary events**. والنتيجة المهمة التي نخرج بها أنه إذا علمنا وقوع حدث ما- فإنه يمكن تحديد احتمال عدم وقوع هذا الحدث، أي الحدث المكمل وذلك بطرح احتمال الحدوث من واحد صحيح. نفرض انك قدرت بموضعية أن احتمال حصولك على تقدير A أو B في مادة الإحصاء سيكون 0.4 فإن إحتمال عدم حصولك على A أو B يساوي 0.6 = 1-0.4

الإحتمالات الشرطية والمشتركة: Joint and Conditional Probabilities

غالبا ما نهتم بالإحتمال المشترك لوقوع حادثين أو أكثر في تجربة عشوائية. أعتبر حالة الحصول على واحد بستونى عند سحب كارت من مجموعة أوراق اللعب. هذا الكارت يمثل حدوث مشترك لحادثين: سحب كارت يحمل الرقم واحد، سحب كارت بستوني، مندوب المبيعات الذي يحمل منتجين ربما يكون مهتما باحتمال أن يشترى العميل كلا المنتجين معا، هنا الحادث يمثل الحدوث المشترك لحادثين: العميل يشترى المنتج A والعميل يشتري المنتج B. احتمال الحدوث المشترك لحادثين أو أكثر يسمى بالإحتمال المشترك **Joint probability**. الإحتمال المشترك لحادثين A, B يرمز له: P (both A and B).

في بعض الأحيان، يتغير الإحتمال لحادث ما بسبب حصولنا على معلومات إضافية. اعتبر المثال التالي. افترض أننا تسلمنا دفعة من 100 بطارية سيارة. هذه الدفعة تحتوي على خمس بطاريات معيبة، لكننا لا نعرفهم. إذا سحبت بطارية واحدة بطريقة عشوائية من هذه الدفعة وتم فحصها، فإن احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة هو 5/100. الآن افترض أن هذه البطارية وجدت فعلا أنها معيبة. إذا سحبت بطارية ثانية بطريقة عشوائية وأختبرت، ما هو احتمال أن تكون أيضا معيبة؟ بعد سحب أول بطارية يتبقى 99 بطارية في الدفعة بهم أربع وحدات معيبة وبالتالي، احتمال أن تكون البطارية الثانية معيبة يصبح 4/99. من ناحية أخرى، إذا كانت أول بطارية تم سحبها سليمة، فإن الدفعة يكون مازال بها خمس وحدات معيبة، وفي هذه الحالة فإن احتمال أن تكون البطارية الثانية معيبة هو 5/ 99. وهكذا فإن احتمال أن تكون البطارية الثانية معيبة يعتمد على ما نعرفه حول أول بطارية تم سحبها. هذا المثال يوضح ما يسمى بالإحتمال الشرطي. الإحتمال الشرطي **conditional probability** هو احتمال وقوع حدث واحد بشرط معلومية وقوع حدث آخر. الإحتمال الشرطي لوقوع الحدث A بشرط معلومية وقوع الحدث B يكتب على الصورة P (A, given B) .

الاستقلال الإحصائي للحوادث: Statistically Independent Events

لنفرض أننا القينا وبعناية قطعة عملة سليمة ومتوازنة مرة واحدة وسجلنا الحدث «كتابه». افرض اننا القينا القطعة مرة ثانية وسجلنا الحدث «كتابه». هل إحتمال الحصول على «كتابه» في الرمية الأولى يغير من احتمال الحصول على «كتابه» في الرمية الثانية؟ هل تعتقد أن احتمال الصورة في

الرمية الثانية، إذا وقعت الصورة في الرمية الأولى سيختلف عن 0.5 ؟ الإجابة بالطبع لا ، لأن الحادثين: صورة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية هما حوادث مستقلة إحصائيا. بصفة عامة، يطلق على الحادثين B,A أنهما حوادث مستقلة **Statistically Independent** إذا كان احتمال الحادث B لا يتأثر بمعلومات تتعلق بوقوع الحادث A. وهكذا إذا كان هناك حادثين مستقلين، فإن احتمال وقوع B يساوي الإحتمال الشرطي لوقوع B بشرط معلومية وقوع A.

إفترض اننا القينا قطعة عملة متوازنة مرتين، ما هو احتمال الحصول على صورة في الرميتين ؟ حسنا، هناك اربع نواتج ممكنة: (صورة، صورة)، (صورة، كتابة)، (كتابة، صورة)، (كتابة، كتابة). إذا كانت الإحتمالات في الرمية الثانية لا تعتمد على نواتج الرمية الأولى، فإن النواتج الأربعة تكون ذات احتمالات متساوية وكل ناتج له احتمال حدوث $\frac{1}{4}$.

ولكن هناك وسيلة أخرى مفيدة جدا لأيجاد هذا الإحتمال يمكن استخدامها متي كانت الحوادث مستقلة احصائيا. احتمال ظهور الصورة في الرمية الأولى يساوي $\frac{1}{2}$ ، بالمثل احتمال ظهور الصورة في الرمية الثانية يساوي $\frac{1}{2}$. فإذا كانت نواتج الرميتين مستقلة احصائيا، فإن احتمال ظهور الصورة في الرميتين يساوي $\frac{1}{2} x \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. بصفة عامة فإننا نحصل على احتمال الحدوث المشترك لحادثين مستقلين احصائيا أو أكثر من ذلك، عن طريق ضرب احتمال كل منهما في الآخر. وهكذا إذا كانت B,A حادثين مستقلين احصائيا، فإن احتمالهما المشترك هو حاصل ضرب احتمال كل منهما في الآخر:

$$P\ (\text{both A and B}) = p\ (A)\ P\ (B) \qquad (3.2)$$

مثــال (٣-٤)

افترض أن مندوب مبيعات قدم مقترحات بيع إلى ثلاث عملاء. هذا المندوب قدر بموضوعية أن احتمال النجاح مع كل عميل سيكون 0.6 .

(أ)وضح ماذا نعني بقولنا أن قرارات العملاء الثلاثة مستقلة احصائيا.

(ب)مفترضا أن تلك القرارات مستقلة احصائيا، أوجد احتمال قبول المقترحات الثلاث.

الحــل

(أ) تكون القرارت مستقلة احصائيا إذا كان احتمال النجاح أو الحدوث لكل واحد منهم لا يتأثر بمعلومية نواتج القرارات الآخرى. في هذا المثال، إذا كان مندوب المبيعات يعلم أن أول عميل قد قبل الإقتراح، فإن احتمال النجاح مع باقي العملاء يظل 0.6.

(ب) إذا كانت المقترحات مستقلة احصائيا، فإن الإحتمال المشترك لقبول كل المقترحات يكون حاصل ضرب احتمال كل واحد منهم في الآخر، أي: احتمال قبول المقترحات الثلاث = 0.6x0.6x0.6=0.216 (أي حوالي 22%). على الرغم من أن كل اقتراح له فرصة جيدة من النجاح، فإنه من غير المحتمل قبول المقترحات الثلاث معا، إذا كانت القرارات حقيقة مستقلة احصائيا.

دعنا الآن نعود إلى مثال معاينة بطاريات السيارات. لقد رأينا أن احتمال ظهور بطارية معيبة في السحبة الثانية يعتمد على ما نعلمه حول البطارية الأولى. احتمال أن تكون البطارية الثانية معيبة يساوي 4/99 إذا كانت البطارية الأولى معيبة أو يساوي 5/99 إذا كانت البطارية الأولى سليمة. لذلك

فنواتج أول وثانى بطارية ليسوا مستقلين احصائيا. الآن إذا قمنا بارجاع أول بطارية بعد فحصها إلى الدفعة (اللوط) قبل القيام بسحب البطارية الثانية، ما الذي يحدث؟ في هذه الحالة نجد أن البطارية الثانية تسحب من الدفعة الأصلية المكونة من 100 بطارية وبالتالي يكون احتمال أن تكون البطارية الثانية معيبة هو 5/100 بغض النظر عن ما نعلمه حول البطارية الأولى أيا كانت معيبة أم سليمة. لذا، طالما أن كل بطارية تسحب يتم ارجاعها إلى اللوط قبل الإختيار العشوائي التالي، فإن احتمال اختيار بطارية معيبة يبقى ثابتا بدون تغير عند 5/100. كما أن نتيجة البطارية الثانية تكون مستقلة إحصائيا عن نتيجة البطارية الأولى.

خطة المعاينة التي يتم فيها دائما ارجاع المفردة إلى الدفعة قبل القيام بالأختيار التالي، تعرف باسم المعاينة مع الإحلال **sampling with replacement**. والمعاينة مع الإحلال تؤدي إلى حوادث مستقلة احصائيا، من ناحية أخرى، عندما لا يتم إرجاع المفردة إلى الدفعة قبل القيام بسحب المفردة التالية، فإن هذا يسمى المعاينة بدون إحلال **Sampling Without replacement**. والمعاينة بدون إحلال تؤدي إلى حوادث غير مستقلة إحصائيا. يقال أن إثنين أو أكثر من الحوادث أنهما حوادث غير مستقلة احصائيا إذا كان احتمال وقوع احدهما يتأثر بما تعرفه عن وقوع الحوادث الأخرى. يلاحظ هنا أن المعاينة مع الإحلال تحتفظ بفراغ العينة سليما تماما، ولكن المعاينة بدون إحلال يتغير معها فراغ العينة. في مثال البطاريات، طالما أن كل بطارية تسحب يتم ارجاعها إلى الدفعة فإن (فراغ العينة) الدفعة ستكون دائما مكونة من 100 بطارية منهم خمس بطاريات معيبة، أما إذا لم يتم ارجاع أو إحلال البطارية التي تسحب فإن اللوط (فراغ العينة) يتغير حجمه.

معظم الطرق الإحصائية التي ستقدم فيما بعد في هذا الكتاب، يناسبها الإستقلال الإحصائي ضمن خطط المعاينة، ومع ذلك فدائما تتم المعاينة بدون احلال تقريبا. الا يبدو هذا متناقضا ؟ لقد علمنا منذ قليل أن الإستقلال الإحصائي لا يتحقق مع المعاينة بدون احلال. حل هذا التناقض يكون في الإطارات التي تسحب منها العينات، وهى عادة كبيرة بدرجة كافية حتى أن التغير في قيمة الإحتمال من سحب مفردة عشوائيا إلى المفردة التالية يكون غير هام. لتوضيح هذه النقطة، افترض اننا نرغب في إختبار بطاريتين من دفعة حجمها 10,000 بطارية بها 500 بطارية معيبة. احتمال أن اول بطارية تسحب تكون معيبة هو $\frac{500}{10,000} = 0.05$. افترض أن أول بطارية سحبت وأختبرت كانت معيبة وأنه لم يتم إرجاعها إلى الدفعة قبل القيام بسحب بطارية ثانية، هذا يعني أنه يبقي 9999 بطارية في الدفعة بهم 499 بطارية معيبة. لذلك فإحتمال أن تكون البطارية الثانية التي تسحب تكون معيبة هو = $\frac{499}{9999}$ 0.049905 وحيث أن احتمال المعيب في السحبة الثانية اعتمد على نتيجة السحبةالأولى، فإن نتيجة السحبة الأولى والسحبة الثانية هما حوادث غير مستقلة احصائيا. ومع ذلك فمن الناحية العملية يلاحظ أن الفرق بين 0.05 , 0.049905 هو فرق ضئيل يمكن اهماله، وعلى ذلك يكون من المقبول استخدام الطرق الإحصائية التي تفترض الإستقلال الإحصائي عندما يتم تبني المعاينة بدون احلال من أطارات **Frames** كبيرة في حجمها.

مثــال (٣-٥)

(هذا المثال يوضح أن إختيار مفردة وراء الأخرى بالمعاينة العشوائية بدون احلال في الأغراض العملية هي حوادث مستقلة احصائيا، إذا كان حجم الاطار كبيرا بدرجة كافية)، افترض ان اقصى زمن استجابة مقبول حاليا يتعدى 20% لكل خدمات المكالمات التليفونية. في دراسة عن كفاءة هذه

الخدمة، اختيرت عينة عشوائية من أحدث 20 مكالمة وذلك من إطار يتكون من أحدث 1000 مكالمة. هل من المقبول أن تعتبر سلسلة نواتج العينة حوادث مستقلة إحصائيا ؟

الحـــل

نواتج العينة تعتبر حوادث مستقلة إذا كان احتمال كل ناتج لا يتأثر بما نعرفه عن النواتج سابقة. افترض أن 200 من 1000 مكالمة حديثة تتعدى الحد الزمني المقبول، وعلى ذلك فإن إحتمال أن تتعدى أول مكالمة الحد الزمني المقبول هو 0.2 . احتمال أن تتعدى ثاني مكالمة الحد الزمني المقبول0.1992= $\frac{199}{999}$ أو هو 0.2002= $\frac{200}{999}$ إعتمادا على ما إذا كانت أول مكالمة تتعدى الحد الزمني المقبول أو لا تتعداه على التوالي. هذه الإحتمالات تختلف عن بعضها بكمية ضئيلة جدا ويمكن إهمالها. لذلك، يعتبر عمليا أن نواتج أول مكالمتين في العينة هما حوادث مستقلة إحصائيا.

هذه الطريقة في التحليل يمكن أن تستمر حتى السحبة العشرين. في السحبة العشرين، احتمال أن تتعدى الحد الزمني المقبول هو 0.185= $\frac{181}{981}$ (هذا إذا كان أول 19مكالمة تتعدى الحد الزمني). أو هو 0.0204= $\frac{200}{981}$ (هذا إذا كان أول 19 مكالمة لم تتعدى الحد الزمني) و يلاحظ هنا أننا نرى قدرا من الأعتماد أو عدم الإستقلال ولكن هذا ليس بدرجة مفرطة أو زائدة.

مثـــال (٣-٦)

صاحب مصنع يؤكد لعملائه أن معدل فشل منتجاته لا يتعدى 0.0005 في المتوسط، أي أن احتمال أن يتعطل (يفشل) المنتج أثناء استخدامه في أى وقت لا يزيد عن 0.0005 . المشكلة ان هناك جزء رئيسي في هذا المنتج معدل تعطله 0.001 . لتخفيض هذا المعدل في هذا الجزء، قام صاحب المصنع بتصميم نسخة اضافية بديلة لهذا الجزء تركب داخل المنتج. فإذا تعطلت النسخة الأصلية فإن المنتج يظل يؤدي عمله مالم تكن النسخة البديلة قد تعطلت أيضا. معدل تعطل النسخة البديلة هو أيضا 0.001. مفترضا أن معدل تعطل النسخة الإضافية مستقلا احصائيا عن معدل تعطل النسخة الأصلية، حدد الاحتمال المشترك لتعطل كلاهما.

الحـــل

حيث أن معدل تعطل النسخة الأصلية مستقل إحصائيا عن معدل تعطل النسخة الإضافية، فإن الإحتمال المشترك لتعطل كلاهما يكون حاصل ضرب احتمالات التعطل لكل منهما.

إحتمال تعطل كلاهما = احتمال تعطل النسخة الأصلية × احتمال تعطل النسخة الاضافية

$$= 0.001 \times 0.001 = 0.000001$$

وهكذا يكون احتمال تعطل كلاهما هو واحد من مليون.

ملخص : عناصر التجربة العشوائية والقواعد الأساسية للإحتمال: A Summary

فيما يلي نلخص (١) العناصر الأساسية في التجربة العشوائية (٢) القواعد الأساسية في الإحتمالات.

تعريفات للعناصر الأساسية في التجربة العشوائية

١- **التجربة العشوائية random experiment** : هي عملية الحصول على معلومات من خلال تسجيل أو قياس ظاهرة ما نواتجها تخضع للصدفة.

٢- **الحدث البسيط simple event** : هو احد النواتج الأساسية في التجربة وهو حدث لا يمكن تجزئته إلى حوادث بسيطة أخرى.

٣- **فراغ العينة sample space** : فراغ العينة لتجربة عشوائية هو تجميع لكل الحوادث البسيطة الممكنة في التجربة.

٤- **الحدث event** : الحدث هو مجموعة الحوادث البسيطة التي تقع داخل فراغ العينة ولها خصائص مشتركة.

٥- **المكمل complement** : مكمل الحدث A هو حدث يحتوي على كل الحوادث البسيطة الموجودة في فراغ العينة ولا تحقق الحدث A.

٦- يقال لحادثين أو أكثر أنهما حوادث شاملة متنافية mutually exclusive إذا لم يكن بينهم حوادث بسيطة مشتركة.

القواعد الأساسية للإحتمالات

١- احتمال أي ناتج (حدث) هو دائما عدد يقع بين صفر، وواحد.

٢- إذا كان هناك K من الحوادث البسيطة المتنافية الشاملة وذات فرص متساوية في تجربة ما، فإن احتمال أي حدث بسيط منهم = 1/K.

٣- إذا كان هناك تجربة بها K من الحوادث البسيطة المتنافية الشاملة وذات فرص متساوية وكان هناك K_A من هذه الحوادث يحقق الحدث A فإن احتمال وقوع الحدث A هو:

$$P(A) = \frac{K_A}{K}$$

٤- إذا كان هناك حادثين متنافيين شاملين، فإن احتمال وقوع احدهما أو كلاهما هو مجموع احتمالات وقوع كل منهما.

P (either A or B) = P(A) + P (B)

إذا كان A,B حادثين متنافيين شاملين

٥- يمكن تقدير احتمال وقوع حدث ما بتسجيل التكرار النسبي الذي يقع به هذا الحدث من خلال تكرار التجربة عدة مرات تحت نفس الظروف.

٦- يمكن تقدير احتمال وقوع حدث ما عن طريق التقييم الشخصي لدرجة اعتقادنا بأن ذلك الحدث سوف يقع. درجة الإعتقاد يعبر عنها كنسبة حدوث مفضلة.

٧- احتمال أن حادث ما لن يقع يساوي واحد مطروحا منه احتمال أن هذا الحدث قد وقع (قاعدة الإحتمال للحوادث المكملة) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

٨- إذا كان هناك حادثين مستقلين احصائيا، فإن احتمال وقوعهما المشترك يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع كل منهما

P (both A and B) = P (A) x P (B)

تمارين:

(٣-٩) اشرح معني الإحتمال ؟

(٣-١٠) قارن بين تفسيرات الإحتمال الثلاث.

(٣-١١)حدد الفترة التي يقع داخلها الإحتمال ثم فسر حدود هذه الفترة.

(٣-١٢) فسر لماذا يكون احتمال الحدوث المؤكد يساوي واحد.

(٣-١٣) اشرح الفرق بين الحوادث المستقلة احصائيا والحوادث غير المستقلة احصائيا.

(٣-١٤) اشرح الفرق بين المعاينة مع الإحلال والمعاينة بدون أحلال في سياق التمرين (٣-١٣).

(٣-١٥) ألقيت زهرة نرد متوازنة ذات ست اوجه. ما هو إحتمال:

(أ) ظهور الرقم 5 (ب) ظهور رقم زوجي.

(جـ) ما هو منهج الإحتمال الذي استخدمته في الإجابة عن (أ)، (ب) ولماذا؟

(٣-١٦) سحبت ورقة بطريقة عشوائية من مجموعة أوراق اللعب. ما هو إحتمال:

(أ) أن تكون الورقة حمراء. (ب) أن تكون الورقة صورة.

(جـ) هل المنهج الذي استخدمته في أ، ب هو نفسه في التمرين (٣-١٥) ؟.

(٣-١٧) في أحد الأيام العادية، لاحظ مدير مكتب الإتصال أنه من كل 80 مكالمة تصل إلى المكتب، هناك 25 مكالمة لا يمكن تلبيتها فورا ويطلب من صاحبها الإنتظار.

(أ) بناء على هذه المعلومات، ما هو احتمال أن يطلب منك الإنتظار إذا ما قمت بالإتصال بهذا المكتب.

(ب) ما هو منهج الإحتمال الذي استخدمته في الوصول إلى الإجابة عن (أ) اشرح ذلك.

(٣-١٨) في أحد الأسابيع العادية لاحظ صاحب محل للهدايا أنه من كل 400 زبون يدخلون المحل، يقرر في آخر الأمر 280 منهم الشراء.

(أ) بناء على هذه المعلومات، ما هو إحتمال أن شخص ما يقرر الشراء؟

(ب) ما هو منهج الإحتمال الذي استخدمته في الوصول إلى الإجابة عن (أ) ؟ ولماذا؟

(٣-١٩) نصحت من أحد السماسرة بأن فرص زيادة سهم معين في قيمته تقدر بـ 3 من 5 خلال الشهر القادم.

(أ) ما هو احتمال أن هذا السهم سوف يزداد في قيمته الشهر القادم.

(ب) ما هو منهج الإحتمال الذي استخدمته في الوصول إلى الإجابة عن (أ) ؟

(٣-٢٠) يقدر إحد الأندية الكبرى أن فرص فوزه ببطولة الدوري العام الحالي بـ 7 من 10.

(أ) ما هو احتمال فوز هذا النادي ببطولة الدوري هذا العام.

(ب) ما هو منهج الإحتمال الذي استخدمته في الوصول إلى الإجابة عن (أ) ؟

(٣-٢١) مستخدما الشجرة البيانية، اسرد كل الحوادث البسيطة الممكنة التي تمثل النوع للأسر ذات أربعة أطفال، بعد ذلك حدد الحوادث التالية:

A: على الأقل ثلاثة أولاد.　　　　B: كلهم من نفس النوع.

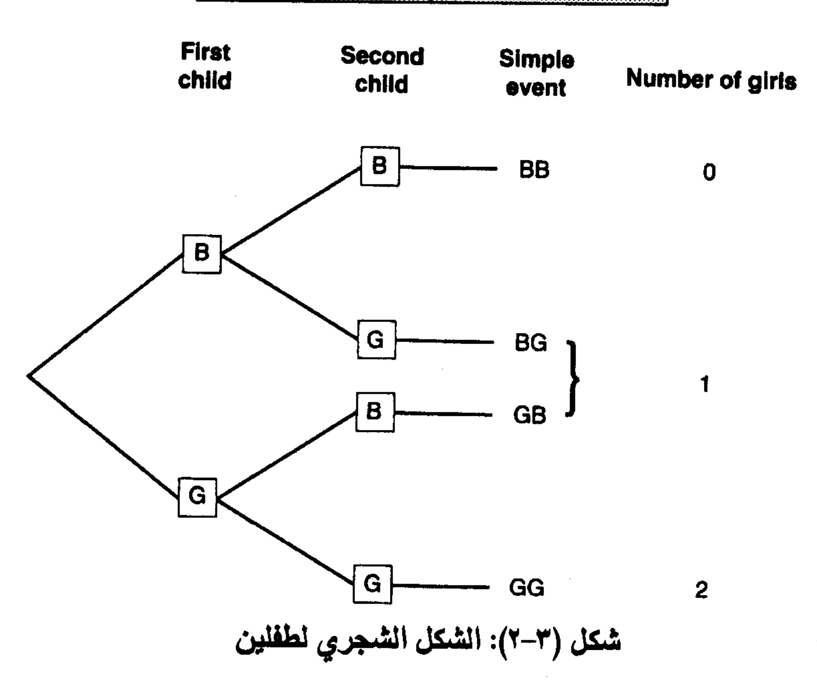
(أ) إذكر الحدث $\overline{A}$ وحدد احتماله. (ب) اذكر الحدث $\overline{B}$ وحدد احتماله.

(٣-٥) المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة Discrete And Continuous Random Variables

حتى هذه النقطة، ناقشنا الإحتمالات لحوادث تنتج من تجارب تخضع للصدفة. والآن، نركز على مناقشة تجربة ما ككل بدلاله مجموعة الحوادث البسيطة لها. وهذا يؤدي بنا إلى مفهومين أساسيين: المتغير العشوائي **random variable** والتوزيع الإحتمالي **probability distribution** واللذان يشكلان العمود الفقري في الإستنتاج الإحصائي. ولكي نتفهم ما هو المتغير العشوائي، دعنا نتأمل زوجين يفكران في انجاب طفلين فقط. لنفرض انهما يهتمان بعدد البنات الممكن ولادتهم. قبل أن نستمر في القراءة، ما هو عدد إمكانيات حدوث ذلك في رأيك؟ إذا كانت إجابتك ثلاثة، فأنت مصيب في ذلك. فالإمكانيات الثلاثة المتنافية الشاملة هي: لا بنات، بنت واحدة، بنتان.

والآن لنفحص هذه الإمكانيات الثلاث في سياق الحوادث البسيطة أخذين في الإعتبار الجنس للطفلين. الشكل الشجري في شكل (٣-٢) يخدم هذا الغرض، ومنه يلاحظ أنه بدلالة المتغير" عدد البنات" يوجد ٤ حوادث بسيطة هي:

الحدث البسيط	عدد البنات
BB	صفر
BG	1
GB	1
GG	2



شكل (٣-٢): الشكل الشجري لطفلين

هذا يعني أننا حولنا الحوادث الأربعة البسيطة للتجربة إلى قيم رقمية مناظرة، كل منها تمثل عدد معين من البنات. مثل هذا التنظيم أو التصوير للحوادث البسيطة في تمثيل رقمي هو جوهر المتغير العشوائي. وهكذا يعرف المتغير العشوائي **random variable** على أنه تحويل الحوادث البسيطة في تجربة عشوائية إلى كميات رقمية تعبر عن النواتج المكنة للظاهرة موضوع الإهتمام. من المعتاد أن نرمز للمتغير العشوائي بحرف كبير مثل X مالم يشار إليه برمز آخر. وسوف نلتزم بهذه العادة خلال هذا الكتاب. فمثلا في المثال الذي نناقشه، نعرف المتغير العشوائي ليكون: X: عدد البنات في عائلة ذات طفلين.

لاحظنا سابقا أن القيم المكنة للمتغير العشوائي X هي صفر، 2,1 ولكن قيم X خاضعة للصدفة أوعدم التأكد، وهذا هو السبب في أن X يشار إليها كمتغير عشوائي. وهذا يؤدي إلى تعريف غير تقليدي إلى حد ما للمتغير العشوائي:"المتغير العشوائي هو أي كمية رقمية تتحدد قيمتها بالصدفة".

بالنظر إلى شكل (٣-٢) نلاحظ أن كل قيمة من قيم X لها إحتمال مقترن بها فمثلا، القيمة "صفر بنت" تأتى من الناتج BB، فلو فرضنا أن إحتمال الحصول على ولد هو $\frac{1}{2}$ وإفترضنا الإستقلال الإحصائي للنوع أو الجنس من طفل إلى أخر، فإن إحتمال الحصول على ولدين على التوالي:

$\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ، لذلك:

$$P(X=0) = \frac{1}{4}$$

تقرأ هكذا: "إحتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ القيمة صفر (لا بنات) هو $\frac{1}{4}$ ".

القيمة X=1 تنجم من الحدثين البسيطين GB, BG وكل منهما له أيضا الإحتمال $\frac{1}{4}$ وهكذا فإن إحتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة 1 هو مجموع الإحتمالات لحدثين بسيطين متنافيين شاملين GB,BG والذي يعني الحصول على بنت واحدة وهو: $P(X=1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

أخيرا، القيمة X = 2 تنجم من الحدث البسيط GG والتي لها إحتمال حدوث =

$$P(X=2) = \frac{1}{4}$$

ونحن نذكرك بأنه لكي تكون هذه الكميات معبرة عن إحتمالات، فإنه يجب أن تلتزم بالقواعد المعطاه في الفصل (٣-٤)، وبصفة خاصة، حيث أنه في حالة طفلين، إما أن يكون فيهما صفر بنت، بنت واحدة، ٢ بنت، فإن مجموع إحتمالات هذه القيم يجب أن يساوي واحد فمثلا في هذا المثال:

$$P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$$

مثال (٣-٧)

عودة إلى مثل رمي قطعتي نرد وفيه 36 من الأزواج المكنة لوجهي قطعتي النرد كما في جدول (٣-٢). عرف X على أنه متغير يمثل مجموع قيم (أى نقط) وجهي قطعتي النرد. حدد القيم المكنة لـ X وإحتمال كل منها.

الحــل

من المعلوم أن كل قطعة نرد لها 6 اوجه عليها النقاط: 1,2,3,4,5,6 التي تظهر على الأوجه الستة. أصغر قيمة للمتغير العشوائي X والذي يعبر عن مجموع قيم وجهي قطعتي النرد التي يمكن أن يأخذها هي 2 بينما أكبرها 12 لذلك فالقيم المكنة لـX هي 2,3,4,......,12. ولكي نوضح تحديد الإحتمالات لهذه القيم، سنتخير القيمة 7 مثلا. جدول (٣-٤) يعرض كل الأزواج المكنة لرمي قطعتي النرد في مجموعات طبقا لمجموعها. زوج واحد يعطي المجموع 2، زوجين يعطيان المجموع 3 وهكذا. يلاحظ أن هناك 6 أزواج فقط تعطي المجموع 7 وحيث أن هناك 36زوج من الحوادث المتنافية الشاملة وكل منها له الإحتمال 1/36 لحدوثه فإن.

$$P(X = 7) = 6/36$$

الإحتمالات للقيم الأخرى ستأتي بطريقة مماثلة وقد وضعت في العمود الأيمن من جدول (٣-٤).

ربما تكون لاحظت في الأمثلة السابقة أن عدد القيم للمتغيرات العشوائية أنها محددة في كل حالة. في الواقع فإننا نضع القيم الممكنة من الأصغر إلى الأكبر. القيم التي يمكن وضعها في قائمة يقال أنها قابلة للعد **Countable** . ومع ذلك فالقيم القابلة للعد ليست بالضرورة أن تكون محدودة العدد. فمثلا، لنفرض أن X هى عدد المكالمات التليفونية التي تمت في يوم معين في إحدى المدن. هنا قد لا تكون هناك مكالمات، أو مكالمة واحدة، 2 مكالمة، 3 مكالمات وهكذا.. مع عدم وضوح حد أعلى لعدد المكالمات ومع ذلك، يمكن أن نبين القيم الممكنة بقائمة على النحو التالي: X = صفر، ,1,2,3...... وتوالي النقط يبين أن قائمة القيم المكنة مستمرة بلاحدود.

جدول (٣-٤) نواتج رمي قطعتي نرد والآحتمالات المناظره

Face Values	Value of Random Variable	Number of Occurrences	Probability
(1, 1)	2	1	$\frac{1}{36}$
(1, 2), (2, 1)	3	2	$\frac{2}{36}$
(1, 3), (2, 2), (3, 1)	4	3	$\frac{3}{36}$
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	5	4	$\frac{4}{36}$
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	6	5	$\frac{5}{36}$
(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	7	6	$\frac{6}{36}$
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	8	5	$\frac{5}{36}$
(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	9	4	$\frac{4}{36}$
(4, 6), (5, 5), (6, 4)	10	3	$\frac{3}{36}$
(5, 6), (6, 5)	11	2	$\frac{2}{36}$
(6, 6)	12	1	$\frac{1}{36}$
	Total possible occurrences:	36	

نفرض أن المتغير العشوائي يمثل أقطار مكابس مقاسة بالمليميتر. يتراوح أقطار المكابس من صفر (أو قيمة صغيرة جدا) إلى مالانهاية (او قيمة كبيرة جدا) ومن ثم فهي تشمل كل القيم في قطعة مستقيمة متصلة. فإذا كان لدينا جهاز قياس حساس بدرجة كافية فإن عدد القيم المكنة ربما تكون لا نهائية وبالتأكيد لن نكون قادرين على وضع قائمة تحدد القيم هذه. عندما تقع القيم المكنة على قطعة مستقيمة

متصلة، يقال عنها أنها غير قابلة للعد **Uncountable**. عندما تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي قابلة للعد فإن المتغير العشوائي يقال عنه أنه متقطع **discrete** وإذا كانت القيم غير قابلة للعد، فالمتغير العشوائي يقال عنه أنه متصل أو مستمر **Continuous**.

وفيما يلي أمثلة لمتغيرات عشوائية متقطعة:

X_1 : عدد الوحدات المباعة من منتج مافي يوم معين، فإذا كان المتاح منه 50 وحدة على الأكثر، فإن القيم الممكنة لـ X هي: صفر، 1، 2، . . . ، 50.

X_2: عدد المكالمات التليفونية التي يتلقاها مكتب تجاري في ساعة معينة، القيم الممكنة لـ X_2 هي: صفر، 1، 2، 3، . . وحتى أكبر عدد صحيح يمكن تصوره.

X_3: عدد الأشخاص اللذين يصلون إلى مركز خدمة في أسبوع معين. القيم الممكنة لـ X_3 هي: صفر، 1، 2، 3، . . وحتى أكبر رقم صحيح يمكن تصوره.

X_4: عدد الإجابات الصحيحة في إختبار به 25 سؤال. القيم المكنة لـ X_4: هي صفر، 1، 2، 3، . . . 25.

ويمكن أن نفكر في المتغير العشوائي المتصل على أنه المتغير الذي قيمة كميات رقمية تم قياسها خلال سلسلة متصلة مثل الوزن، الحجم، الطول، الزمن. وفيما يلي أمثلة عن متغيرات عشوائية متصلة:

X_5: حجم السائل (بالأوقية) في عبوة أو إناء. فإذا فرض أن أقصى حجم ممكن للإناء هو 20 أوقية، فإن القيم المكنة لـ X_5 تقع في الفترة من صفر حتى 20،($0 \le X_5 \le 20$).

X_6: طول الحياة (بالساعات) لمصباح كهربي. القيم المكنة لـ X_6 تقع في الفترة من صفر إلى مالانهاية (نظرياً)، ($0 < X_6 < \infty$).

X_7: نسبة الزيادة (أو النقص) في أرباح شركة ما عندما تقارن مع العام الماضي. القيم المكنة لـ X_7 يمكن أن تكون سالبة (تناقص) أو موجبة (تزايد) أو أن تكون (نظرياً) بدون حدود، ($-\infty < X_7 < \infty$).

X_8: طول الزمن (بالدقائق) لمحادثة تيلفونية لرجل أعمال. القيم المكنة لـ X_8 تقع في الفترة من صفر إلى ∞(نظرياً)، ($0 < X_8 < \infty$).

تمارين:

(٣-٢٦) أشرح الفرق بين المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصله (المستمرة).

(٣-٢٧) بالنسبة للمثال الذي ذكرته في إجابتك عن التمرين (٣-١)، حدد المتغير العشوائي وأذكر ما إذا كان متقطع أم مستمر ثم عرف القيم المكنة التي يمكن أن يأخذها.

(٣-٢٨) للحالات التاليه: حدد المتغير العشوائي المناسب وأذكر ما إذا كان متقطع أم مستمر ثم عرف القيم المكنة التي يأخذها.

(أ) مبيعات بوالص التأمين على الحياة في فترة زمنية محددة.

(ب) نتائج إختبار ما مكون من 50 سؤال صح وخطأ.

(جـ) طول الفترة الزمنية التي ستخصصها لدراسة مادة علمية في الأسبوع القادم.

(د) عدد التقديرات A التي ستحققها من دراسة 42 مادة.

(هـ) نسبة الطلاب غير المدخنين في فصلك.

(٣-٢٩) كرر التمرين (٣-٢٨) للحالات التاليه:

(أ) طول المدة الزمنية التي تصبح بعدها طلمبة مياه السيارة غير صالحة للإستخدام.

(ب) عدد لترات البنزين التي تضخ في سيارة أختيرت عشوائياً في محطة بنزين.

(جـ) عدد ملفات الضرائب التي وجد أن بها أخطاء من بين 500 ملف تم إختيارهم عشوائياً.

(د) نسبة الوحدات التي أكتشف أنها معيبه أثناء عملية إنتاجية.

(هـ) الوحدات المعيبه التي أكتشفت في عينه عشوائية من 100 وحده مسحوبه من عملية إنتاجية ما.

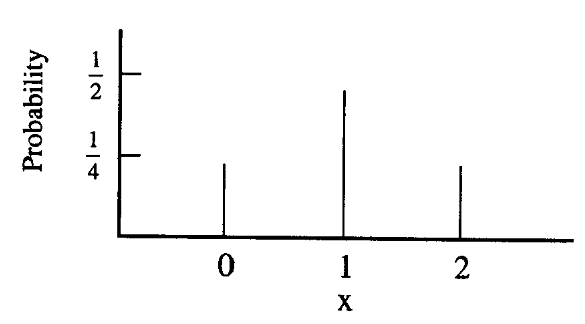
(٣-٦) التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

Probability Distributions of Discrete Random Variables

التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X يعبر عن الإحتمالات لجميع القيم التي يمكن أن يأخذها X، وشكل هذا التعبير متنوع ومختلف. والأشكال المألوفة هي جداول، رسوم بيانيه، صيغ رياضية. فمثلاً، نفرض أن المتغير العشوائي المتقطعX هو عدد البنات في عائلة بها طفلين. يمكن تمثيل التوزيع الإحتمالي في صورة جدول به قائمة بسيطة بكل القيم المكنة لـ X يرافقها إحتمالاتها كما يلي:

Values of X	Probability
0	$P(X=0) = \frac{1}{4}$
1	$P(X=1) = \frac{1}{2}$
2	$P(X=2) = \frac{1}{4}$

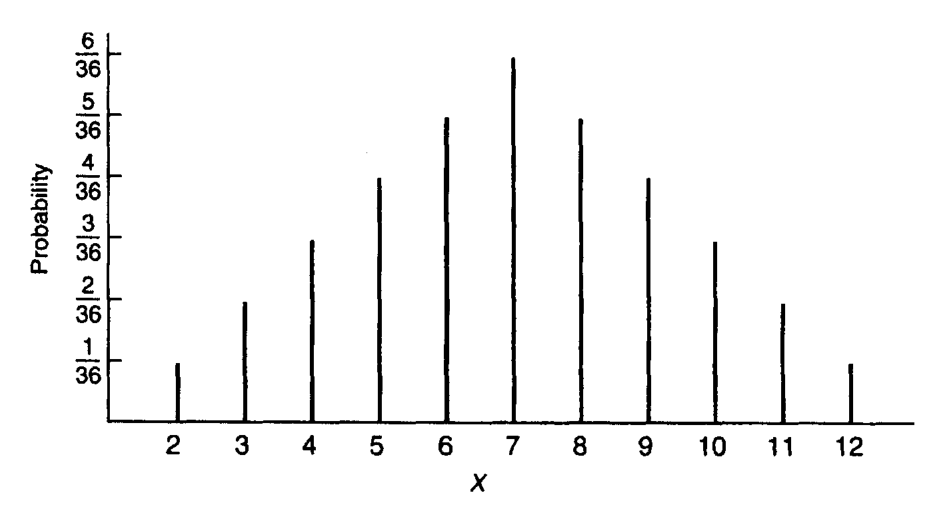
ويمكن أيضاً تمثيل التوزيع الإحتمالي لـ X بيانياً بوضع الإحتمالات على المحور الرأسي وقيم X على المحور الأفقي كما هو موضح في شكل (٣-٣). يلاحظ أنه لكل قيمه من قيم X على المحور الأفقي يظهر الإحتمال بخط رأسي ينتهي عند قيمة الإحتمال المناظرة على المحور الرأسي.



شكل (٣-٣): التوزيع الإحتمالي لعدد البنات

والتوزيع الإحتمالي مشابه للتوزيع التكراري النسبي- نوقش في الفصل الثاني- ولكنه يختلف عن المستطيلات التي إستخدمناها في الفصل الثاني لعرض التكرارات النسبية، فنحن هنا، نستخدم الخطوط الرأسية لعرض الإحتمالات لأن المتغير العشوائي- في المثال الحالي- يأخذ فقط القيم صفر، 2,1، اما القيم بين الفترات فتمثل حوادث لا يمكن أن تقع، لذلك فهي تأخذ الاحتمال صفر لحدوثها.

بإستخدام المعلومات في جدول (٣-٤) المحتوي علي قيم أوجه قطعتي نرد، يمكن تمثيل التوزيع الإحتمالي لهذا المثال بيانيا كما في شكل (٣-٤).



شكل (٣-٤) : التوزيع الإحتمالي لمجموع وجهي قطعتي نرد

ويتيح لنا التوزيع الإحتمالي في أن واحد ملاحظة ومقارنة الإحتمالات للقيم المكنة للمتغير العشوائي. فمثلا في شكل (٣-٣) يلاحظ ان إحتمال الحصول على ولد وبنت لعائلة بها طفلين هو ضعف إحتمال الحصول على ولدين أو بنتين. ومن شكل (٣-٤) يتضح أن الـ (7) هي أكثر المجاميع التي يحتمل أن تظهر على السطح العلوي عند إلقاء قطعتي النرد. في الواقع، فإن كل من التوزيعين متماثليين. وكما في الفصل الثاني، نستخدم مصطلحات متشابهة لوصف أشكال التوزيعات الإحتمالية. معظم التوزيعات الإحتمالية ذات قمة واحدة تكون إما متماثلة أو ملتوية (يسار أو يمين).

التوزيعات الإحتمالية التي نناقشها في هذا الفصل وفي الفصل الرابع، هي توزيعات نظرية، بمعنى أنه لا يمكن ملاحظتها واقعيا. في التطبيقات الواقعية، يمكن إعتبار جدول التكرار النسبي على أنه مجموعة من الاحتمالات التجريبية والتي يمكن إستخدامها كتقريب للتوزيع الإحتمالي النظري. وهنا نحتاج إلى تفهم بعض الأفكار العامة عن التوزيعات النظرية حتى تكون في وضع أفضل لكي نتعامل مع الاحتمالات التجريبية.

دالة الإحتمال لمتغير عشوائي متقطع:

The Probability Function of a Discrete Random Variable

هناك كثير من المتغيرات العشوائية المتقطعة ذات أهمية في التطبيقات الواقعية، ومن المكن أن نجد لها دالة رياضية تعطي الإحتمال لأي قيمة نهتم بها عندما نعوض بهذه القيمة في الدالة. هذا النوع من الدوال يعرف علي أنه دالة الإحتمال **Probability function** لمتغير عشوائي متقطع. الدالة هي صيغة رياضية نستخدمها لتحديد الإحتمال لكل قيمة يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي المتقطع.

دعنا نتفق على إستخدام الحرف الصغير x ليدل على قيمة خاصة (ولكن غير محددة) يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X وهكذا، فإن معنى P(x) يكون:

$$P(X = x) = P(x)$$

إحتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ قيمة خاصة x يتحدد بتقييم دالة الإحتمال عند القيمة الخاصة x.

ولتوضيح دالة الإحتمال، دعنا نفحص الصيغة التالية ونرى ما إذا كانت تعطي الإحتمالات لكل قيمة ممكنة من قيم المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد البنات في أسرة بها طفلين:

$$P(x) = \frac{2!}{(2-x)!x!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \quad where \quad x = 0,1,2$$

لاحظ أن العدد !2 يقرأ "مضروب2" وقيمته 2 x 1 = !2، بالمثل 6 = 1 x 2 x 3 = !3، 24 = !3 x 4 = !4 وهكذا. عموما n!=n(n-1)! وكنتيجة لذلك 1 = !0 = !1 . في الفصل الرابع سوف نتعرف بطريقة أفضل كيف ظهرت هذه الدالة الإحتمالية وحتى ذلك الوقت، فإننا نرغب فقط في إيضاح أن هذه الدالة تعطي نفس الإحتمالات والتي سبق الحصول عليها، والفكرة ببساطة هي التعويض بالقيم الخاصة لـــ X في هذه الصيغة أو الدالة ثم إيجاد قيمتها:

$$P(X=0) = P(0) = \frac{2!}{(2-0)!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(X=1) = P(1) = \frac{2!}{(2-1)!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=2) = P(2) = \frac{2!}{(2-2)!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

وحيث أن الدالة P (x) تعطي إحتمالات، فإن نتيجة تقييم P (x) عند أي قيمة ممكنة من قيم X يجب أن تكون عددا في الفترة من صفر إلى 1، وأن مجموع هذه الإحتمالات لجميع القيم المكنة للمتغير العشوائي X يجب أن تكون واحد. (لا حظ أن هذه الشروط هي متطلبات القواعد الأساسية (2.1) في الفصل (٣-٤). وهكذا فإن دالة الإحتمال لمتغير عشوائي متقطع يجب أن تحقق الشروط التالية:

> بفرض أن X متغير عشوائي متقطع، الدالة P(x)=P(X=x) تسمى دالة الإحتمال للمتغير العشوائي X إذا تحقق الشرطان التاليان:
>
> (1) $0 \leq P(x) \leq 1$
>
> (2) $\sum_{all\ x} P(x) = 1$

مثال (٣-٨)

بفرض أن دالة الإحتمال لمتغير عشوائي متقطع X هي:

$$P(x) = \frac{3!}{(3-x)!x!}\left(\frac{1}{3}\right)^{X}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-X} \quad ,where \quad x = 0,1,2,3$$

حدد الإحتمال لكل قيمة من قيم X ثم ارسم التوزيع الاحتمالي.

الحـــــل

حيث أن القيم المكنة لـ x هي: صفر، ١، ٢، ٣، فإننا نحصل على الاحتمالات بتقييم دالة الاحتمال عند كل من هذه القيم.

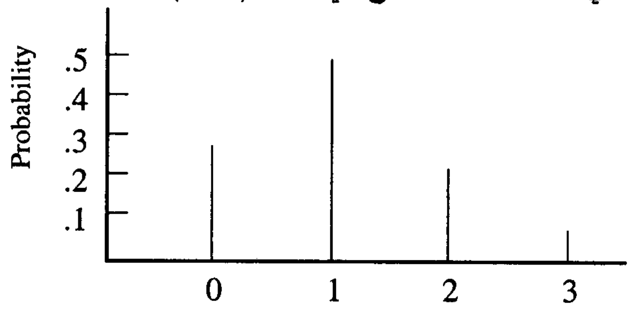
$$P(X=0)=P(0)=\frac{3!}{(3-0)!0!}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-0}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{8}{27}\right)=0.2963$$

$$P(X=1)=P(1)=\frac{3!}{(3-1)!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}=(3)\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\left(\frac{12}{27}\right)=0.4444$$

$$P(X=2)=P(2)=\frac{3!}{(3-2)!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2}=(3)\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=\left(\frac{6}{27}\right)=0.2222$$

$$P(X=3)=P(3)=\frac{3!}{(3-3)!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\left(\frac{1}{27}\right)=0.0370$$

شكل التوزيع الإحتمالي لهذا المثال موضح في شكل (٣-٥)



شكل (٣-٥) : التوزيع الإحتمالي للمثال (٣-٨)

التوزيع الإحتمالي التجميعي لمتغير عشوائي متقطع

والآن نوجه إهتمامنا إلى مفهوم أخر هام يتعلق بالمتغير العشوائي المتقطع X وهو التوزيع الإحتمالي المتجمع لـــ X **Cumulative Probability distribution**. ولتوضيح هذا المفهوم، دعنا نتأمل للحظه كيف أننا في أحوال كثيرة نسمع عبارات مشابهة للعبارات التالية " عدد الأسئلة التي أخفقت فيها في الإختبار لا يزيد عن ثلاثة"، "أتوقع الحصول على الأقل على أثنين A في الفصل الدراسي"، "من الممكن سفر أربع أفراد على الأكثر في هذه الرحلة". العبارات "لا يزيد عن"، "على الأقل"، "على الأكثر"، كلها توحي بنوعا من التجميع. فمثلا، إذا أخفقت فيما لا يزيد عن ثلاث أسئلة في الإختبار، فهذا يعني أنك أخفقت في لا شئ من الأسئلة أو في سؤال واحد فقط أو في سؤالين فقط أو في ثلاث أسئلة فقط. وإذا توقعت بأن يكون تقديرك على الأقل إثنين A، فهذا يعني أنك تتوقع أن تحصل على إثنين A فقط أو ثلاثة A أو ربعة A فقط وهكذا. . . حتى عدد المقرارات التي درستها في الفصل الدراسي.

في هذا السياق وبالإشارة إلى مثال العائلة ذات الطفلين، يمكن ان نسأل: ما هو إحتمال الحصول على بنت واحدة أو أقل (على الأكثر بنت واحدة) ؟ الإجابة هي مجموع إحتمالات قيم X والتي تحقق الحدث" على الأكثر بنت واحدة . هذه القيم هي لا بنات $(X = 0)$ وبنت واحدة فقط $(X = 1)$. والإحتمال المطلوب:

$$P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$$

حيث تقرأ $P(X \leq 1)$ كما يلي: إحتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ قيما أقل من أو تساوي واحد ("أو على الأكثر 1" أو" أقل" أو "لا تزيد عن 1"). هذا هو معنى الإحتمال التراكمي أو التجميعي، بمعني أننا نجمع الإحتمالات للقيم المفردة لـX والتي تحقق العبارة "بنت واحدة أو أقل". والتجميع هنا أمر طبيعي

لأننا نقوم بجمع إحتمالات حوادث متنافية شاملة: لا يوجد بنات، بنت واحدة. ونستطيع تحديدالتوزيع الإحتمالي التجميعي بأكمله لهذا المثال وذلك بتجميع الإحتمالات المفردة وكأننا ننتقل على التوالى من قيمة الى أخرى من قيم X في ترتيب تصاعدي على النحو التالي"

العبارة الكلامية	قيم X	الإحتمال التجميعي
على الأكثر صفر بنت	صفر	$P(X=0)=0.25$
على الأكثر بنت واحدة	صفر، 1	$P(X\le 1)=P(0)+P(1)=0.75$
على الأكثر بنتان	صفر، 2،1	$P(X\le 2)=P(0)+P(1)+P(2)=1$

الآن لنفرض أننا نرغب في تحديد الإحتمال : على الأقل بنت واحدة. حيث أن العبارة "على الأقل بنت واحدة" تعني أما بنت واحدة فقط أو بنتين فقط، فإننا نبحث في جمع الإحتمالات لهذه القيم، أي

$$P(X \ge 1)=P(1)+P(2)=0.5+0.25=0.75$$

يمكن أيضا تحديد هذا الإحتمال بالتأكيد اولا على أن الحدث"على الأقل بنت واحدة" هو مكمل للحدث"لا توجد بنات" ومن ثم بإستخدام قاعدة الإحتمال للحوادث المكملة، نجد أن:

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0.25=0.75$$

وكتوضيح أخر، يعطي جدول (٣-٥) التوزيع الإحتمالي التراكمي (التجميعي) لمجموع الرقمين الذين يظهرا على السطح العلوي عند رمي قطعتي نرد. ويلاحظ أنه يمكن إستخدام المعلومات التي في جدول (٣-٥) لإيجاد تنويعات مختلفة للإحتمال "على الأقل". فمثلا إحتمال أن مجموع الرقمين "على الأقل7" يساوي واحد مطروحا منه إحتمال أن المجموع على الأكثر 6، لأن " على الأكثر 6"و" على الأقل7" هما حوادث مكملة لبعضها. ولكي نرى ذلك، دعنا أولا نسرد النواتج الإحدى عشر 12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2. من هذه النواتج 12,11,10,9,8,7 هي "على الأقل 7". باقي النواتج 6,5,4,3,2 هي"6 أو أقل". لذا"على الأقل 7" وعلى الأكثر 6"("6 أو أقل") لا يوجد بينها حوادث مشتركة وأنهما يستوعبان كل النواتج المكنة وهكذا يصبحا حوادث متكاملة لذا.

$$P(X \ge 7=1-P(X \le 6)=1-\frac{15}{36} = \frac{21}{36}$$

جدول (٣-٥) التوزيع الإحتمالي التراكمي لمجموع نقط وجهي قطعتي نرد

Verbal Phrase	Values of X	Probability
At most 2	2	$P(X\le 2)=\frac{1}{36}$
At most 3	2, 3	$P(X\le 3)=\frac{3}{36}$
At most 4	2, 3, 4	$P(X\le 4)=\frac{6}{36}$
At most 5	2, 3, 4, 5	$P(X\le 5)=\frac{10}{36}$
At most 6	2, 3, 4, 5, 6	$P(X\le 6)=\frac{15}{36}$
At most 7	2, 3, 4, 5, 6, 7	$P(X\le 7)=\frac{21}{36}$
At most 8	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	$P(X\le 8)=\frac{26}{36}$
At most 9	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$P(X\le 9)=\frac{30}{36}$
At most 10	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	$P(X\le 10)=\frac{33}{36}$
At most 11	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	$P(X\le 11)=\frac{35}{36}$
At most 12	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	$P(X\le 12)=1$

تحديد الإحتمالات المفردة من الإحتمالات التجميعية:

من الملاحظات الهامة أنه من الإحتمالات التجميعية في جدول (٣-٥)، يمكن أيضا إيجاد إحتمال أن مجموع رقمي السطح العلوي لقطعتي النرد هو قيمة معينة، فمثلا لنفرض أننا نرغب في إيجاد إحتمال أن المجموع هو 6 بالضبط. وبالطبع، فنحن نعرف من المناقشة السابقة أن الإجابة هى $\frac{5}{36}$ ، ولكن دعنا نرى كيف يمكن أن نحصل على نفس النتيجة مستخدمين الاحتمالات التجميعية المناسبة من جدول (٣-٥). الاحتمال التجميعي بأن المتغير العشوائي X هو على الأكثر 6,$P(X \leq 6)$ يتكون من الإحتمالات للقيم التالية: 6,5,4,3,2,. بالمثل، الاحتمال التجميعي على الأكثر 5، $P(X \leq 5)$ يتكون من الاحتمالات المناظرة للقيم 2، 3، 4، 5. وحيث أن تجميع الإحتمالات يستمر إلى أن يصل إلى القيمة 5، فإن الفرق بين $P(X \leq 6)$، $P(X \leq 5)$ يجب أن يكون إحتمال أن X هو بالضبط 6، وبمعنى أخر.

$$P(X=6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = \frac{15}{36} - \frac{10}{36} = \frac{5}{36}$$

بالمثل، إحتمال أن X بالضبط 9:

$$P(X=9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 8) = \frac{30}{36} - \frac{26}{36} = \frac{4}{36}$$

وإحتمال أن X هي بالضبط11:

$$P(X=11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 10) = \frac{35}{36} - \frac{33}{36} = \frac{2}{36}$$

مماسبق يمكن التعميم بالقول بأنه لأي قيمة صحيحة لمتغير عشوائي متقطع X، فإن إحتمال أن X تأخذ اي قيمة معينة x(حيث نستخدم الحرف الصغيرxليدل على قيمةمعينة للمتغير العشوائي X) يعطي بالصورة التالية:

$$P(X=x) = P(X \leq x) - P[X \leq (x-1)] \quad (3.3)$$

تمـاريــن:

(٣-٣٠) ما هو هدف دالة احتمال المتغير العشوائي المتقطع ؟

(٣-٣١) أذكر مع الشرح الشروط التي تحقق دالة الاحتمال ؟

(٣-٣٢) بالإشارة إلى مثال (٣-٢)، دع المتغير العشوائي X يرمز إلى عدد الأطفال الذكور في اسرة ذات ثلاث أطفال.

(أ) حدد القيم الممكنة لـ X وإحتمالاتها.

(ب) ما هو احتمال وجود طفل ذكر واحد على الأقل ؟ اثنين ذكور على الأكثر ؟

(جـ) مثل بيانيا التوزيع الإحتمالي لـX.

(٣-٣٣) أشرح ما إذا كان مما يلي هو توزيع احتمالي لمتغير عشوائي متقطعX:

(a)

x	p (x)
-2	.1
-1	.2
0	.4
1	.2
2	.1

(b)

x	p (x)
0	.4
1	.3
2	.1
3	.1

(c)

x	p (x)
-4	.2
0	1.2
4	-,4
8	0

(d)

x	p (x)
-2	.4
-1	.2
0	.1
1	.1
2	.1

(٣-٣٤) مندوب إحدى شركات التأمين عادة ما يقابل خمس عملاء كل يوم، دع المتغير العشوائي X يمثل عدد الأفراد اللذين يشتروا وثائق تأمين في اليوم الواحد وأن دالة الإحتمال للمتغير X هي:

$$P(x) = \frac{5!}{(5-x)!\,x!}(0.1)^x(0.9)^{5-x} \quad ; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

(أ) حدد الاحتمال لكل قيمة من قيم X ومثل بيانيا التوزيع الإحتمالي.

(ب) ما هو احتمال أن مندوب المبيعات سوف يبيع على الأقل وثيقة واحدة في أحد الأيام ؟

(جـ) ما هو احتمال أن مندوب المبيعات سوف يبيع على الأكثر وثيقة واحدة في أحد الأيام ؟

(د) استخدم الصيغة (3.3) لتحديد احتمال أن مندوب المبيعات سوف يبيع وثيقة واحدة بالضبط في اليوم الواحد.

(٣-٣٥) أعد حل التمرين(٣-٣٤) إذا كان مندوب المبيعات يقابل ثمان عملاء في اليوم الواحد وأن دالة الاحتمال هي:

$$P(x) = \frac{8!}{(8-x)!\,x!}(0.1)^x(0.9)^{8-x} \quad ; x = 0, 1, \ldots\ldots, 8$$

(٣-٣٦) فيما يلي التوزيع الإحتمالي لعدد العملاء اللذين يصلوا إلى أحد مراكز الخدمة خلال خمس دقائق.

x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(x) :	.01	.04	.10	.12	.16	.20	.17	.08	.07	.04	.01

(أ) مثل التوزيع الإحتمالي بيانيا.

(ب) حدد التوزيع الاحتمالي التجميعي.

(جـ) حدد احتمال أنه على الأقل سوف يصل عميل واحد خلال فترة خمس دقائق.

(د) أستخدم الصيغة (3.3) للتأكد من أن احتمال وصول أربع عملاء بالضبط هو 0.16 .

(٣-٣٧) اعتمادا على مشاهدات عديدة، حددت شركات الطيران التوزيع الاحتمالي لعدد المقاعد المحجوزة على أحد خطوطها على الصورة التالية:

x :	0	1	2	3	4	5	6
p(x) :	.05	.10	.20	.25	.20	.15	.05

(أ) حدد التوزيع الإحتمالي التجميعي.

(ب) ما هو احتمال أن يتم حجز أربع مقاعد على الأقل ؟

(جـ) ما هو احتمال الا يتم أي حجز ؟

(د) استخدم الصيغة (3.3) للتأكد من ان إحتمال حجز ثلاث مقاعد بالضبط هو 0.25

(٣-٧) التوزيعات الإحتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة

Probability Distributions of Continuous Random Variables

في هذا الفصل، ندرس التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة. من الجزء (٣-٥)عرفنا أن المتغير العشوائي المتصل هو المتغير الذي تتكون نواتجه المكنة من كل القيم التي تقع

في فترة واحدة أو أكثر على خط مستقيم. عدد القيم الممكنة لأي متغير عشوائي متصل هى قيم غير قابلة للعد ولا نهائية، وبالتالي فإن إحتمال أن متغير عشوائي متصل X يأخذ قيمة معينة x هو صفر.

وللتوضيح، لنفرض أننا نسجل طول المدة الزمنية اللازمة لإنهاء معاملة تجارية في بنك ما لنفرض أن جهاز القياس المستخدم يمكن أن يقيس الزمن حتي عشر الثانية. وعلى ذلك اي فترة زمنية مسجلة ولتكن 83.4 ثانية تعني أن طول الفترة الزمنية الحقيقية هي تقريبا تقع في الفترة من 83.35 إلى 83.45 ثانية، لأن كل القيم في هذه الفترة تقترب من 83.4 ثانية. من ناحية أخرى، إذا كانت المدة الزمنية هي بالضبط 83.4 ثانية فهذا يعني أنها حقيقية ....83,400000 وليست 83,4000001 أو ....83,39999999. ولكي تكون الدقة تامة، فإن العدد يجب أن يحدد حتي عدد لانهائي من المواضع العشرية. لذلك، فهناك عدد لانهائي من النواتج الممكنة، كل منها له إحتمال نظري صفر. في الحقيقة، هذا ليس قيداً خطيراً لأننا لن نهتم أبداً بمثل هذه النواتج الدقيقة. كل المشاكل ذات الإهتمام العملي تركز على المدى في النواتج مثل، "لا يزيد عن 90ثانية"، "بين 10، 5 دقائق". مجمل القول، في المتغيرات العشوائية المتصلة، لا نهتم بإحتمالات تتعلق بقيم دقيقة ومضبوطة **exact** (في مقابل المتغيرات العشوائية المتقطعة، حيث نهتم أساساً بإحتمالات قيم محددة ودقيقة). على الأصح، فنحن نهتم بإحتمال أن قيمة المتغير العشوائي المتصل تقع في فترة محددة. هذا هو الفارق الهام بين المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.

دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير عشوائي متصل:

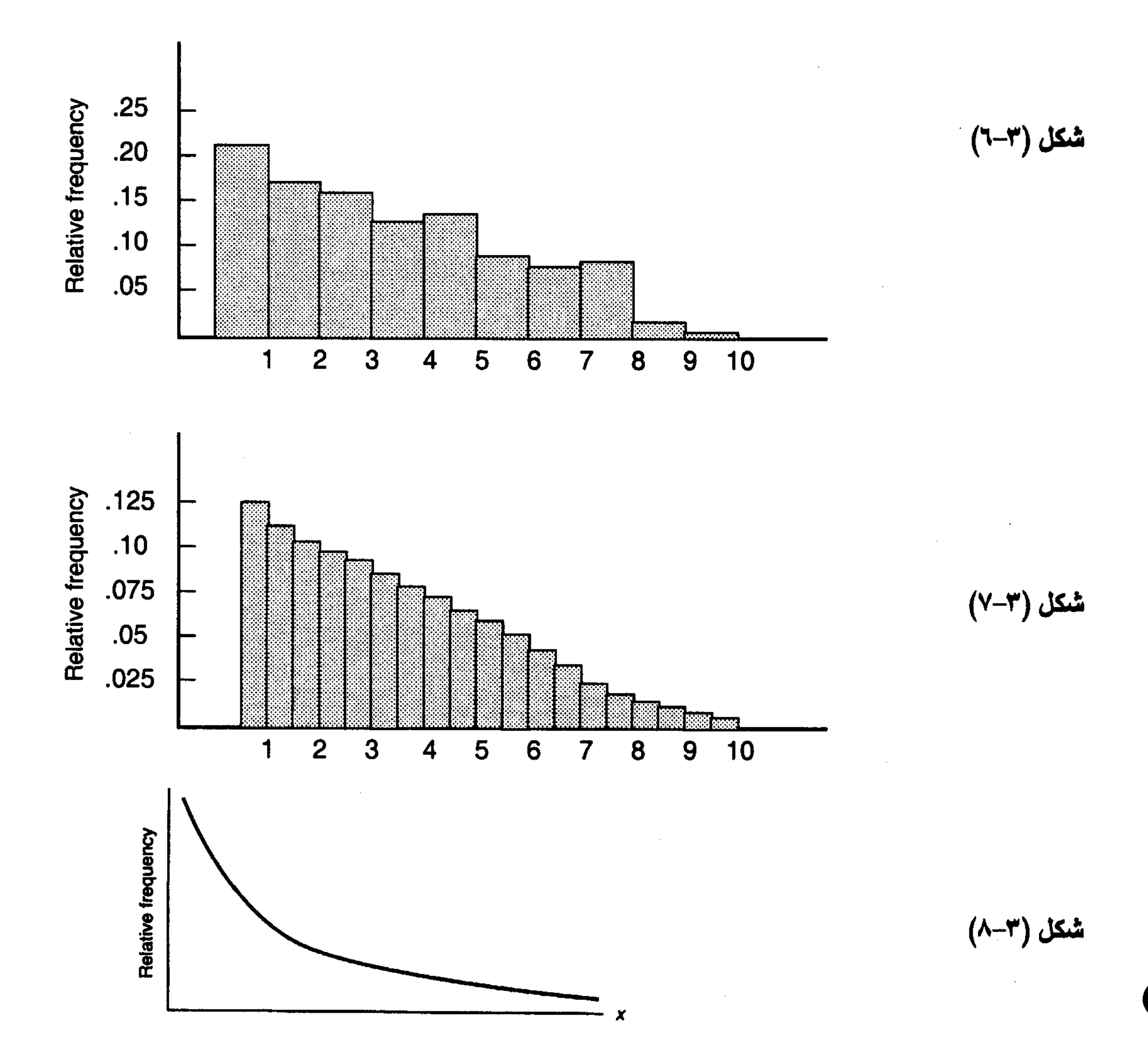
يتصف المتغير العشوائي المتصل بصيغة رياضية تعرف بإسم "دالة الكثافة الإحتمالية **Probability density function**" ويرمز لهذه الدالة بالرمز f(x)حيث x هي قيمة معينة من قيم X. دالة الكثافة الإحتمالية f(x) ليست نفس دالة الإحتمال في حالة المتغير المتقطع. حيث أن إحتمال أن X تساوي قيمة معينة هو الصفر، نجد أن هذه الدالة تعطي الوسيلة التي بها يمكن تحديد إحتمال أن X تقع في فترة معينة، كما سنرى فيما بعد. ولتوضيح مفهوم دالة الكثافة الإحتمالية، نفرض أننا سجلنا زمن الخدمة لـ 100زبون عند أحد مراكز الخدمة وبوبت هذه الأزمنة في عشر فئات، طول الفئة دقيقة واحدة كما هي موضحة في جدول (٣-٦). يمكن رصد التكرارات النسبية بيانياً لكل فئة بإستخدام المستطيلات (بدلا من الخطوط الرأسية) كما يظهر في شكل (٣-٦) وهذا يدل على أن التكرار يشير إلى الفئة كاملة بدلاً من أن يشير إلى نقطة مفردة داخل هذه الفئة. لاحظ أن قاعدة كل مستطيل تساوي واحد، وهكذا فإن مساحة كل مستطيل (القاعدة ×الإرتفاع) تساوي التكرار النسبي (الإرتفاع) للفئة المناظرة. وحيث أن مجموع التكرارات النسبية يساوي واحد، فإن مجموع المساحات لكل المستطيلات تساوي أيضاً واحد.

بدلاً من تسجيل زمن الخدمة لـ 100 زبون وتبويب تلك الأزمنة في عشر مجموعات أو فئات، طول كل فئة دقيقة واحدة، لنفرض أننا سجلنا الأزمنة لـ 100زبون وبوبت تلك الأزمنة إلى 20مجموعة أو فئة، طول كل فئة نصف دقيقة. الشكل البياني للتكرارات النسبية لتلك الفئات العشرين ذات النصف دقيقة مبينة في شكل (٣-٧). وتكشف المقارنة بين الشكلين (٣-٦)، (٣-٧) أنه على الرغم من أنهما أساساً لنفس الشئ، فإن شكل (٣-٧) يبدو إلى حد ما أقل في درجة عدم الأنتظام من شكل (٣-٦). وبتكرار هذه العملية بزيادة عدد الفئات الزمنية وفي نفس الوقت تصغير إتساع الفترات الزمنية، فإننا نجد أن كل مدرج نحصل عليه بالتتابع يقل ويقل في درجة عدم الأنتظام في الوقت الذي يحتفظ فيه بنفس الشكل الأساسي أخذ في الإعتبار التكرار. بعد محاولات عديدة يجب أن نصل إلى منحنى ممهد بمعنى أنه عندما يكون العدد المشاهد للفئات (الفترات) الزمنية كبيراً جداً وعرض الفئات

صغيراً جداً، فإن التكرار النسبي يظهر كمنحنى ممهد. إعتماداً على الأشكال (٣-٦)، (٣-٧) يمكننا تخيل أن المنحنى في هذا المثال يجب أن يظهر بالصورة التي تتضح في شكل(٣-٨).

جدول(٣-٦) التوزيع التكراري النسبي لأزمنة وصول 100 عميل

الفترة الزمنية	عدد العملاء	التكرار النسبي
(0, 1)	21	0.21
(1, 2)	17	0.17
(2, 3)	16	0.16
(3, 4)	12	0.12
(4, 5)	13	0.13
(5, 6)	7	0.07
(6, 7)	5	0.05
(7, 8)	6	0.06
(8, 9)	2	0.02
(9, 10)	1	0.01



شكل (٣-٦)

شكل (٣-٧)

شكل (٣-٨)

الدالة f(x) والتي شكلها البياني هو منحنى ممهد ناتج من إقتراب عدد الفئات من مالا نهاية وعرض الفئات يقترب من الصفر هو دالة كثافة الإحتمال لمتغير عشوائي متصل X، بشرط أن مقياس الرسم الرأسي يختار بطريقة تجعل المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد.

الملحق (3) في نهاية هذا الفصل، يعطي تعريف إصطلاحي لدالة كثافة الإحتمال بإستخدام التفاضل والتكامل، ومع ذلك فالتعريف التالي يعد كافياً:

التعبير الرياضي f(x) (تقرأ "إف أو ف x") هو دالة كثافة الإحتمال **Probability density Function** لمتغير عشوائي متصل X إذا تحقق الشرطان التاليان: (1) لأي قيمة x من قيم المتغير العشوائي X في الفترة التي يعرف خلالها X، تعطي الدالة f(x) كمية غير سالبة. (2)المساحة الكلية تحت المنحنى البياني لـ f(x) والمحدودة من أسفل بالمحور الأفقي ومن على اليسار ومن على اليمين بأصغر وأكبر قيمة لـ X تساوي واحد.

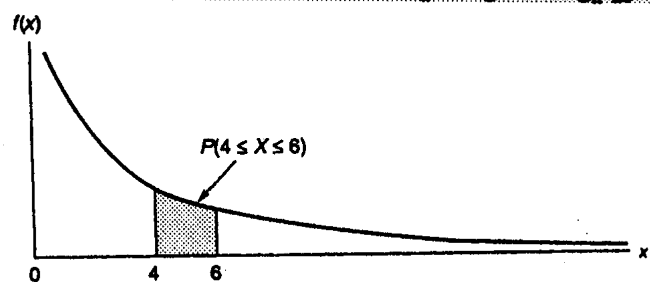
هذا التعريف يكشف لنا أن التعبير الرياضي لا يمكن أن يكون مفيداً كدالة كثافة الإحتمال لمتغير عشوائي متصل، مالم تكن المساحة أسفل المنحنى البياني لهذا التعبير الرياضي تساوي واحد. حقاً كل هذا يؤكد على الحاجة إلى أن نلتزم بالقواعد 2, 1 في الفصل(٣-٤)، بمعنى، إذا كانت المساحة الكلية تساوي واحد في الفترة التي يعرف خلالها المتغير العشوائي المتصل، فإن أي جزء من هذه المساحة يناظر فترة قصيرة يجب أن يكون عدداً ينحصر بين الصفر والواحد. المساحة لفترة قصيرة هي إحتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ قيما داخل هذه الفترة القصيرة.

لتوضيح ذلك، تتذكر مثال أزمنة الخدمة. نفرض أن المتغير العشوائي المتصل x هو طول زمن الخدمة في مركز الخدمة. القيم المكنة لـ x تقع في الفترة من صفر إلى ∞ (نظريا) وهكذا فإن المساحة تحت الشكل البياني الدلة كثافة الإحتمال لـ X والمحددة من أسفل بالمحور الأفقى ومن على اليسار وعلى اليمين بالفترة (صفر، ∞) يجب أن تساوي واحد. فإذا رغبنا -مثلا- في تحديد إحتمال أن زمن الخدمة يقع بين 6 ,4 دقائق- تصاغ رمزيا على الصورة $P(4 \le x \le 6)$ - فإننا يجب أن نقيم ذلك الجزء من المساحة الكلية تحت الشكل البياني لدالة كثافة الإحتمال لـ X والمحصورة من أسفل بالمحور الأفقي ومن على اليسار وعلى اليمين بالقيم 6,4 على التوالي. هذه المساحة بالطبع يجب أن تكون أقل من واحد، فهي تناظر إحتمال أن X يأخذ قيما في الفترة (4,6) كما هي موضحة في شكل (٣-٩).

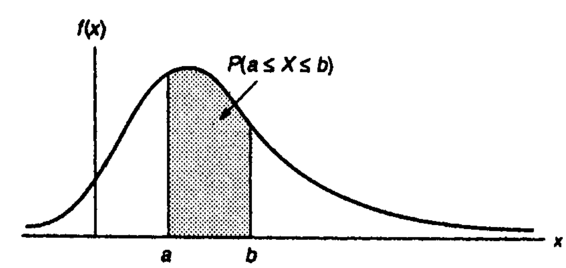
بصفة عامة دعنا ننظر إلى أي متغير عشوائي متصل X له دالة كثافة الإحتمال f(x). إحتمال أن X تأخذ قيما في الفترة من a إلى b، هو ذلك الجزء من المساحة الكلية تحت المنحنى البياني لـ f(x) والمحدود من أسفل بالمحور الأفقى ومن على اليسار ومن على اليمين بالقيم من a إلى b على التوالي. هذه الفترة الإحتمالية تكتب رمزيا على الصورة:

$$P(a \le x \le b)$$

وهي موضحة في شكل(٣-١٠).



شكل (٣-٩) : إحتمال أن زمن الخدمة يقع بين 6,4 دقائق



شكل (٣-١٠) : الإحتمال عبارة عن مساحة تحت منحنى دالة كثافة الإحتمال

مثال (٣-٩)

بفرض أن دالة كثافة الإحتمال لمتغير عشوائي متصل X له قيم في الفترة (صفر ، 1) هي:

$$f(x) = 2x \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

(أ) بين أن هذه دالة كثافة إحتمال.

(ب) حدد إحتمال أن x تأخذ قيما في الفترة (0.75 , 0.25).

(جـ) حدد إحتمال أن x تأخذ قيما تزيد عن (0.75).

الحـــل

(أ) في البداية، نلاحظ أن الشرط الأول في تعريف دالة كثافة الإحتمال متحققا، حيث أنه لأي قيمة x في الفترة(صفر ، 1) فإن $f(x) = 2x$ سوف تعطي بالتأكيد كمية غير سالبة. وبالنسبة للشرط الثاني، فإننا نحتاج إلى إثبات أن المساحة تحت الرسم البياني لـ $f(x) = 2x$ والمحددة من أسفل بالمحور الأفقي ومن على اليسار وعلى اليمين بالفترة (صفر ، 1) هي واحد صحيح. ويمكن آداء ذلك لدالة الكثافة هذه بدون إستخدام التكامل، لأن $f(x) = 2x$ هي معادلة خط مستقيم. وعلى الرغم من أن كل ما نحتاجه لرسم هذه الدالة هو نقطتين فقط، إلاأننا سنقييم هذه الدالة عند القيم (صفر ، 0, .25, .50, .75, .1) في الفترة (صفر ، 1) على النحو التالي:

x	f(x) = 2 x
0.00	f(0) = 2(0) = 0
0.25	f(0.25) = 2 (0.25) = 0.5
0.50	f(0.50) = 2(0.50) = 1.0
0.75	f(0.75) = 2 (0.75) = 1.5
1.00	f(1) =2 (1) = 2

الشكل البياني للدالة $f(x) = 2x$ موضح في شكل (a) (٣-١١)، وعلى الفور يلاحظ أنه على شكل مثلث والصيغة التي تستخدم لإيجاد مساحة المثلث هي: المساحة تساوي نصف القاعدة× الإرتفاع.
من هذا الشكل يلاحظ أن القاعدة = 1 والإرتفاع = 2، لذا: المساحة = $1 = (2)\ (1)\ (\frac{1}{2}) = \text{Area}$
وهكذا فإن : $f(x) = 2x$ هي حقا دالة كثافة إحتمال في الفترة (صفر، 1).

علي الرغم من أن $f(x) = 2x$ هي دالة كثافة إحتمال في الفترة صفر إلى واحد، فإنه من المهم ملاحظة أن $f(x)$ ليست بالتأكيد دالة إحتمالية بنفس المعني الذي عرفت به الدوال الإحتمالية لمتغيرات عشوائية متقطعة. فمثلا: $f(1)=2\ ,\ f(0.75) = 1.5$ وهذا يناقض بوضوح القاعدة التي تنص على أن أي أحتمال يحب أن يكون عدداً بين صفر ، 1.

(ب) لتحديد إحتمال أن X تأخذ قيماً في الفترة (0.25, 0.75) فإننا نرسم مرة أخرى دالة الكثافة الإحتمالية، كما في شكل (b) (٣-١١) ونظلل المساحة المطلوبة. في هذا الشكل يلاحظ أن هناك مثلثين: المثلث الأكبر ذو قاعدة 0.75 والمثلث الأصغر ذو قاعدة 0.25 ومن الواضح أن الإحتمال المطلوب ممثلاً بالمساحة المظللة وهي الفرق بين مساحتي المثلثين الأكبر والأصغر. وحيث إرتفاعهما 1.5,0.5 على التوالي فإن مساحتيهما على التوالي هي:

$$= \frac{1}{2} \times 0.75 \times 1.5 = 0.5625\ ,\ \ \frac{1}{2} \times 0.25 \times 0.5 = 0.0625$$

ومن ثم فإن الإحتمال المطلوب يكون:

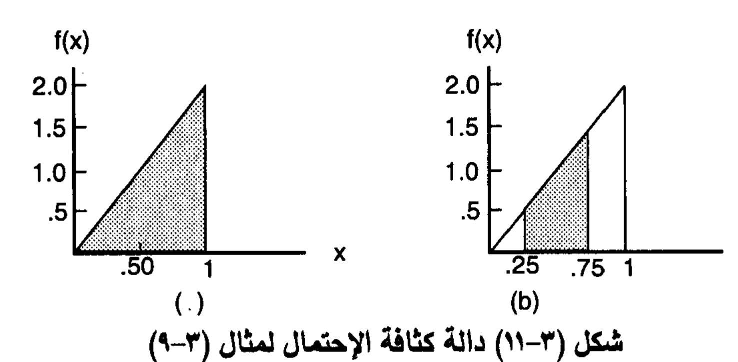
$$P(0.25 \le X \le 0.75) = P(X \le 0.75) - P(X \le 0.25) = 0.5625 - 0.0625 = 0.5$$

(جـ) لحساب إحتمال أن X تأخذ قيما تزيد عن 0.75، فأنه من المهم أن نؤكد أن "تزيد عن 0.75" و"على الأكثر 0.75" هما حوادث متكاملة. وقد بينا للتو أن $P(X \le 0.75) = 0.5625$ وهكذا، بأستخدام قاعدة الإحتمال للحوادث المكملة،

$$P(X \ge 0.75) = 1 - P(X \le 0.75) = 1 - 0.5625 = 0.4375$$

لاحظ هنا أن x هو متغير عشوائي متصل، أي $P(X = x) = 0$ لأي قيمة وحيدة لـ x . وبمعنى أخر.

$$P(X \ge 0.75) = P(X > 0.75)\ \ ,\ \ \text{because}\ \ P(X = 0.75) = 0$$



شكل (٣-١١) دالة كثافة الإحتمال لمثال (٣-٩)

دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي مستمر

في مثال (٣-٩)، حددنا إحتمالات أن المتغير العشوائي X يأخذ قيما أقل من أو تساوي 0.25 أو أقل من أو يساوي 0.75. في كلا الحالتين كانت الإحتمالات عبارة عن مساحات تحت الشكل البياني لدالة

الكثافة محددة من أسفل بالمحور الأفقي ومن اليمين بقيمة معينة لـ X (إما 0.25 or 0.75). هذا النوع من الإحتمال- والذي فيه نحسب جزء من المساحة الكلية تبدأ من أصغر قيمة لـ X وحتى قيمة معينة على اليمين- إستخدم بكثرة في الفصول التالية. وللتعميم، نتناول متغير عشوائي X يمكن أن يأخذ أي قيمة في المدى- ∞ إلى+ ∞ (فمثلا. تأمل المتغير العشوائي X - نسبة الزيادة أو النقص في أرباح شركة ما مقارنة بالعام السابق- الذي ناقشناه في الفصل (٣-٥). إحتمال أن X يأخذ قيماً أقل من أو يساوي قيمة معينة x يعطي بالصيغة التالية:

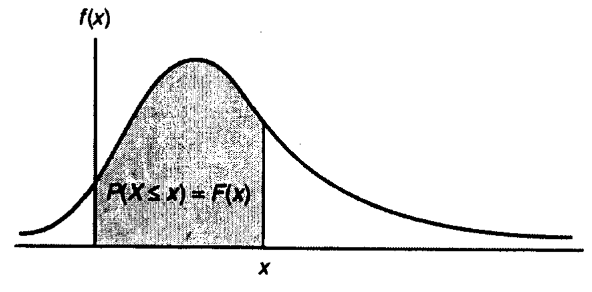
$$F(x) = P(X \le x)$$

حيث F(x) تعرف على أنها: دالة التوزيع التجميعية **Cumulative Distribution Function** للمتغير العشوائي X وتقرأ "إحتمال أن Xتأخذ قيماً أقل من أو تساوي x". دالة التوزيع التجميعية F(x) تمثل جزء من المساحة تحت الشكل البياني لدالة الكثافة f(x) والتي يحدها من اليمين قيمة x كما هي موضحة في شكل (٣-١٢). ومن المهم ملاحظة أن القيمة المعينة لـ x هي قيمة جزئية، حيث أن المساحة على يسارها تمثل إحتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيماً أقل من أو تساوي x. استخدام التفاضل والتكامل يقع خارج نطاق هذا المرجع، ولكن يجب أن نشير إلى أنه بالتفاضل والتكامل يكون من الممكن في بعض الحالات تحديد دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي المتصل. وللتوضيح، دالة التوزيع التجميعية في مثال(٣-٩)- حيث $f(x) = 2x$ - تستنتج لتكون (بإستخدام التفاضل والتكامل).

$$P(X \le x) = F(x) = x^2$$

لذلك وكما بينا في مثال (٣-٩):

$$P(X \le 0.25) = F(0.25) = (0.25)^2 = 0.0625$$
$$P(X \le 0.75) = F(0.75) = (0.75)^2 = 0.5625$$



شكل (٣-١٢) : دالة التوزيع التجميعية

من هذا التوضيح، يمكن أن نستنتج بعض الخصائص الهامة لدالة التوزيع التجميعية. مثلاً، حيث أن 0.75 > 0.25، فإن F (0.75) > F (0.25). هذا التناظر يجب ألا تندهش له، حيث أن دالة التوزيع التجميعية تعبر عن جزء من المساحة الكلية والمحددة من على اليمين بقيمة معينة لـ x. بمعنى أخر، كلما تحركنا في إتجاه اليمين، تتزايد القيمة الجزئية وهكذا نجد أن ذلك الجزء من المساحة الكلية والتي تقع على يسار القيمة الجزئية لا يمكن أن تتناقص أبداً، يلاحظ أيضاً كما بين من قبل:

$$P(0.25 \le X \le 0.75) = F(0.75) - F(0.25) = 0.5625 - 0.0625 = 0.5$$

عموماً، نفرض أن a، b نقطتان تقعان في الفترة التي يعرف فيها المتغير العشوائي المستمر X بحيث أن a<b فإن العبارات التي في المربع التالي ما هي إلا خصائص دالة التوزيع التجميعية لـ X.

خاصيتان أساسيتان لدالة التوزيع التجميعية F(x)

1- $F(a) \leq F(b)$ if $a < b$ (3-4)

بمعنى، إذا كانت a أقل من b، فإن إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من a لا يمكن أن تكون أكبر من إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من b.

2- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ (3-5)

بمعنى، أن إحتمال أن X تأخذ قيماً تقع بين b,a يمكن إيجاده عن طريق طرح إحتمال أن X تأخذ قيماً تقع أدنى a من إحتمال أن X تأخذ قيماً تقع أدنى b.

تمارين:

(٣-٣٨) ماهو إحتمال أن متغير عشوائي متصل يأخذ قيمة معينة؟ أشرح.

(٣-٣٩) إشرح الفروق الأساسية بين دالة الإحتمال لمتغير عشوائي متقطع ودالة الكثافة الإحتمالية لمتغير عشوائي متصل.

(٣-٤٠) أعطيت دالة الكثافة الإحتمالية، إشرح كيف ندرس إحتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيماً في فترة معينة.

(٣-٤١) بإستخدام الهندسة، وضح ما إذا كانت الدوال التالية هي دوال كثافة إحتمالية لمتغير عشوائي متصل.

(a) $f(x) = \frac{x}{4}\ ;\ 0 \leq x \leq 2$ (b) $f(x) = \frac{x}{50}\ ;\ 0 \leq x \leq 10$

(٣-٤٢) بفرض أن دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير عشوائي متصل Xهي:

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ where } 0 \leq x \leq 2$$

بإستخدام الهندسة، حدد الإحتمالات التالية:

(أ) إحتمال أن X يأخذ قيما أكبر من 1.

(ب) إحتمال أن X يأخذ قيما أقل من $\frac{1}{2}$.

(جـ) إحتمال أن X يأخذ قيما في الفترة $(1 , \frac{1}{2})$.

(د) ما هوإحتمال أن X يساوي بالضبط واحد؟ لماذا؟

(هـ) ما هو إحتمال أن X يأخذ قيما أكبر من 3 ؟

(٣-٤٣) بفرض أن دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير عشوائي متصل X هي :

$$f(x) = \frac{1}{8} \quad \text{where } -2 \leq x \leq 6$$

بإستخدام الهندسة، أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما هو إحتمال أن X يأخذ قيما أقل من صفر ؟

(ب) ما هو إحتمال أن X يأخذ قيما أكبر من 4 ؟

(جـ) ما هو إحتمال أن X يأخذ قيما في الفترة (صفر، 4) ؟

(٣-٤٤) بفرض أن دالة الكثافة الإحتمالية لمتغير عشوائي متصل X هي :

$$f(x)= \frac{1}{2}\,, \quad \text{where } 0 \le x \le 2$$

بإستخدام الهندسة، حدد الإحتمالات التالية :

(أ) إحتمال أن X يأخذ قيما في الفترة ($\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{2}$).

(ب) إحتمال أن X يأخذ قيما أقل من $\frac{1}{2}$.

(جـ) إحتمال أن X يأخذ قيما أكبر من $\frac{3}{2}$.

(٣-٤٥) بفرض أن دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي في التمرين (٣-٤٣) هي :

$$F(x) = \frac{x+2}{8}\,, \text{ where } -2 \le x \le 6$$

إستخدم خصائص دالة التوزيع التجميعية الموضحة في نهاية الفصل (٣-٧) لتأكيد إجابتك عن الأسئلة في التمرين (٣-٤٣).

(٣-٤٦) بفرض أن دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي في التمرين (٣-٤٢) هي :

$$F(x) = \frac{x^2}{4}\,, \text{ where } 0 \le x \le 2$$

إستخدم خصائص دالة التوزيع التجميعية لتأكيد إجابتك عن الأجزاء من أ إلى جـ في التمرين (٣-٤٢).

(٣-٨) القيمة المتوقعة للمتغيرات العشوائية: Expected Values of Random Variables

في هذا الفصل، نناقش مقاييس رقمية تلخص المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الإحتمالية، مثلما فعلنا في الفصل الثانى، لنكشف عن الخصائص الهامة للبيانات من خلال الوصف الرقمي لها مثل المتوسط، التباين والإنحراف المعياري.

وعندما نتناول المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الإحتمالية، نجد أن مقاييس رقمية مثل المتوسط والتباين تعتمد على مفهوم هام يعرف بإسم التوقع **expectation**. في حياتنا اليومية، نحن نتعامل مع فكرة التوقع دون أن ندركها بالضبط. فمثلا، نفرض أنك أخبرت أصدقائك أنك "تتوقع" أن تحصل على تقدير "جيد" في الفصل الدراسي الحالي. فماذا تعني بذلك ؟ هل تعني أنك بالضرورة سوف تحصل على تقدير "جيد" بالضبط ؟

لكي نفهم ما تعنيه مثل هذه العبارة، فإنه من المفيد حقيقة أن نفهم ماذا يقصد بالقيمة المتوقعة **expected value** للمتغير العشوائي. فكرة القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ترجع جذورها إلى ألعاب الحظ والمقامرة، لأن المقامرين يرغبوا في معرفة المكسب المتوقع عند تكرار اللعب في مباراة ما. في هذا المعنى، القيمة المتوقعة تعني متوسط الكمية التي يكون المقامر مستعداً ليقبلها مكسب أو خسارة في كل لعبة وذلك عبر سلسلة طويلة جداً من اللعبات. هذا المعنى ينطبق أيضا لأي متغير عشوائي، لذا فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي هي متوسط قيم المتغير العشوائي عبر العديد من المشاهدات المتكررة وبمعني آخر، القيمة المتوقعة هي متوسط المتغير العشوائي في المدى الطويل.

ومفهوم القيمة المتوقعة مفيد جدا كوسيلة مساعدة لإتخاذ القرارات. فمثلا، دعنا نحلل مباراة الحظ التالية : نفرض أنك أعطيت قطعة عملة متوازنة لترميها ثلاث مرات للحصول على صورة. المباراة تنتهي بمجرد حصولك على الصورة أو بعد ثلاث محاولات إيهما يأتي أولا. فإذا ظهرت الصورة في

أول أو ثاني أو ثالث رمية فإنك تحصل على 8,4,2 دولار على التوالي، أما إذا فشلت في الحصول على صورة في الرميات الثلاث فأنك تخسر 20 دولار. هل تعتقد أن لديك رغبة في ان تلعب هذه المباراة ؟ كيف يمكنك أن تحدد بطريقة موضوعية ما إذا كان يجب عليك أن تلعب المباراة أم لا؟ أحد المناهج أن تبحث في مدى عدالة المباراة في المدى الطويل إذا ما لعبتها عدة مرات، أي إيجاد القيمة المتوقعة.

لتحديد القيمة المتوقعة، أي متوسط المكسب أو الخسارة في المدى الطويل، نفرض أن X تمثل الكمية التي نكسبها أو نخسرها في أي مرة نلعب فيها المباراة. القيم الممكنة لـ X هي 8,4,2 ، 20- دولار. إحتمال كسب أول قيمة هو نفسه إحتمال الحصول على صورة أي $\frac{1}{2}$. إحتمال كسب 4 دولار هو نفسه إحتمال الحصول على الكتابة في أول رمية ثم الحصول على صورة في الرمية الثانية، . هذين الحدثين مستقلين إحصائيا لذا، إحتمال الكتابة ثم الصورة هو $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. بإتباع نفس الأسلوب يتم تحديد باقي الإحتمالات لتكون $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{8}$ على التوالى. وهكذا فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X وإحتمالاتها على النحو التالي:

قيم X	التسلسل	الإحتمالات
2	ص	$P(x=2) = \frac{1}{2}$
4	ك ص	$P(x=4) = \frac{1}{4}$
8	ك ك ص	$P(x=8) = \frac{1}{8}$
-20	ك ك ك	$p(x=-20) = \frac{1}{8}$

يلاحظ أن مجموع الإحتمالات يساوي واحد، مثلما يجب أن يكون لأي توزيع إحتمالي متقطع ويمكن تفسير هذه المعلومات بالأسلوب التالي. أولا، نتذكر من الفصل (٣-٣) أن إحتمال حادث ما يمكن تفسيره كتكرار نسبي والذي به يقع الحادث في المدى الطويل. لذلك فإننا في المدى الطويل نتوقع أن نكسب 2 دولار في مرة واحدة من محاولتين، أن نكسب 4 دولار في مرة واحدة من أربع مرات أو محاولات، أن نكسب 8 دولار في مرة واحدة من ثمان محاولات وأن نخسر 20دولار في مرة واحدة من ثمان محاولات.

متوسط كمية المكسب أو الخسارة في المدى الطويل يمكن تحديدها بترجيح كل كمية نحددها للمكسب أو الخسارة بالإحتمال المناظر لها ثم تحديد المتوسط المرجح **Weighted average** لكل قيم X الممكنة. وهذا هو بدقة ما نعنيه بالقيمة المتوقعة لـ X . بضرب كل كمية محددة للمكسب أو الخسارة في إحتمال كسب أو خسارة هذه الكمية، ثم تجميع النواتج نحصل على المتوسط المرجح. هذا المتوسط المرجح يمثل متوسط الكمية التي نكسبها أو نخسرها في المدى الطويل. وعلى ذلك فالقيمة المتوقعة للمتغير X تصبح.

$$= 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + (-20) \times \frac{1}{8} = \$\ 0.50$$

وتعني أنه أذا لعبنا هذه المباراة العديد من المرات، فإننا نتوقع أن نكسب في المتوسط 0,50 دولار في كل مباراة.

يلاحظ أن القيمة المتوقعة 0.50 دولار ليست إحدى النواتج الممكنة للمتغير العشوائي ولن تكون كذلك لأنها تمثل متوسط قيمة X في المدى الطويل. لهذا السبب، نجد أن القيمة المتوقعة يساء تسميتها أو فهمها إلى حد ما، حيث أنه في الواقع ربما يكون من المستحيل أن X تساوي قيمتها المتوقعة لأي مفردة من مفردات X.

جدير بالذكر أنه في مباريات الحظ (أو المقامرة) والتي فيها المتغير العشوائي يمثل كمية مكسب أو خسارة، يقال عن المباراة أنها عادلة **Fair** إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي هي الصفر. إذا كانت القيمة المتوقعة موجبة القيمة، فإنه من المؤكد أنك ستكسب في المدى الطويل أما إذا كانت سالبة، فإنك ستخسر في المدى الطويل، ويجب أن تكون متأكدا أنه في ملاهي القمار، ان اللاعبين ليست لديهم قيم متوقعة موجبة. التوضيح السابق يوحى بالتعريف الرياضي التالي للقيمة المتوقعة لمتغير عشوائي متقطع.

> القيمة المتوقعة **Expected Value** لمتغير عشوائي متقطع X، تكتب على الصورة E(X) وتقرأ هكذا: "القيمة المتوقعة للمتغيرالعشوائي X" معطاه بالمتوسط المرجح.
>
> $$E(X) = \sum_{all\ x} x\,P(x)$$
>
> حيث دالة الإحتمال p(x) تعطي الأوزان أو الترجيحات المقترنة بقيم X الممكنة.

التعريف السابق للقيمة المتوقعة يطبق فقط على المتغيرات العشوائية المتقطعة. ولكن ماذا لو كانت مجموعة النواتج الممكنة لـ X متصلة ؟ القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي متصل هي أيضا القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي في المدى الطويل. حقيقة التعريف واحد مثلما كان في المتغير المتقطع، ولكن نقوم بإحلال علامة التكامل محل علامة المجموع وإحلال دالة الكثافة الإحتمالية محل دالة الإحتمال. وبسبب شمول التعريف على علامة التكامل، فإننا نعطي تعريفا منهجيا للقيمة المتوقعة لمتغير عشوائي متصل في ملحق هذا الفصل. وحيث أن E (x) هي القيمة المتوسطة في المدى الطويل لأي متغير عشوائي X، فإنه من المعتاد أيضا أن يستخدم الرمز μ ليدل على القيمة المتوقعة وهكذا، فإن الرمز μ، E(X) تعتبر مترادفات عدا حالات قليلة معينة.

ومفهوم القيمة المتوقعة له تطبيقات في كثير من الصناعات خاصة في صناعة التأمين، ألم تتساءل أبدا كيف يتحدد قسط التأمين؟ من المحتمل جدا أنك تعرف أن الشباب الذكور المراهقين يدفعوا كثيرا في التأمين على السيارات، لأن هؤلاء الشباب في الغالب تكون إحتمالات الحوادث لديهم أكبر من السائقين الآخرين.

وبمصطلحات بسيطة، أي شركة تأمين تحدد إحتمالات قيم مطالبات التعويض المختلفة وفق صفة السائق (مثل "شاب ذكر بالغ"). مثل هذه الإحتمالات تعتمد على معلومات تاريخية والتي يتم تحديثها دوريا. بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل مكسب أو خسارة الشركة خلال فترة زمنية محددة، فإن الشركة تقوم بتحديد قسط التأمين المتعادل الذي يجعل القيمة المتوقعة لـ X هي الصفر (مبارة عادلة). هذا يعني أن متوسط المكسب أو الخسارة لعدد كبير من العملاء هو الصفر، بالطبع تضيف الشركة تكاليف ثابتة وهامش ربح لقيمة قسط التأمين المتعادل وذلك لتحديد القيمة النهائية لقسط التأمين. فيما يلي مثالين يوضحان إستخدام القيمة المتوقعة في حالات مالية وتأمينية.

مثال (٣-١٠)

شركة تأمين ترغب في تحديد قسط التأمين المتعادل سنويا وذلك لوثيقة تأمين على الحياة لرجل عمره 25 سنة قيمتها 100,000 دولار. من الجداول الاكتوارية، تعلم شركة التأمين أنه حوالي 3 من كل 10,000 رجل أعمارهم 25 سنة يموتوا قبل عيد ميلادهم الـ 26 ، ما هي قيمة قسط التأمين المتعادل؟

الحل:

بفرض أن m هي قيمة قسط التأمين المتعادل المطلوبة، وبفرض أن X متغير عشوائي يمثل مكسب أو خسارة الشركة في الوثيقة الواحدة. هناك قيمتان ممكنتان لـX: القسط m والذي سوف تكسبه الشركة إذا عاش الرجل والخسارة (m- 100,000) والتي سوف تدفعها الشركة إذا مات الرجل. فإذا مات ثلاثة من كل 10,000 خلال عام فإن إحتمال خسارة (m-100,000) هو 0.0003 من ناحية أخرى، إذا عاش 9997 من كل 10,000 لعام كامل، فإن إحتمال كسب m هو 0.9997 ولتحديد قسط التأمين المتعادل m، فإننا نضع القيمة المتوقعة لـ X بالصفر والحل بالنسبة لـm.

$$E(x) = m(0.9997) + (m - 100,000)(0,0003) = 0$$

$$0.9997m + 0.0003m - 30 = 0$$

$$m = 30\ \$$$

لذلك على الشركة أن تطلب من الرجل 30 دولار سنويا قسط تأمين متعادل عن وثيقة تأمين على الحياة قمتها 100,000 دولار. ولكي تغطي التكاليف الثابته وتحقق ربحا فعلى الشركة أن تطلب أكثر من 30 دولار.

مثال (٣-١١)

مستثمر لديه 100,000 دولار متاحة للإستثمار لمدة عام واحد. يفاضل المستثمر بين إختيارين: سند مالي يحقق عائد سنوي ثابت بمعدل 12%، ووعاء إستثماري آخر بمعدل عائد سنوي يمكن إعتباره متغير عشوائي بقيم تعتمد على الأوضاع الإقتصادية السائدة. وإعتمادا على البديل الثاني، توفرت بيانات تاريخية في ظل أوضاع إقتصادية متنوعة على النحو التالي:

معدل العائد	الإحتمال
0.30	0.20
0.25	0.20
0.20	0.30
0.15	0.10
0.10	0.10
0.05	0.10

إذا كان الإختيار بين البدائل يتم على أساس عائد المعدل المتوقع، فإي الخطط الإستثمارية يجب إختيارها.

الحل

إذا أختيرت الخطة الأولى، فإن عائد إستثمار 100,000 دولار سيكون 12,000 دولار حيث أن المعدل ثابت عند 12%. بالنسبة للخطة الثانية، نفرض أن المتغر العشوائي X يدل على معدل العائد. قيم X الممكنة واحتمالاتها موضحة في الجدول السابق. وعلى ذلك تستنبط القيمة المتوقعة لمعدل العائد

على النحو التالي:

E (x) =(0.3) (0.2)+ (0.25)(0.20)+(0.20)(0.3) +(0.15)(0.10)+(0.1)(0.1)+(0.05)(0.1)= 0.2

وعلى ذلك، فالخطة الثانية هي أفضل إختيار لأن المعدل المتوقع للعائد هو 20% وهذا يحقق للمستثمر عائد متوقع 20,000$ = 0.2 x 100,000 ومع ذلك فهذا الإختيار يجلب بعض المخاطر. العائد 20,000 دولار هو مجرد قيمة متوقعة فقط، والمستثمر ليس عنده ضمان أن العائد الفعلي سوف يتعدى ما تحققه له الخطة الأولى. في الحقيقة هناك إحتمال قدره 0.2 أي أن معدل العائد لن يكون أكثر من 10% .

التباين والإنحراف المعياري لمتغير عشوائي

في مثال (٣-١١) رأينا أن القيمة المتوقعة للخطة الثانية تزيد عن العائد المضمون في الخطة الأولى. ومع ذلك، فبعض المستثمرين قد يفضلوا الخطة الأولى لأن معدل العائد يمكن التنبؤ به كاملا. عندما يشتمل الأمر على مخاطرة، فإننا نحتاج إلى أن نعرف المزيد اكثر مما نعرفه عن القيمة المتوقعة، لأن القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي تقيس فقط النزعة المركزية لقيم المتغير العشوائي. والقيمة المتوقعة لا توضح شيئا عن الإختلافات بين قيم المتغير العشوائي. لذلك فإننا نحتاج إلى مقياس للإختلاف مثل التباين. في الأساس، منهجنا هنا يتوازي مع مانقشناه في الفصل الثاني عندما فكرنا في قياس إختلاف قيم عينة من البيانات. في هذه الحالة فإننا نبحث في قياس إختلاف قيم المتغير العشوائي التي تحدث عبر المشاهدات المتكررة في المدى الطويل. يعرف التباين لمتغير عشوائيX على النحو التالي:

التباين للمتغير **Variance X**، ويكتب هكذا Var (x)، هو التوقع لمربعات الفرق بين المتغير العشوائي ومتوسطه μ. وصيغته هي:

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{all\ x}(x-\mu)^2\ p(x) \qquad \textbf{(3.7)}$$

حيث تمثل دالة الإحتمال P(x) الأوزان المقترنة بمربعات الفروق المناظرة.

كما يتضح من هذا التعريف، نجد أن التباين يشتمل على عملية التوقع. نفس العملية تتحقق بالنسبة لتباين متغير عشوائي متصل وتعريفه في الواقع لا يختلف عن التعريف التقليدى (موضح في ملحق هذا الفصل). ويمكن التفكير في التباين كوسيلة لقياس الإختلاف بين قيم المتغير العشوائي بنفس طريقة التفكير في أن القيمة المتوقعة هي متوسط هذه القيم في المدى الطويل.

ويتحدد التباين بحساب المتوسط المرجح لمربعات فروق قيم X عن متوسطها، حيث يرجح كل مربع فرق بالإحتمال المناظر له. يمكن أيضا التفكير في التباين لمتغير عشوائي كمقياس للإنتشار في التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي، فمثلا، في حالة المتغير المستمر، إذا كانت معظم المساحة التي تصورها دالة الكثافة الإحتمالية تقع بالقرب من المتوسط فإن التباين يكون صغيرا، أما إذا كانت المساحة منتشرة جدا فالتباين يكون كبيرا.

مثلما كان في الفصل الثاني، الجذر التربيعي للتباين هو الإنحراف المعياري σ . على الرغم من أن σ, σ^2 هما تقريبا رموز عالمية لكل من التباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي على التوالي، فإننا غالبا نستخدم التحديدات Var (x) للتباين و SD(x) للإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

مثال (٣-١٢)

بالرجوع إلى مثال(٣-١١)، حدد التباين والإنحراف المعياري لعائد معدل الخطة الثانية.

الحل:

نتذكر أن القيمة المتوقعة أو متوسط معدل العائد هو $\mu = 0.2$ وحساب التباين خطوة بخطوة موضح في الجدول التالي:

معدل العائد X	$(X-\mu)$	$(X-\mu)^2$	P(X)	$(X-\mu)^2$ P(X)
0.30	(0.30 - 0.2) = 0.10	0.0100	.20	.00200
0.25	(0.25 - 0.2) = 0.05	.0025	.20	.00050
0.20	(0.20 - 0.2) = 0.00	.0000	.30	.00000
0.15	(0.15 - 0.2) =- 0.05	.0025	.10	.00025
0.10	(0.10 - 0.2) =- 0.10	.0100	.10	.00100
0.05	(0.05 - 0.2) =- 0.15	.0225	.10	.00225
				.00600

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum (x-\mu)^2 \; p(x) = 0.006$$

وحيث أن Var (X) = 0.006 فإن الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \text{SD}(X) = \sqrt{0.006} = 0.0775$$

في كثير من الحالات يكون من السهل حسابيا أستخدام صيغ بديلة لتحديد التباين للمتغير العشوائي، فمن المكن أن نوضح أنه لأي متغير عشوائي X:

$$\text{Var}(X) = E(x-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 \qquad (3.8)$$

حيث $E(x^2)$ هي القيمة المتوقعة لمربع المتغير العشوائي X . فإذا كان المتغير العشوائي متغير متقطع، فإن: $E(x^2)$ تتحدد كالآتي:

$$E(X^2) = \sum_{\text{all } x} X^2 \; P(x) \qquad (3.9)$$

لذلك فإن الصيغة البديلة لتباين متغير عشوائي متقطع X هي:

$$\text{Var}(x) = \sum X^2 \; P(x) - \mu^2 \qquad (3.10)$$

حيث μ هي متوسط X. المثال التالي يوضح كيف أن معلومية الإنحراف المعياري لمتغير عشوائي بالإضافة إلي قيمته المتوقعة يمكن أن تساعد في إتخاذ القرارات.

مثال (٣-١٣)

بالرجوع إلى مثال (٣-١١) نفرض أن هناك خطة إستثمارية ثالثة ذات معدلات عائد مختلفة، إحتمالاتها المقترنة بها على النحو التالي :

الإحتمال	معدل العائد
0.4	0.23
0.4	0.20
0.1	0.18
0.1	0.10

ما بين الخطط الإستثمارية الثانية والثالثة ، أيهما تفضل ؟

الحل

طريقة حساب القيمة المتوقعة للخطة الثالثة هي نفس طريقة الخطة الثانية، بمعنى أن :

$$E(x) = (0.23)(0.4) + (0.20)(0.4) + (0.18)(0.1) + (0.1)(0.1) = 0.2$$

حساب التباين للخطة الثالثة خطوة بخطوة بإستخدام الصيغ (3.9), (3.10) موضح في الجدول التالي:

X	X^2	P (X)	X^2 P (X)
.23	.0529	.4	.02116
.20	.0400	.2	.01600
.18	.0324	.1	.00324
.10	0.100	.1	.00100
			$\sum X^2 P(X) = .04140$

حيث أن: $\mu = .2$ فإن : $Var(x) = E(x)^2 - \mu^2 = 0.0414 - (0.2)^2 = 0.0014$

والإنحراف المعياري للخطة الثالثة هو : $SD(x) = \sqrt{0.0014} = 0.0374$

كنتيجة لذلك ، فإن الخطة الثالثة هي أفضل إختيار ، حيث أن الإنحراف المعياري لها هو تقريبا نصف الخطة الثانية (0.0775) بينما القيمة المتوقعة واحدة في الحالتين. بمعني آخر ، هناك إختلاف أقل وبالتالي مخاطرة أقل مع الخطة الثالثة عن الخطة الثانية.

تمارين:

(٣-٤٧) اشرح المقصود بالقيمة المتوقعة لمتغير عشوائي.

(٣-٤٨) هل معرفة القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي تعطي معلومات عن تباين قيم المتغير العشوائي ؟ اشرح.

(٣-٤٩) بالرجوع إلى التمرين (٣-٣٢)، حدد :

(أ) القيمة المتوقعة لعدد الأطفال ذكور في عائلة ذات ثلاثة أطفال.

(ب) التباين والإنحراف المعياري.

(٣-٥٠) بالرجوع إلى التمرين (٣-٣٧)، حدد:

(أ) القيمة المتوقعة لعدد المقاعد المحجوزة.

(ب) التباين والإنحراف المعياري.

(٣-٥١) بالرجوع إلى التمرين (٣-٣٤) حدد :

(أ) القيمة المتوقعة لعدد الأشخاص اللذين يشتروا وثائق تأمين في يوم واحد.

(ب) التباين والإنحراف المعياري.

(٣-٥٢) إعتمادا على بيانات تاريخية، كان التوزيع الإحتمالي للمطالبات التي تدفع من قبل إحدى شركات التأمين هي:

المطالبة ($)	الإحتمال
0	.880
200	.050
500	.030
1000	.020
2000	.010
5000	.005
10000	.005

فإذا كان قسط التأمين السنوي 200$، فما هو متوسط أرباح الشركة إعتمادا على معيار القيمة المتوقعة.

(٣-٥٣) شركة تأمين تقوم بالتأمين على أصحاب المنازل. من السجلات التاريخية فإن وثيقة تأمين قيمتها 100,000$ ، هناك إحتمال 0.001 خسارة كلية لقيمة الوثيقة في سنة معينة ، كذلك إحتمال 0.003 لخسارة 50%. بغض النظر عن خسائر جزئية أخرى، ما هو قسط التأمين السنوي الذي يجب أن تتقاضاه الشركة من أصحاب المنازل ويكون قسطا متعادلا.

(٣-٥٤) مستثمر لديه 10,000 دولار متاحه للأستثمار خلال سنة واحدة، ولدى المستثمر ثلاث إختيارات هي:

الإختيار A : 30% عائد بإحتمال .5
لاعائد بإحتمال .1
10% خسارة بإحتمال .4

الإختيار B : 50% عائد بإحتمال .2
20% عائد بإحتمال .5
لا عائد بإحتمال .1
40% خسارة بإحتمال .2

الإختيار C : يحقق عائد 9%.

(أ) إعتمادا على العائد المتوقع، أي هذه الإختيارات يفضلها المستثمر ؟

(ب) أحسب الإنحرافات المعيارية للإختيارات B,A.

(٣-٩) قواعد التوقع للدوال الخطية ولمجموع المتغيرات العشوائية

Expectation Rules For Linear Functions and Sums of Random Variables

في هذا الفصل نقدم قواعد تشمل التوقع للدوال الخطية ولمجموع المتغيرات العشوائية. هذه القواعد هامة من أجل تفهم الموضوعات التالية وخاصة موضوعات الفصل الخامس. في الفصل الحالي، نناقش المتوسطات، التباينات، الإنحرافات المعيارية للدول الخطية ذات متغير عشوائي واحد وكذلك ذات مجموع إثنين أو أكثر من المتغيرات العشوائية.

للتوضيح، لنفرض أن بائعة تتقاضى راتبا أسبوعيا 200 دولار بالإضافة إلى 8% من قيمة المبيعات التي تحققها خلال الأسبوع. بالطبع، قيمة المبيعات الأسبوعية هي كميات غير مؤكدة. بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل قيمة المبيعات الأسبوعية، وحيث أن إجمالي راتبها الأسبوعي هو 200 دولار بالإضافة إلى 8% من X، يمكننا القول بأن إجمالي راتبها هو دالة خطية في X. فإذا فرضنا أن المتغير العشوائي Y يمثل إجمالي المرتب فإن:

$$Y = 200 + 0.08\, X$$

إذا كنت أنت هذه البائعة، ألا ترغبين في معرفة ما هو متوسط المبلغ الذي يتوقع تكوينه في الأسبوع ؟ بمعنى آخر ألا ترغبين في تحديد القيمة المتوقعة لـ Y ؟ بالطبع، أنت ترغبين في ذلك.

عموما، نفرض أن a, b هما اي ثابتين، وبالتالي المتغير العشوائي :

$$Y = a + b\, X \qquad \textbf{(3.11)}$$

يصبح دالة خطية في المتغير العشوائي X، والقيمة المتوقعة لـY هي نفس القيمة المتوقعة للدالة الخطية في X، بمعنى :

$$E\,(Y) = E\,(a + bX) = a + bE\,(X) \qquad \textbf{(3.12)}$$

يلاحظ في موضوع البائعة أن : $a = 200$, $b = 0.08$ بفرض أن قيمة المبيعات المتوقعة أسبوعيا هو: $E\,(X) = 9000\$$ فإن إجمالي الراتب الأسبوعي المتوقع يكون:

$$E\,(Y) = 200 + (0.08)\,E\,(x) = 200 + (0.08)\,(9000) = 920$$

لوكنت إنت هذه البائعة، فأنت تعرفين الآن أن القيمة المتوقعة (المتوسط) للراتب الأسبوعي هو 920 دولار، فهل هذه المعلومات كافية لك أم أنك ترغبين في معرفة شئ آخر ؟ بالطبع ترغبين في ذلك. معرفة ان المتوسط 920دولار لا يعطيك معلومات عن التقلبات في جملة الراتب الأسبوعي، لهذا فأنت في حاجة إلى معرفة التباين، الإنحراف المعياري.

بصفة عامة، اذا كان المتغير العشوائي Y دالة خطية في المتغير العشوائي X كما هو موضح بالصيغة (3.11)، فإنه يمكن إثبات أن :

$$Var\,(Y) = b^2\, Var\,(X) \qquad \textbf{(3.13)}$$

$$SD\,(Y) = |b|\, SD\,(X) \qquad \textbf{(3.14)}$$

يلاحظ في الصيغة (3.14) إستخدام القيمة المطلقةلـ b، وبالتالي إذا كانت b سالبة فإننا نهمل الإشارة السالبة، يلاحظ أيضا أن الثابت a في الصيغة (3.11) ليس له تأثير مطلقا على التباين أو على الإنحراف المعياري كما هو واضح في الصيغ(3.13) ,(3.14) على التوالى.

في مثال البائعة، لنفرض أن الإنحراف المعياري لقيمة المبيعات الأسبوعية هو: $SD(X) = 3000$ دولار بالتالي فإن التباين والإنحراف المعياري لجملة الراتب الأسبوعي يكونا:

$$Var\ (Y) = (0.08)^2\ (3000)^2 = 57600$$

$$SD\ (Y) = \sqrt{57600} = (0.08)(3000) = \$\ 240$$

من المفاهيم الهامة التي تشتمل على دالة خطية لمتغير عشوائي، المتغير العشوائي المعياري أو القياسي **Standardized random variable**. بفرض أن X هو متغير عشوائي حيث:

$SD\ (X) = \sigma\ ,\ \ E\ (X) = \mu$ فإن الكمية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \textbf{(3.15)}$$

تعرف بالمتغير العشوائي Z، بحيث أن متوسط Z هو الصفر وانحرافه المعياري هو الواحد الصحيح. بمعنى أخر، $SD\ (Z) = 1\ ,\ E\ (Z) = 0$. المتغير العشوائي Z (يستخدم الحرف Z هنا كإلتزام تقليدي في الإحصاء) هو متغير قياسي أو معياري يناظر Xوقد استخدم بكثرة في الفصول التالية. يلاحظ أن الصيغة (3.15) هي حالة خاصة من الصيغ (3.12) عندما: $a = -\mu/\sigma$ ، $b = 1/\sigma$

هذه الكمية Z هي نفسها التي قدمناها في الفصل الثاني كمقياس للترتيب النسبي وكما بينا في الفصل الثاني، نعلم أنه عند أي قيمة معينة x من قيم X تتحدد قيمة Z ، $Z=(X-\mu)/\sigma$ لتدل على إنحراف قيمة X عن المتوسط μ بدلالة عدد من وحدات الإنحراف المعياري. فمثلا، إذا كانتX تمثل درجات في إختبار الذكاءI Q، وكان : $SD(X) = 10$ ، $E(X)=100$ فإن $Z=(X- 100)\ /10$ هو متغير معياري يناظر X . بصفة خاصة إذا كان لشخص ما $IQ = 120$ فإن لهذا الشخص عدداً من وحدات الانحراف المعيارية أعلى من IQ بالكمية: $Z=(120-100)\ /10 = 2$ وقيمة Z لهذا الشخص هي 2.

والآن نتوسع في مناقشة الدوال الخطية للمتغير العشوائي لتشمل مجموع وفروق المتغيرات العشوائية ،لأن مثل هذه المفاهيم مفيدة للفصول التالية. بفرض أن: a, b_1, b_2 أية ثوابت وأن X_1, X_2 متغيرين عشوائيين وإذا كان المتغير Y هو توليفة خطية في X_1, X_2 فإن :

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 \qquad \textbf{(3.16)}$$

وأن القيمة المتوقعة لـY هي نفس الدالة الخطية للقيمة المتوقعة لـ X_1, X_2 وهكذا:

$$E\ (\ Y) = a + b_1\ E(x_1) + b_2(x_2) \qquad \textbf{(3.17)}$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت X_1, X_2 متغيرات مستقلة إحصائيا عن بعضها البعض فإن:

$$Var\ (Y) = b_1^2\ Var\ (X_1) + b_2^2\ Var\ (X_2) \qquad \textbf{(3.18)}$$

مثال (٣-١٤)

بائع يستمد دخله من بيع نوعين متمايزين من المنتجات , B,A. من الخبرة السابقة يعرف أن حجم المبيعات منA لايتأثر بمبيعات B. دخله الشهري بالدولار هو 10% من حجم مبيعات المنتج Aو15% من حجم مبيعات B. في المتوسط كانت قيمة مبيعاته الشهرية من المنتج A هي 10,000 دولار بانحراف معياري 2000 دولار وقيمة متوسط مبيعاته من المنتج B شهريا هي 8000 دولار بإنحراف معياري 1000 دولار. حدد القيمة المتوقعة والإنحراف المعياري لدخله الشهري.

الحل:

نفرض أن المتغيرات X_2,X_1 تمثل قيمة المبيعات الشهرية بالدولار للمنتجات B,A على التوالي. حيث أن البائع ليس لديه دخل شهري مضمون أو مؤكد، فإن دخله الشهري يمكن التعبير عنه كتوليفة خطية:

$$Y = 0.1\, X_1 + 0.15\, X_2$$

وهي مشابهة للصيغة (3.16) حيث: $a = 0$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.15$.

وكنتيجة لذلك:

$$E(Y) = 0.1\, E(X_1) + 0.15\, E(X_2) = (0.1)(10{,}000) + (0.15)(8000) = \$2200$$

وحيث يفترض الإستقلال الإحصائي، نحصل من الصيغة (3.18):

$$Var(Y) = (0.1)^2\, Var(X_1) + (0.15)^2\, Var(X_2)$$

$$= (0.1)^2 (2000)^2 + (0.15)^2 (1000)^2 = 62500$$

وبالتالي

$$SD(Y) = \sqrt{62500} = \$250$$

وكما سنرى في الفصول القادمة سنكون مهتمين بكثرة بتحديد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للفرق بين متغيرين عشوائيين. لنفرض أن المتغير العشوائي Y يمثل الفرق بين المتغيرات العشوائية X_2,X_1 :

$$Y = X_1 - X_2 \qquad (3.19)$$

في الصيغة (3.16)، إذا وضعنا: $a=0$, $b_1=1$ ، $b_2=-1$ فإننا نحصل على الصيغة (3.19).

وكنتيجة لذلك:

$$E(Y) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) \qquad (3.20)$$

بمعنى أن القيمة المتوقعة للفرق بين متغيرين عشوائيين هو الفرق بين القيمة المتوقعة لكل منهما. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت X_2,X_1 متغيرات عشوائية مستقلة فإن:

$$Var(Y) = I^2\, Var(X_1) + (-1)^2\, Var(X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) \qquad (3.21)$$

وعلي ذلك، فتباين الفرق بين متغيريين عشوائيين مستقلين هو مجموع تبايناتهما.

مثال (٣-١٥)

في إحدى الجامعات الكبيرة كان متوسط درجات الإختبار الشفوي في أحد المواد للطالبات هو 480 بإنحراف معياري 60 وللطلبة كان المتوسط هو 460 بإنحراف معياري 50. حدد القيمة المتوقعة والإنحراف المعياري للفرق بين درجات الإختبار الشفوي لطالبين: طالب وطالبة، أختيرا بطريقة عشوائية.

الحـل

نفرض أن المتغيرات العشوائية X_2,X_1 تمثل درجات الإختبار الشفوي للطالبة والطالب على التوالي، وحيث أن $E(X_2) = 460$, $SD(X_2) = 50$, $E(X_1) = 480$, $SD(X_1) = 60$

عين المتغير العشوائي Y ليعبر عن الفرق بين X_2, X_1 . من الصيغة (3.20)، القيمة المتوقعة للفرق هي :

$$E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = 480 - 460 = 20$$

ويمكن أن نفترض الإستقلال الإحصائي لأن مجتمع الطلاب كبيرا مقارنة مع حجم العينة العشوائية (طالب واحد وطالبة واحدة). من الصيغة (3.21) نستنتج أن :

$$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) = (60)^2 + (50)^2 = 6100$$

$$SD(Y) = \sqrt{6100} = 78.10$$

أخيرا، فإننا نرغب في تطوير التوليفة الخطية التي تشمل متغيرين عشوائيين كما هي في الصيغة (3.16) إلي توليفة خطية أخرى تشمل أكثر من متغيريين عشوائيين. نفرض أن $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$ هي أية ثوابت وأن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي n من المتغيرات العشوائية. فإذا كان المتغير العشوائي Y هو توليفة خطية على الصورة :

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n \qquad (3.22)$$

فإن :

$$E(Y) = a + b_1E(X_1) + b_2E(X_2) + \ldots + b_nE(X_n) \qquad (3.23)$$

يضاف إلى ذلك، إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلة إحصائيا، فإن :

$$Var(Y) = b_1^2Var(X_1) + b_2^2Var(X_2) + \ldots + b_n^2Var(X_n) \qquad (3.24)$$

يلاحظ أن الصيغ من (3.22) إلى (3.24) هي إمتداد مباشر للصيغ من (3.16)إلي (3.18) على التوالي.

مثال (٣-١٦)

مستثمر متاح لديه 20000 دولار لإستثمارها خلال عام واحد في ثلاثة أنواع من الخطط (أ، ب، جـ). قرر أن يستثمر 8000 دولار في الخطة (أ) و8000 دولار في الخطة (ب) و 4000 في الخطة (جـ). تاريخيا الخطتين (أ) ، (ب) تحققان في المتوسط عائد سنوي %10,%8 بإنحراف معياري %1، %4 على التوالي، أما الخطة الثالثة (جـ) فمن المتوقع أن تزيد في معدل القيمة إلى %15 بإنحراف معياري كبير %12 ليعكس الإختلاف الكبير في العائد المحتمل. حدد العائد السنوي المتوقع والإنحراف المعياري لهذا المستثمر.

الحل

نفرض أن المتغيرات العشوائية X_2, X_1 تمثل العائد السنوي لكل من (أ)، (ب) علي التوالي، وأن X_3 تمثل العائد من نوع (جـ). دعنا نعرف العائد السنوي لمبلغ الإستثمار 20000 بالتوليفة الخطية التالية:

$$Y = 8000\,X_1 + 8000\,X_2 + 4000\,X_3$$

من الواضح أنها تعد حالة خاصة من الصيغة (3.22)حيث: $a=0$, $b_1=8000$ $b_2=8000$, $b_3=4000$ وحيث أن $E(X_1) = 0.08$, $E(X_2) = 0.10$, $E(X_3) = 0.15$ ، بإستخدام الصيغة (3.23) نجد أن العائد السنوي المتوقع :

$$E(Y) = (8000)(0.08) + (8000)(0.10) + (4000)(0.15) = \$2040$$

ومن المعلومات المعطاه: $SD(X_3) = 0.12,\ SD(X_2) = 0.04,\ SD(X_1) = 0.01$

بافتراض الإستقلال بين المتغيرات الثلاث وإستخدام الصيغة (3.24) نحصل على تباين العائد السنوي.

$$Var(Y) = (8000)^2 (0.01)^2 + (8000)^2 (0.04)^2 + (4000)^2 (0.12)^2 = 339200$$

أما الإنحراف المعياري فهو :

$$SD(Y) = \sqrt{339200} = \$582.41$$

إستخدام الكمبيوتر:

يمكن إستخدام البرامج الإحصائية الجاهزة بسهولة في محاكاة كثير من الحالات ومنها مباريات الحظ أو الصدفة. المثال التالي يستخدم برنامج MINI TAB لمحاكاة عجلة الروليت الدوراة.

مثال (٣-١٧)

عجلت الروليت في كازينو للمراهنات بها 18 رقم أحمر، 18 رقم أسود ، 2 رقم أخضر (البيت) من بين الإمكانيات المتاحة، يمكن للاعب أن يختار أن يلعب على عدد زوجي أو فردي، أو أن يلعب على اللون الأحمر أو الأسود ، وفي كلا الحالتين إحتمال المكسب = 0.473684 = 18/38 وذلك متى إستقرت العجلة عند الرقم الأخضر (البيت). حاكي (قلد) 200 لعبة (دورة) حيث يراهن اللاعب بـ 10 دولار على اللون الأحمر / الأسود أو على الرقم فردي / زوجي.

(أ) ما هو صافي المكسب أو الخسارة للاعب عند تنفيذ الـ 200دورة؟

(ب) هل إجابتك في (أ) تتفق مع القيمة المتوقعة ؟

الحل

الجدول (٣-٧) يوضح محاكاة 200 دورة حيث (1) يمثل مكسب اللاعب، (0) تمثل الخسارة :

الجدول (٣-٧) محاكاة 200 دورة في لعبة الروليت

0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0

(أ) من جدول (٣-٧) يلاحظ أن اللاعب كسب 94 مرة (الرقم 1 تكرر 94 مرة) وخسر 106 مرة (الرقم 0 تكرر 106 مرة) لذا فمكسب اللاعب 940= 10 x 94دولار وخسارته 1060 =10 x 106 دولار ويكون صافي خسارته = 120 دولار.

(ب) بفرض أن X تمثل قيمة مكسب أو خسارة اللاعب في كل لعبة. القيم الممكنة لـ X هي 10 دولار بإحتمال 0.473684 (18 من كل 38)، − 10 دولار بإحتمال 0.526316 (20 من كل 38) ومن ثم تكون القيمة المتوقعة لـ X هي:

$$E (X) = (10) (0.473684) + (-10) (0.526316) = - 0.53$$

وعليه إذا لعبت هذه اللعبة الكثير من المرات، فإن اللاعب في المتوسط يخسر 0.53 دولار عن كل لعبة، والخسارة المتوقعة عندما يلعب 200 دورة أو مرة ستكون 200 x .53 - = 106 دولار. لاحظ أن الخسارة الفعلية كانت 120 دولار وهي تقترب من القيمة المتوقعة.

تمارين:

(٣-٥٥) بائع في معرض سيارات يتسلم شهريا 500 دولار بالإضافة إلى 100 دولار عن كل سيارة يقوم ببيعها خلال الشهر. فإذا كان متوسط عدد السيارات التي يبيعها ذلك البائع في الشهر هو 15 سيارة بإنحراف معياري 5 سيارات، فما هي القيمة المتوقعة لدخل البائع شهريا وما هي قيمة الإنحراف المعياري لدخله الشهري.

(٣-٥٦) بفرض أن التكلفة الثابته في عملية انتاجية معينه هي 5000 دولار وأن تكلفة انتاج الوحدة الواحدة هي 15 دولار. اذا كان متوسط عدد الوحدات المنتجه 10000 وحدة بإنحراف معياري 500 وحده. حدد متوسط التكلفة الكلية والإنحراف المعياري لها.

(٣-٥٧) بعد تخرجك من الجامعة عرض عليك وظيفة أول مرتب لها (سنويا) 26400 دولار وعرض على صديقك جودي وهو خريج هندسة وظيفة أول مرتب لها 30500 أما صديقك بيل وهو خريج علوم فقدعرض عليه وظيفة أول مرتب لها هو نفس المرتب الذي عرض عليك. فإذا علمت أن متوسط الرواتب في السنة لخريج تجارة، هندسة، علوم هي 25800, 30100, 25500 دولار بإنحراف معياري 2000, 1200,1600 دولار على التوالي، أي هذه الوظائف يعد الأفضل ؟وأيها يعد الأسواء؟ دعم إجابتك.

(٣-٥٨) مصنع يقوم بإنتاج نوعين مختلفين من المنتجات B,A . تكلفة انتاج الوحدة الواحده من النوع A هي8 دولار وللنوع B 5 دولار أما التكلفة الثابتة فهي 10000 دولار. فإذا علمت أن متوسط عدد الوحدات المنتجه من A هي 15000 وحده بإنحراف معياري 2000 وحده ومن النوع B كان متوسط عدد الوحدات 20000 وحده بإنحراف معياري 2500 وحده. حدد متوسط التكلفة الكلية وإنحرافها المعياري. يمكنك أن تفترض الأستقلال بين هاذين النوعين من المنتجات.

(٣-٥٩) أفترض أن متوسط درجات إختبار GMAT للأشخاص الحاصلين على بكالوريوس في العلوم غير التجارية هو 525 درجة بإنحراف معياري 40 درجة، بينما متوسط الدرجة لحاملي بكالوريوس تجارة هو 510 درجة بإنحراف معياري 50 درجة. مفترضا الإستقلال الإحصائي، حدد المتوسط والإنحراف المعياري للفرق بين درجات GMAT لكل من التجارين وغير التجارين.

(٣-٦٠) سوبر ماركت له ثلاث فروع C,B,A مختلفة الحجم في ثلاث مناطق مختلفة. نسب الأرباح المحققة من تلك الفروع هي 2%, 3%, 4% على التوالي، فإذا كان متوسط قيمة المبيعات اليومية في تلك الفروع هي 60000 ,100000, 50000 دولار بإنحراف معياري 5000 ,8000 ,10000

دولار على التوالي. حدد متوسط الأرباح اليومية للفروع الثلاث والإنحراف المعياري. يمكنك أفتراض الإستقلال بين مبيعات الفروع الثلاث.

(٣-١٠) ملخص : SUMMARY

قدمنا في هذا الباب بعض المفاهيم الأساسية مثل الإحتمال، المتغيرات العشوائية، التوزيعات الإحتمالية. والإحتمال هو عدد يقع بين (صفر، 1) ويقيس إمكانية حدوث ظاهرة ما، نتائجها لا يمكن التنبؤ بها بدقة. وفهم الإحتمال أمر هام لأنه يقيس حالة عدم التأكد. وهناك ثلاث تفسيرات للإحتمال: التقليدي، التكرار النسبي، التقييم الشخصي. يبني التفسير التقليدي على فكرة أن نواتج الصدفة هي حوادث متنافية وشاملة ولها فرص متساوية في الحدوث. تفسير التكرار النسبي يفترض أن الظاهرة يمكن تكرارها العديد من المرات تحت نفس الظروف أو الشروط. تفسير التقييم الشخصي يمثل درجة الإعتقاد الشخصية في ظاهرة لا يمكن التنبؤ بها.

المتغير العشوائي هو أي كمية رقمية تتحدد قيمتها عن طريق الصدفة، وهناك نوعين من المتغيرات العشوائية: متقطعة (قيمها الممكنة يمكن وضعها في قائمة) ومتصلة (قيمها الممكنة لا يمكن وضعها في قائمة). التوزيع الإحتمالي لمتغير عشوائي هو تمثيل للإحتمالات لجميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي. إذا كان المتغير العشوائي متقطع فإنه توجد دالة إحتمال تستخدم لتحديد الإحتمال لكل قيمة ممكنة للمتغير العشوائي. إذا كان المتغير العشوائي متصل فهناك دالة كثافة إحتمالية، هذه الدالة تعطي الوسيلة لتحديد الإحتمال بأن المتغير العشوائي يقع في فترة محددة.

الكميات الرقمية التي تستخدم لتلخيص المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها الإحتمالية تعتمد على مفهوم التوقع. القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي هي متوسط قيم المتغير العشوائي في المدى الطويل. القيمة المتوقعة لمربع الفرق بين المتغير ومتوسطه هو التباين لهذا المتغير العشوائي.

المراجع : References

1. R.V Hogg and A.T Craig *Introduction to Mathematical statistics,4* th ed, New york: Macmillan , 1978.

2. A.M. M00d, F. A. Graybill, and D.C Boes. *Introduction to the Theory of statistics*, 3rd ed ,New york : Mc Graw - Hill - 1978.

تمارين إضافية :

(٣-٦١) سحبت ورقتان عشوائياً بدون اعادة من مجموعة أوراق اللعب. ما هو احتمال أن تكونا حاملتان للرقم الواحد.

(٣-٦٢) مفترضا إن إحتمال أن ترتفع قيمة سهم ما في نهاية اليوم التجاري هو 0,5 . إذا كان السهم اما ان يكون في حالة ارتفاع أو إنخفاض فقط ومفترضاً الاستقلال بين الحالتين، حدد إحتمال أن ترتفع قيمة السهم لمدة 5أيام متتالية.

(٣-٦٣) القيت قطعة عمله متوازنة عشر مرات، وكان نواتج الرميات العشرة صور. ما هي قيمة إحتمال وقوع مثل هذا الحدث؟ وإذا كانت القطعة متوازنة فعلا، ما هو احتمال ظهور الكتابة في الرمية الحادية عشر ؟

(٣-٦٤) إحتمال أن يكون مكون كهربائي في حالة عمل هو 0.9 . ماكينة بها 2 مكون من هذا النوع . الماكينة تكون صالحة للتشغيل طالما أن هناك واحداً على الأقل من هذين المكونين في حالة عمل.

(أ) أخذاً في الإعتبار أن هذين المكونين أما أن يعملا أو لا يعملا، ما هي الحوادث البسيطة الممكنة وماهى احتمالاتها (يمكنك إفتراض إستقلال حالة العمل بين المكونين)

(ب) ما هو إحتمال أن تكون الماكينة في حالة تشغيل ؟

(٣-٦٥) أفترض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلى لوحة الأستقبال خلال فترة 5 دقائق وأن دالة إحتمال X هي:

$$P(x) = \frac{e^{-3}(3)^x}{x!} \quad ; \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots \quad ; \quad e = 2.7182$$

(أ) حدد أحتمال أن X تأخذ القيم صفر، 7,....,2,1.

(ب) أرسم دالة الإحتمال لجميع قيم X السابقة.

(جـ) حدد التوزيع الإحتمالي التجميعي لقم X السابقة.

(٣-٦٦) إعتماداً على المعلومات التي تم الحصول عليها من عدد كبير من شركات التأمين حول وثيقة التأمين المؤقته للرجال ذوي العمر 30سنة، وجد أن قيمة القسط السنوي لوثيقة قيمتها 50000 دولار هو متغير عشوائي له دالة كثافة الإحتمال التالية:

$$f(x) = 1/80 \quad ; \qquad \text{where} \qquad \$\,100 \le x \le \$\,180$$

مستخدماً الهندسة ، أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) بين أن f(X) هي فعلا دالة كثافة احتمال.

(ب) ماهو إحتمال أن يكون القسط السنوي أقل من 120 دولار؟

(جـ) ما هو إحتمال أن يكون القسط السنوي ما بين 160, 120 دولار؟

(د) ما هو إحتمال أن يتعدى القسط السنوي 160 دولار؟

(٣-٦٧) حصة السوق (نسبة من الأجمالي) من أحد المنتجات الرئيسية يتذبذب بطريقة عشوائية. أفترض أن X متغير عشوائي مستمر يمثل حصة السوق من هذا المنتج وأن دالة كثافة الأحتمال له هي:

$$f(x)=2(1-x) \quad , \qquad \text{where} \quad 0 \le x \le 1$$

مستخدماً الهندسة، أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما هو إحتمال أن حصة السوق من هذا المنتج تقل عن $\frac{1}{2}$ ؟

(ب) ما هو إحتمال أن حصة السوق تتعدى $\frac{1}{2}$ ؟

(جـ) ما هو إحتمال أن حصة السوق تقع داخل الفترة ($\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$)؟

(د) ما هو إحتمال أن حصة السوق تقل عن $\frac{1}{4}$ ؟

(٣-٦٨) بفرض أن دالة التوزيع التجميعية في تمرين حصة السوق السابق هي:

$$F(x) = x(2-x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

إستخدم خصائص دالة التوزيع التجميعية والموضحة في نهاية الجزء (٣-٧) لتؤكد إجابتك عن أسئلة تمرين (٣-٦٧).

(٣-٦٩) افترض في لعبة الحظ التالية أنك تسحب كرة بطريقة عشوائية من صندوق يحتوي على 2 كرة حمراء، 4 كرة خضراء، 4 كرة بيضاء. إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فإنك تكسب 20 دولار وإذا كانت خضراء فإنك تخسر 10دولار إما اذا كانت بيضاء فإنك تخسر 2 دولار. افرض أن X متغير عشوائي يمثل قيمة المكسب أو الخسارة في كل مرة تلعب فيها، حدد القيمة المتوقعة للمتغير X. هل من الأفضل لك الإشتراك في هذه اللعبة؟ دعم إجابتك.

(٣-٧٠) بالرجوع إلى التمرين(٣-٦٩)، ما هو المبلغ الذي يجب أن تكسبه أذا كانت الكرة المسحوبة حمراء حتى تكون اللعبة عادلة؟

(٣-٧١) عجلة روليت في صالة مراهنات بها 18 رقم أحمر، 18رقم أسود، 2 رقم أخضر. أفترض أنك تراهن بوضع 100 دولار على رقم أحمر. عندما تصل إلى رقم أحمر فإنك تكسب 100 دولار وعندما تصل إلى رقم أسود تخسر 100 دولار وإذا وصلت إلى رقم أخضر فإنك تخسر نصف ما تراهن به أي 50 دولار. عرف المتغير العشوائي X ليدل على الكمية التي تكسبها في كل مرة تلعب فيها هذه المبارة، حدد القيمة المتوقعة للمتغير X. هل من الأفضل لك أن تشارك في هذه المباراة؟ دعم إجابتك.

(٣-٧٢) إعتمادا على السجلات التاريخية، حددت احدى المؤسسات التجارية التوزيع الإحتمالي لعدد الوحدات المؤجرة يوميا (X) لإحدى معداتها.

X	P (X)
0	0.10
1	0.25
2	0.40
3	0.20
4	0.05

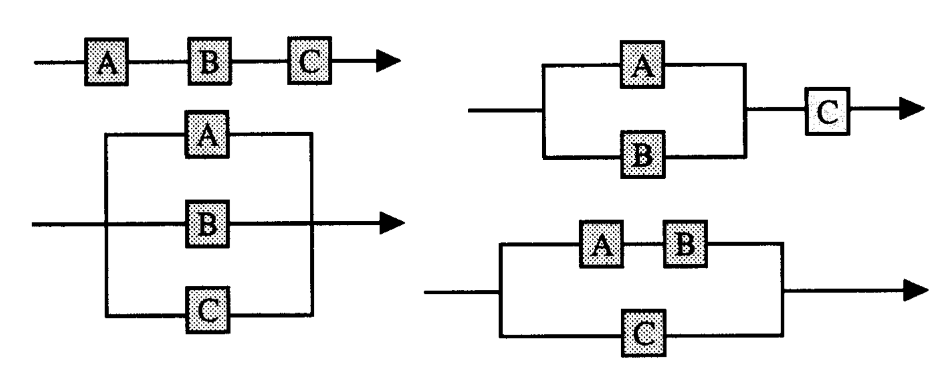
فإذا كانت المؤسسة تتقاضى 25 دولار عن كل وحدة يتم تأجيرها للغير، فما هي القيمة المتوقعة للدخل اليومي لهذه المؤسسة من عملية التأجير هذه وما هي قيمة الإنحراف المعياري ؟

(٣-٧٣) استخدم الكمبيوتر لمحاكاة 500 لعبة في مباراة الروليت التي نوقشت في الجزء (٣-٩). إلى أي مدى تقترب النتيجة التي تصل إليها من القيمة المتوقعة المعروفة.

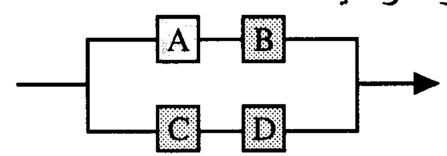
(٣-٧٤) ترغب أحدى شركات التأمين في تحديد قيمة القسط السنوي المتعادل لوثيقة تأمين على الحياة مؤقته قيمتها 500000 دولار للنساء في العمر 45 سنة. من الجداول الإكتوارية، تعلم الشركة أن حوالي 24 من كل 10000 سيدة في العمر 45وغير مدخنين يموتوا قبل أن يصلوا إلى العمر 46 سنة وأن 48 من كل 10000 سيدة في العمر 45 ومدخنين يموتوا قبل أن يصلوا إلى 46 سنة. حدد قيمة القسط السنوي المتعادل لكل من غير المدخنين والمدخنين من النساء في العمر 45 سنة.

(٣-٧٥) نظام ما يتكون من ثلاث مكونات أساسية A, B, C. المكونات يمكن أن تكون كهربائية أو ميكانيكية. هذه المكونات يمكن أن ترتب أو تنظم في شكل من الأشكال الأربعة الموضحة في

نهاية التمرين. إذا كانت هذه المكونات الثلاث تعمل مستقلة عن بعضها وإذا كان إحتمال أن يعمل أي مكون بصورة مرضية هو 0.95. حدد احتمال أن يعمل هذا النظام بصورة مرضية في كل من الأشكال الأربعة. بعد ذلك حدد أي هذه الأشكال هو الأفضل من حيث أداءه للعمل.



(٣-٧٦) في سياق الحديث عن تمرين (٣-٧٥)، أفترض أن النظام مكون من آربع مكونات مستقلة وأن كل منهما يعمل بصورة مرضية بإحتمال 0.9 وأنها رتبت كما في الشكل التالي. حدد إحتمال أن يعمل هذا النظام بصورة مرضية.



(٣-٧٧) افترض أن الشركة التي تعمل بها تخطط لتقديم منتجين جديدين للسوق هما B,A. إعتمادا على نتائج إختبارات السوق، يسود إعتقاد بأن إحتمال تقبل الجمهور للمنتج A هو 6. وتقبل المنتج B هو 0.4. مفترضا أن تقبل الجمهور للمنتج A مستقل عن تقبل المنتج B. احسب إحتمال أن كلا المنتجين يفشلا في إيجاد مكان لهم في السوق.

(٣-٧٨) شركة ما مهتمه بتقديم منتج جديد للسوق. قسم بحوث التسويق قدم التوزيع الإحتمالي التقريبي التالي للمكسب أو الخسارة التي يتوقع أن يحققها المنتج الجديد للشركة خلال سنة واحدة من طرحه في السوق. من بين الإعتبارات الأخرى، أن الشركة سوف تقدم المنتج الجديد للسوق إذا كانت مساهمته المتوقعة في الأرباح في سنة واحدة لا تقل عن100000 دولار. إعتمادا على هذه المعلومات، هل يجب على الشركة تقديم هذا المنتج الجديد ؟

المساهمة في الأرباح	الإحتمال
-$ 20000	.1
- $ 10000	.1
$10000	.1
$50000	.2
$150000	.3
$200000	.2

(٣-٧٩) منتج لشاشات التليفزيون لديه مصنعين في موقعين مختلفين. المصنع الأول ينتج في المتوسط 15000 وحدة شهريا بإنحراف معياري 2000 وحدة. تكلفة الوحدة في هذا المصنع هي 250 دولار. المصنع الآخر ينتج في المتوسط 10000 وحدة شهريا بإنحراف معياري 1500 وحدة،

وتكلفة الوحدة في هذا المصنع 275 دولار. إعتماداً على هذه المعلومات حدد متوسط التكلفة الكلية الشهرية في هذين المصنعين والإنحراف المعياري للتكلفة الكلية.

ملحق (٣) Appendix 3

التفاضل والتكامل- مقدمة أساسية للتوزيعات الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة:

في هذا الملحق، نعرف المفاهيم الأساسية في الأجزاء (٣-٧)، (٣-٨) لتي تشمل المتغيرات العشوائية المتصلة بإستخدام التفاضل والتكامل. التعريف التقليدي لدالة كثافة الإحتمال لمتغير عشوائي متصل هو على النحو التالي:

الدالة f (X) هى دالة كثافة الإحتمال لمتغير عشوائي متصل X إذا كانت الشروط التالية متحققة:

1- $f(x) \geq 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3- $P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ for any values a and b

وكما بينا في الجزء (٣-٧) أن الفترة $a \leq x \leq b$ هي مساحة محدودة بدالة كثافة الإحتمال والنقط X=a، X=b كما هو مبين بشكل (٣-١٠). هذه المساحة تمثل إحتمال هذه الفترة، حيث أن المساحة الكلية تحت f(x) هي الواحد الصحيح.

دالة التوزيع التجميعية لمتغير عشوائي متصل X هي إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من أو تساوي قيمة معينة x وتعرف كما يلي:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (3.25)$$

حيث t متغير وهمي في التكامل. وكما بينا من قبل، دالة التوزيع التجميعية F(x) هي مساحة يحدها من أعلى دالة الكثافة ومن على اليمين بالقيمة X=x كما هو موضح بشكل (٣-١٢). دالة التوزيع التجميعية F(x) هي دالة غير تناقصية في قيم المتغير العشوائي X ولها الخصائص التالية:

1 - $F(-\infty) = 0$

2 - $F(\infty) = 1$

3 - $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

خاصية أن تفاضل دالة التوزيع التجميعية يعطي دالة الكثافة الإحتمالية تنبع من نظرية أساسية في علم التفاضل.

مرة أخرى، يجب ملاحظة أنه لأي متغير عشوائي متصل X أن:

$$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0$$

وهذه الملاحظة صحيحة لأنه إذا كانت الحدود العليا والدنيا في التكامل هما نفس الشئ فإن قيمة التكامل هي الصفر وكنتيجة لذلك:

$$P(X \le x) = P(X < x) = F(x)$$

ولتوضيح المفاهيم السابقة، دعنا نتذكر مثال (٣-٦). الدالة $f(x)=2x$ حيث $0 \le x \le 1$ هي فعلاً دالة كثافة إحتمالية حيث:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x\,dx = \int_{0}^{1} 2x\,dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

إحتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ قيما في الفترة (0.75, 0.25) هو:

$$P(0.25 < X < 0.75) = \int_{0.25}^{0.75} 2x\,dx = X^2\Big|_{.25}^{.75} = (0.75)^2 - (0.25)^2 = 0.5$$

بالمثل، إحتمال أن X تزيد عن 0.75هو:

$$P(X > 0.75) = \int_{0.75}^{1} 2x\,dx = 1^2 - (0.75)^2 = 0.4375$$

أخيراً، فإن دالة التوزيع التجميعية تشتق على النحو التالي:

$$P(X \le x) = F(x) = \int_{0}^{x} 2t\,dt = \frac{2t^2}{2}\Big|_o^x = x^2$$

والآن نقدم صيغاً قانونية لكل من القيمة المتوقعة والتباين لمتغير عشوائي متصل:

القيمة المتوقعة **Expected Value** لمتغير عشوائي متصل X هو متوسط قيمة X وتعرف كالآتي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \qquad \textbf{(3.26)}$$

حيث $f(x)$هي دالة كثافة الإحتمال.

تباين **Variance** المتغير العشوائي المتصل X هو التوقع لمربع الفرق بين X ومتوسطها μ ويعطى بالصور التالية:

$$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad \textbf{(3.27)}$$

أو بصورة بديلة أخرى :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 \qquad \textbf{(3.28)}$$

وللتوضيح نستخدم مرة أخرى دالة كثافة الإحتمال في مثال (٣-٦). القيمة المتوقعة أو المتوسط هي:

$$E(X) = \int_{0}^{1} x(2x)dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1)^3 - \frac{2}{3}(0)^3 = \frac{2}{3}$$

ولتحديد التباين، يكون الأسهل إيجاد القيمة المتوقعة لـ X^2 ثم إستخدام الصيغة (3.28)

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2(2x)dx=\frac{2x^4}{4}\Big|_0^1=\left(\frac{2}{4}\right)(1^4)-\left(\frac{2}{4}\right)(0^4)=\frac{2}{4}$$

ومن ثم يحدد التباين ليكون:

$$Var(x)=\left(\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{18-16}{36}=\frac{1}{18}$$

الفصل الرابع

بعض التوزيعات الإحتمالية الهامة

SOME IMPORTANT PROBABILITY DISTRIBUTIONS

محتويات الفصل

الفصل الرابع

بعض التوزيعات الإحتمالية الهامة

SOME IMPORTANT PROBABILITY DISTRIBUTIONS

(٤-١) نظرة على محتويات الفصل: Bridging to New topics

في الفصل الثالث ، قدمنا المبادئ الأساسية للإحتمال والتي نحتاج إليها لفهم الإستدلال الإحصائي ، وقد إستخدمنا هذه المبادئ في تعريف مفاهيم المتغير العشوائي ، التوزيع الإحتمالي وخصائصها العامة. في هذا الفصل نتناول بصفة خاصة أربع توزيعات إحتمالية والتي تأكد فائدتها في إتخاذ القرارات. في كل توزيع نناقش بصفة عامة الخصائص التي تميزه عن باقي التوزيعات مع تقديم أمثلة تطبيقية عنه.

من الفصل الأول ، نعلم أن المجتمع (أو العملية) يتصف دائماً بكمية واحدة أو أكثر تعرف باسم المعالم ، وتحديداً ، المعالم تصف التوزيع الإحتمالي لمتغير هام في المجتمع. في هذا السياق ، المعلمه أو المؤشر **parameter** هو عدد له قيمة خاصة تكون السبب في أن يصبح التوزيع الإحتمالي عضواً وحيداً في عائلة هذا التوزيع ، وعليه ، فالمؤشر هوكمية عددية تميز بدقة تامة التوزيع الإحتمالي.

نتذكر من الفصل (٣-٦) أن دالة الإحتمال لعدد البنات من أسرة ذات طفلين هي:-

$$P(x) = \frac{2!}{(2-x)!\,x\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}, \quad x = 0\,,1\,,2$$

فإذا فرضنا أن فرصة البنت تساوي فرصة الولد في عملية الميلاد ، فإن دالة الإحتمال لعدد البنات في أسرة بها ثلاثة أطفال تكون:

$$P(x) = \frac{3!}{(3-x)!\,x\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}, \quad x = 0\,,1\,,2\,,3$$

بالمقارنة الدقيقة للدالتين الإحتماليتين ، نلاحظ أن الفرق الوحيد بينهما هو العدد الكلي للأطفال: إثنين في الأولى وثلاث في الثانية وهكذا يكون عدد الأطفال هو مؤشر هذا التوزيع الإحتمالي وقيمته تميزه بين الأعضاء المختلفين في هذه العائلة من التوزيعات.

وكما ذكرنا في الفصل الأول ، مالم يكن المؤشر متضمنا العد أو الحصر ، فإننا نرمز للمؤشرات بحروف يونانية مائلة مثل π(باي) μ(ميو) ، σ(سيجما). أما المؤشر العددي ، فيستخدم له الحرف الروماني n. وعندما تكون المناقشة ذات طبيعة عامة وبدون تحديد معين في الذهن للتوزيع الإحتمالي ، يستخدم الحرف اليوناني θ (ثيتا) لترمز للمؤشر.

التوزيعات الإحتمالية الأربعة التي نناقشها في هذا الفصل هي توزيعات: ذو الحدين **binomial**، الطبيعي **normal**، بواسون **Poisson**، الأسي **exponential**. ذو الحدين وبواسون هما من توزيعات إحتمالية متقطعة، بينما الطبيعي والأسي من توزيعات إحتمالية متصلة. هذه التوزيعات تم تطبيقها في مجال واسع من الحالات العملية خاصة التوزيع الطبيعي في مجال الإستدلال الإحصائي.

(٤-٢) توزيع ذو الحدين : The Binomial Distribution

توزيع ذو الحدين **binomial distribution** هو أحد أكثر التوزيعات الإحتمالية فائدة، ومجالات تطبيقاته العامة متعددة منها: فحص الجودة، المبيعات، التسويق، بحوث الرأي أو الإستطلاع وأخرى كثيرة. وتتضح فائدته عندما تستخدم عينة لتقدير نسبة في مجتمع. ويشتق هذا التوزيع من الصيغة العامة التالية: تخيل تجربة عشوائية تتكرر عدة مرات وفي كل مرة يكون ناتج التجربة إما أن يقع أو لا يقع حدث معين نهتم به. فمثلا، إذا ألقينا قطعة عملة وكان الحدث الذي نهتم به هو الصورة، فإننا نلاحظ أما ان تظهر الصورة أو لا تظهر(أي تظهر الكتابة). إذا سحبنا وحدة عشوائية من خط إنتاجي وفحصناها، فإننا نلاحظ إما أن تكون الوحدة معيبة أو غير معيبة. إذا كان مندوب المبيعات يجري مكالمة لبيع صفقة، فإنه إما أن يتم بيع الصفقة أو لا يتمها. إذا أجرينا مقابلة بطريقة عشوائية مع مستهلك ما، فإننا نجده إما أن يكون ممتلكا لسلعة منافسة أو لا يمتلكها.

بصفة عامة، دعنا نتفق على أن نرمز لوقوع الحدث بـ"النجاح" وعدم وقوعه بـ"الفشل" وهكذا يكون "الفشل" مكملا "للنجاح". تكرار التجربة العشوائية تحت نفس الظروف أو الشروط تسمى محاولات **trials**. نفرض أننا ننفذ تجربة ما n من المرات (المحاولات) تحت نفس الظروف. أفترض أن فراغ العينة لا يتغير في كل مرة ننفذ فيها التجربة، أي أن المعاينة هنا تتم مع الاحلال (إنظر الفصل (٣-٤)). وعلي ذلك تكون نواتج هذه التجربة مستقلة إحصائيا، وان إحتمال النجاح في أي محاولة لايتأثر بنتائج المحاولات السابقة. بمعني آخر، إحتمال النجاح دائما لا يتغير. لنفرض أن إحتمال النجاح يرمز له بالرمز π. مثلا عند إلقاء قطعة عملة متوازنة، إحتمال الصورة (نجاح) هو $\pi = 0.5$ في كل رمية وحيث أن التجربة تكون نتيجتها فقط اما نجاح أو فشل، فإن إحتمال الفشل في أى محاولة $(1-\pi)$.

المتغير العشوائي الذي نهتم به هو "عدد النجاحات" **number of successes** التي نشاهدها من بين n محاولة في التجربة. بالطبع لا يمكن ان نحصل على أقل من صفر نجاحات ولا يمكن أن نحصل على أكثر من n نجاحات من خلال n محاولة في التجربة. بالتالي، فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي يجب أن تكون صفر، n.....,3.2.1 أي كل الإعداد الصحيحة من الصفر وحتى عدد المحاولات n. نفرض أننا ألقينا قطعة عملة متوازنة n=10 مرات والمتغير العشوائي الذي نهتم به هو عدد الصور التي نشاهدها. القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي صفر، 10.....3,2,1. وحيث أن القيم الممكنة يمكن حصرها وعدها، فإن المتغير العشوائي ذوالحدين X يصبح متغير متقطع.

الخصائص التي تعرف المتغير العشوائي ذو الحدين ملخصة داخل الاطار التالي:

الشروط التي في ظلها يكون المتغير العشوائي له توزيع ذو الحدين

1- تتكون التجربة من n من المحاولات المتماثلة.

2- نتيجة كل محاولة إما "نجاح" أو "فشل".

3- المحاولات n مستقلة إحصائيا عن بعضها البعض، وأن إحتمال النجاح π يبقى ثابتا لا يتغير من محاولة إلى أخرى، (المعاينة مع الإحلال).

4- المتغير العشوائي X يمثل عدد حالات النجاح.

من الفصل الثالث، ناقشنا عدة أمثلة كانت تحقق معايير توزيع ذو الحدين. لنأخذ مثال العائلة ذات الطفلين. ميلاد كل طفل يمكن إعتباره محاولة، وكل محاولة لها نتيجتين فقط، أي الطفل الذي يولد إما أن يكون بنت أو ولد. عادة نفترض أن إحتمال ولادة بنت في أي عملية ميلاد هو قيمة لا تتغير وتساوي 0.5. في الحقيقة، ربما لا يكون 0.5 بالضبط ولكن بالتأكيد هو قريب جدا من ذلك، (لاحظ أنه إذا كان إحتمال الحصول على بنت ثابتا في أي عملية ميلاد، فإن إحتمال الحصول على ولد هو أيضا ثابتا). في مثال العائلات ذات الطفلين، نفرض ان المتغير العشوائي X يمثل عدد البنات، وحيث أننا نقوم بحصر عدد المواليد بنات، فإن ميلاد البنت يسمي "نجاح" وميلاد الولد يسمى "فشل". تعين "النجاح" يشير إلى النتائج التي نبحث عنها ولكن ليس بالضرورة يدل على النواتج المرغوبة. القيم الممكنة لـX هي صفر بنت، ١ بنت، 2 بنت. أخيرا، فمن المقبول أن نعتبر أن ميلاد الولد أو البنت من الناحية البيولوجية ثابتا لا يتغير من طفل لآخر. وعلى ذلك فإن جنس الطفل الاول وجنس الطفل الثاني يكونا مستقلين إحصائيا وان X يكون لها توزيع ذو الحدين. لاحظ أن إستنتاجاتنا حول توزيع X قائمة على معرفتنا بطبيعة الموضوع في مثل هذه الحالة، أي عملية الميلاد البشرية وعلاقتها بالجنس.

تطبيقات توزيع ذو الحدين في المعاينة:

هناك الكثير من الدراسات الإحصائية التي فيها تسجل عدد "نجاحات" خلال سلسلة من المحاولات. ربما يكون أكثر التطبيقات شيوعا تلك المشتملة على المعاينة، سواء معاينة عشوائية من مجتمع أومعاينة وحدات متاعقبة من عملية مستمرة. ومع كلا النوعين من المعاينة فإن إختيار أي مفردة يشكل محاولة.

يأتي توزيع ذو الحدين ليلعب دوره في المعاينة العشوائية عندما نرغب في تقدير نسبة المفردات التي تمتلك خاصية معينة، وإليك بعض الأمثلة:

* نسبة العملاء اللذين إشتروا منتج معين.
* نسبة العملاء اللذين يفضلوا ماركة معينة .
* نسبة المكالمات التليفونية التي لا تتم بصورة سليمة.
* نسبة الطلبة بالمدارس الثانوية اللذين يخططوا للإلتحاق بالجامعة.
* نسبة الناخبين المسجلين واللذين يفضلوا مرشح سياسي معين.
* نسبة العملاء اللذين يستخدموا بطاقات الإئتمان لدفع أثمان مشترواتهم.
* نسبة العملاء اللذين يحصلوا على خصما عندما تتم مشترواتهم بالبريد.

وفيما يتعلق بالمعاينة العشوائية، فإن المفهوم الأساسي لتوزيع ذو الحدين هو المعاينة مع الإحلال. إذا كانت π هي نسبة "النجاحات" بين مفردات المجتمع، فإن إحتمال إختيار مفردة عشوائيا وتكون

نجاحا يساوي π. من الدقة بمكان ملاحظة أن المعاينة عشوائيا مع الإحلال تؤكد أن إحتمال النجاح π (أو الفشل $1-\pi$) في محاولة معينة لا يتأثر بنواتج المحاولات السابقة، أي يظل ثابتا من محاولة إلى آخرى. بالتالي عندما يظل إحتمال النجاح (أو الفشل)ثابتا من محاولة إلى آخرى، فإن الإختيار العشوائي يؤكد الإستقلال الإحصائي. لذلك، فالمعاينة العشوائية مع الإحلال **sampling randomly with replacement** تؤكد لتوزيع الحدين الخصائص التالية:

* إحتمال النجاح π يبقى ثابتا من محاولة إلى اخرى.
* المحاولات n مستقلة عن بعضها البعض.

نتذكر المناقشة التي تمت في نهاية الجزء (٣-٤)، حيث قلنا أنه في التطبيقات العملية، أن المعاينة العشوائية تقريبا ما تنفذ بدون إحلال. ربما يبدوا هذا مقيدا للفائدة العملية لتوزيع ذو الحدين، حيث أنه يعتمد على المعاينة مع الإحلال. ولكن نتذكر أيضا أن معظم المجتمعات والتي تسحب منها العينات العشوائية هي مجتمعات كبيرة بدرجة كافية لدرجة أن التغير في إحتمال إختيار مفردة إلى أخرى بطريقة عشوائية يعد إختلاف غير معنوي. وفي سياق الحديث عن توزيع ذو الحدين، نجد أنه طالما أن حجم العينة n صغيرا بالنسبة إلى حجم المجتمع، فإن إستخدام توزيع ذو الحدين يكون مناسبا وملائما. والقاعدة العامة أن حجم العينة يجب ألا يزيد عن 5% من حجم المجتمع N.

والآن نتناول المعاينة لوحدات متعاقبة أو متتالية من عملية ما. فيما يلي بعض الآمثلة والتي يكون فيها توزيع ذو الحدين ملائما ومناسبا.

* تسجيل عدد الوحدات التي تفشل في تحقيق مواصفات الجودة عند الفحص المتتالي لـ20 وحدة منتجة.
* تسجيل عدد مكالمات البيع التي تمت بنجاح من آخر 200 مكالمة.
* تسجيل عدد الفواتير التي بها أخطاء ناتجة من تحرير آخر 250 فاتورة.

في كل هذه الحالات، السؤال الحاسم هو: هل العملية التي يتولد عنها نجاح وفشل تظل مستقرة خلال فترة المشاهدة أو التسجيل؟ إذا لم يكن كذلك، فإن إحتمال النجاح ربما لا يكون ثابتا خلال كل المحاولات أو أن المحاولات ربما لا تكون مستقلة.

مثال (٤-١)

مصنع ينتج نوعا معينا من إطارات السيارات، وكنظام روتيني للفحص، تسحب عشوائيا 10 إطارات واحدة تلو الأخرى بدون إحلال من إنتاج كل يوم لإختبار أو إكتشاف الإطارات المعيبة. يتم إجراء تصحيحي إذا إكتشف أن واحدة أو أكثر من الإطارات العشرة كانت معيبة. علق على مدى ملائمة إستخدام توزيع ذو الحدين في هذه الحالة.

الحل

دعنا نفترض أن هذه المواصفات محددة بوضوح ومعرفة مقدما لدى الفاحص، بالتالي اي إطار يفحص يمكن الحكم عليه إما أن يكون معيبا أو سليما. المتغير العشوائي الذي نهتم به هو عدد الإطارات

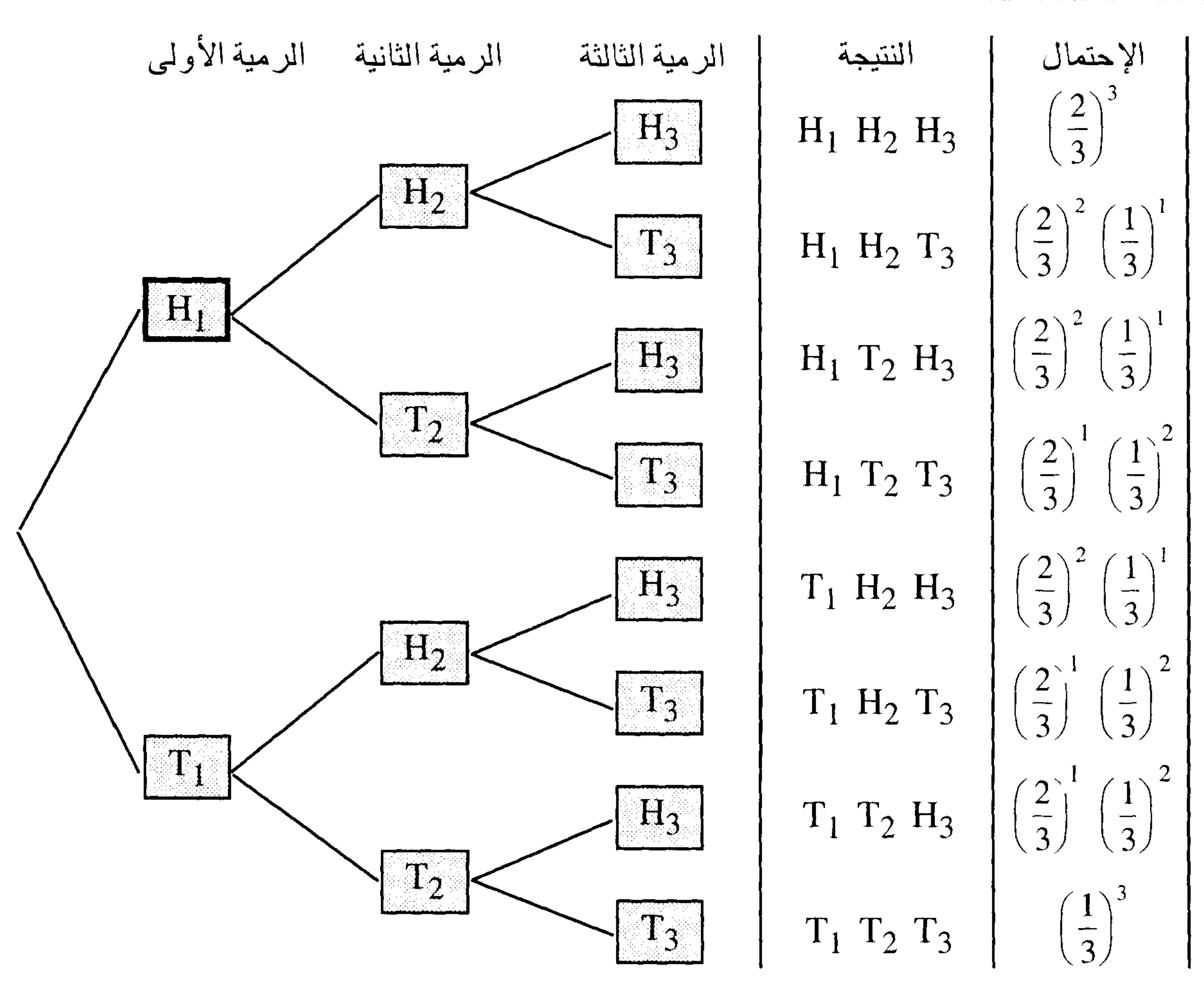
المعيبة من بين الوحدات العشرة المفحوصة. أي قيمة لهذا المتغير العشوائي عدا الصفر تستدعي الإهتمام. عادة، نسبة الإطارات المعيبة التي تنتج عن عملية مستقرة، يمكن تقديرها من السجلات التاريخية وهي تصلح كتقدير لإحتمال إختيار إطار معيب. وحيث أن المعاينة هنا تتم بدون إحلال، فربما يكون هناك تغير طفيف في هذا الإحتمال عند الإختيار العشوائي من وحدة إلى أخرى. ولكن تطبيق توزيع ذو الحدين يكون ملائما إذا كان عدد الإطارات الكلية المنتجة كل يوم أكبر بكثير من عدد الوحدات التي تختار للفحص.

نجد أن في حالات كثيرة ومتنوعة إحتمال النجاح π هو أهم كمية عند إستخدام توزيع ذو الحدين. في حالات مثل إلقاء قطعة عملة متوازنة، يكون من السهل أن نعرف ان إحتمال ظهور الصورة هو 0.5 وهذا هو السبب في إستخدام قطعة العملة كمثال مناسب للتدريس أو التعليم للطلاب. ولكن في معظم التطبيقات الواقعية لا نعلم قيمة الإحتمال π، فمثلا عندما نفحص عينة من n من الإطارات من خط إنتاجي، فإننا لا نعرف الإحتمال الفعلي للإطارات المعيبة. في مثل هذه الحالات يكون الهدف من المعاينة هو تقدير **estimate** النسبة π بتسجيل عدد الوحدات المعيبة عند معاينة n من الوحدات، فإذا وجد إطارين معيبين في عينة من عشر إطارات، فإن أفضل تقدير للنسبة π هو $\frac{2}{10}$. تقدير π يرمز له بالرمز P وهو نسبة المعيب في العينة، حيث P تساوي عدد الوحدات المعيبة في العينة مقسوما على العدد الكلي للوحدات المفحوصة. ولكي نفهم كيف يمكن عمل إستنتاجات حول π إعتمادا على P، فإننا يجب أن نناقش اولا التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي ذو الحدين والذي يمثل عدد الوحدات المعيبة.

دالة إحتمال ذو الحدين:

الآن نبحث في كيفية تحديد دالة إحتمال توزيع ذو الحدين. بفرض أن X هو متغير عشوائي يمثل عدد حالات النجاح خلال n من المحاولات المستقلة، بحيث يكون إحتمال النجاح في كل محاولة هو π ونرغب في تحديد إحتمال مشاهدة x حالات نجاح بالضبط (وبالتالي يكون هناك ضمنيا n-x حالات فشل بالضبط) خلال n من المحاولات. في البداية يلاحظ أن الدالتين الإحتماليتين التي قدمتا في الجزء (٤-١) والتي شملت عدد البنات في أسر ذات طفلين وذات ثلاثة أطفال، هما امثلة محددة لدالة توزيع ذو الحدين. في الدالة الأولى، قيم المؤشرات هي: $n=2$، $\pi=0.5$ وفي الدالة الثانية $n=3$، $\pi=0.5$. المثال التالي يوضح كيف نستنتج دالة الإحتمال في صورتها العامة. سنتناول عملية ألقاء قطعة عملة غير متوازنة ثلاثة مرات($n=3$) وبأفتراض ان إحتمال الحصول على صورة في أي رمية هو $\pi = \frac{2}{3}$ وان المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور المشاهدة في الرميات الثلاث.

الشجرة البيانية في شكل (٤-١) توضح كل النواتج الممكنة وإحتمالاتها.



شكل (٤-١) :النتائج الممكنة عند رمي قطعة عملة غير متوازنة ثلاث مرات

يلاحظ في الشكل السابق ان الاحتمال لكل ناتج يمكن تحديده بضرب الإحتمالات الفردية المقترنة بالرميات الثلاث المستقلة. لنفرض أننا نرغب في إيجاد إحتمال مشاهدة صورة واحدة بالضبط (وكتابتين) وأنه لا يعنينا في شئ ما إذا كانت الصورة في الرمية الأولى او الثانية أو الثالثة. من الشكل الشجري الموضح في شكل (٤-١) يمكنك أن ترى ان هناك ثلاث نواتج تحتوي على كل منها على صورة واحدة فقط. هذه النواتج وإحتمالاتها على النحو التالي:

الإحتمال	الناتج
$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{27}\right)$	$H_1\,T_2\,T_3$
$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{27}\right)$	$T_1\,H_2\,T_3$
$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{27}\right)$	$T_1\,T_2\,H_3$
إحتمال الحصول على صورة واحدة وكتابتين (في أى تسلسل) = $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$	

والآن، يلاحظ أنه على الرغم من وجود ثلاث نواتج متتالية متمايزة عن بعضها وفي كل منها تظهر صورة واحدة، فإن إحتمال كل ناتج مساو للآخر بغض النظر عن ترتيب ظهور الصورة في هذا التوالي. لذلك، يمكننا ان نستنتج أنه بسبب الإستقلال فإن إحتمال ظهور صورة واحدة وكتابتين بالضبط لأي ناتج من هذه النواتج الثلاث هو حاصل ضرب $\left(\frac{2}{3}\right)^1 x \left(\frac{1}{3}\right)^2$ بغض النظر عن الطريقة التي تحدثه بها هذه النواتج. وحيث ان هناك ثلاث نواتج متعاقبة، فإن إحتمال صورة واحدة وكتابتين يساوي مجموع إحتمالات تلك النواتج المنفردة الثلاث، (يمكن أن نضيف أيضا ان هذه الإحتمالات هي لثلاث حوادث متنافية تبادليا). وحيث أن الإحتمالات الثلاث متساوية، فهذا يعادل ضرب الإحتمال لأي ناتج في 3، بمعنى:

$$P(X=1)=3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

دعنا ننظر بدقة إلى عناصر هذه العملية الحسابية. الرقم 3 يمثل عدد النواتج، $\frac{2}{3}$ تمثل إحتمال الصورة (النجاح) في أي محاولة. الأس "١" يمثل عدد الصور في ناتج ما، اما $\frac{1}{3}$ فتمثل إحتمال الكتابة (فشل) في أي محاولة والأس"2" يمثل عدد الكتابات في ناتج ما.

نتناول وضع آخر مشابه عندما نتعرض للحدث "صورتان بالضبط وكتابة واحدة" شكل (٤-١) يظهر ان هناك ثلاث طرق متنافية يمكن أن يقع بها الحدث:

$(T_1\ H_2\ H_3,\ \ H_1T_2H_3,\ \ H_1\ H_2\ T_3)$ وكل منها له نفس الإحتمال التالي: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 x\left(\frac{1}{3}\right)^1$

لذلك فإن إحتمال هذا الحدث يكون:

$$P(X=2)=3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$

الحدث "ثلاث صور بالضبط" يعني ضمنيا صفر كتابة وأن هذا الحدث يقع بطريقة واحدة: $(H_1\ H_2\ H_3)$ بإحتمال:

$$P(X=3)=1\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$$

ولإكمال كل القيم الممكنة لـ X (عدد الصور في ثلاث رميات)، فإنه يتبقى الحدث صفر صورة (أي كلها كتابات). هذا يقع أيضا بطريقة واحدة $(T_1\ T_2\ T_3)$ بإحتمال:

$$P(X=0)=1\left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

بصفة عامة، يمكن ان نستنتج من هذا المثال أن إحتمال الحصول على X حالة نجاح بالضبط، (n-x) حالة فشل بالضبط خلال n من المحاولات هو:

$$P(x)=\pi^x(1-\pi)^{n-x}$$

ولكن كم عدد مثل هذه النواتج؟ الإجابة موضحة بالصيغة التي تحدد تبادلn من الأشياء (عدد المحاولات) التي بها x من الأشياء المتماثلة (كلها حالات نجاح)، (n-x) من الأشياء المتماثلة (كلها حالات فشل)، هذه الصيغة هي:

$$\frac{n!}{(n-x)!x!} \qquad \textbf{(4.1)}$$

فمثلا اذا إعتبرنا الحدث "صورتان في ثلاث رميات" هنا n=3 (عدد المحاولات)، x =2 (عدد الصور)، n-x=1(عدد الكتابات)، بالتالي يكون عدد نواتج الرميات التي بها صورتان بالضبط وكتابة واحدة بالضبط في الرميات الثلاث هو:

$$\frac{3!}{(3-2)!\,2!}=3$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

دعنا نحاول تطبيق الصيغة (4.1) على نواتج أخرى سبق أن تناولناها. عدد النواتج التي تحقق بالضبط صورة واحدة(X=1) في رميات ثلاث (n=3) لقطعة عمله غير متوازنة هي: 3=[1!(3-1)!]/3! وهى نتيجة سبق الحصول عليها. عدد النواتج التى تعطى بالضبط ثلاث صور في ثلاث رميات هو: 1 = [3! (3-3)!]/3! أخيرا عدد النواتج التي بها صفر صورة هو : 1= {0! (3-0)!}/3!. الآن نحن مهيئين لتعريف دالة إحتمال ذو الحدين:

دالة إحتمال ذو الحدين

إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد حالات النجاح من بين n من الحالات المستقلة وكان إحتمال النجاح في أي محاولة هو π فإن X يكون له توزيع ذو الحدين بدالة الإحتمال التالية:

$$P(x) = P(x\ ; n, \pi) = \frac{n!}{(n-x)!x!}\ \pi^x (1-\pi)^{n-x} \qquad (4.2)$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots n;\ 0 \le \pi \le 1$$

يلاحظ أن عدد المحاولات n وإحتمال النجاح π يظهران في دالة إحتمال ذو الحدين P $(x\ ; n, \pi)$. الكميات π,n هي مؤشرات أو معالم توزيع ذو الحدين، بمعنى عندما نحدد قيما لكل من π,n فإننا نحصل على تحديدا وحيدا لتوزيع ذو الحدين، فمثلا بينا من قبل أن دالتي الإحتمال في الجزء (٤-١) هما دالة إحتمال ذو الحدين، الأولى لها n=2 و، $\pi = \frac{1}{2}$ والثانية لها n =3 و، $\pi = \frac{1}{2}$. أيضا الصيغة في مثال (٣-٨) هي دالة إحتمال ذو الحدين ولها n=3 و $\pi = \frac{1}{3}$.

لتوضيح كيفية تحديد إحتمالات ذو الحدين، نتناول المثال التالي:

إفرض إنك مندوب مبيعات شركة التأمين على الحياة وأنك خلال يوم عادي، تقابل n=5 عملاء. نفرض أن 40% من كل إتصالاتك البيعية نتيجتها بيع وثائق تأمين على الحياة. وعلى ذلك فإحتمال أن عميل يشتري منك وثيقة تأمين هو π=0.4 وأنك مهتم بعدد العملاء اللذين سوف يشتروا منك وثاق تأمين في اليوم التالي. نفرض أن هذا العدد هو متغير عشوائيX. الآن يمكن تحديد الإحتمالات لكل قيم X الممكنة (5,4,3,2,1,0) بالتعويض بكل قيمة في الصيغة (4.2) حيث: π =0.4, n =5. ومع ذلك فإن أسهل طريقة لأداء ذلك هي إستخدام الحاسب الآلي، وذلك بإستخدام الأمر PDF في برنامج ميني تاب بجانب الأمر الفرعي .Binomial 5 .4 حيث نحصل على الإحتمالات التالية. هذه الإحتمالات تبين أن عدد العملاء الأكثر إحتمالا لشراء وثائق التأمين في يوم معين هو إثنين، أيضا يتبين أن هناك تقريبا إحتمال متساوي لبيع وثيقة واحدة أو ثلاثة.

```
MTB > pdf ;
SUBC > binomial 5. 4.
BINOMIAL WITH   N=5       P=0.400000
     K        P( X = K )
     0          0.0778
     1          0.2592
     2          0.3456
     3          0.2304
     4          0.0768
     5          0.0102
```

إحتمالات ذوالحدين التجميعية:

في معظم التطبيقات الواقعية، نجد ان النواتج التي نهتم بها، هي مدى من القيم الممكنة مثل "x تأخذ قيما هي على الأكثر 2" أو "x تأخذ قيما هي على الأقل 3". نفرض أن مندوب مبيعات شركة التأمين على الحياة يمكنه أن يكسب علاوة عند بيعه ثلاث وثائق أو أكثر في يوم واحد، ما هو إحتمال أن يكسب علاوة؟ نتذكر من الفصل (٣-٦) أن عبارة مثل "على الأقل" تدل ضمنيا على احتمالات تراكمية أو تجميعية، لذا إذا كانت X هي متغير عشوائي يمثل عدد العملاء اللذين يشتروا وثائق تأمين على الحياة من خلال 5 زيارات، ونرغب في تحديد احتمال أن X تأخذ قيمة واحدة من بين القيم 3 ,4 ,5. بمعنى آخر نبحث عن الاحتمال: $P(X \geq 3)=1-P(X \leq 2)$ ، حيث $P(X \leq 2)$ هو احتمال الحدث المكمل. يمكن تحديد الاحتمالات التجميعية للمتغير العشوائي ذو الحدين بإستخدام دالة احتمال ذو الحدين، نفرض أن توزيع ذو الحدين له: $n=5$, $\pi=0.4$ من الصيغة (4.2)، احتمال أن المتغير العشوائي ذو الحدين X يأخذ قيما صحيحة أقل من يساوي ٢ هي:

$$P(X \leq 2) = P(0;\ 5,0.4) + P(1;\ 5,0.4) + P(2;\ 5,0.4)$$
$$= 0.0778 + 0.2592 + 0.3456 = 0.6826$$

لذلك فاحتمال كسب علاوة هو نفسه احتمال أن X تأخذ قيما صحيحة هي على الأقل 3 وهي:

$$P(X \geq 3)=1-P(X \leq 2) = 1 - 0.68206 = 0.3174$$

بصفة عامة احتمال أن متغير عشوائي ذو الحدين X يأخذ قيما صحيحة أقل من أو تساوي قيمة معينة X موضح بالمعادلة (4.3).

مرة أخرى يكون من الأفضل استخدام برنامج ميني تاب لتحديد احتمالات ذو الحدين التجميعية عن طريق المعادلة (4.3)، ففي مثال التأمين على الحياة (π=0.4,n=5) يستخدم الأمر CDF بجانب الأمر الفرعي 4. BINOMIAL 5 للحصول على الاحتمالات التجميعية التالية:

```
MTB  > CDF ;
SUBC > binomial 5.  .4.
BINOMIAL WITH   N =5 ,  P =0.40000
      K              P( X LESS OR =K )
      0                   0.778
      1                   0.3370
      2                   0.6826
      3                   0.9130
      4                   0.9898
      5                   1.0000
```

دالة الاحتمال التجميعية

$$P(X \leq x) = F (x ;n,\pi) = P(0 ; n,\pi) + P (1;n,\pi) + \ldots\ldots\ldots{+}P (x;n,\pi) \qquad \textbf{(4.3)}$$

حيث $F (x;n,\pi)$ تشير إلى الاحتمال التجميعي لقيم X وحتى قيمة معينةx.

استخدام الحاسب الآلي:

ظلت الجداول الإحصائية تظهر لمدة طويلة في الكتب التي تتناول الإحصاء، ولكن مع ظهور البرامج الإحصائية المتطورة، إصبحت الجداول الإحصائية شيئا من الماضي. وكما أوضحنا من قبل،

فإنه يمكن استخدام البرنامج الإحصائي ميني تاب في تحديد الاحتمالات المفردة $P(X=x)=P(x;n,\pi)$ والاحتمالات التجميعية $P(X\leq x)=F(x;n,\pi)$ لتوزيع ذو الحدين. ويتحقق ذلك بإستخدام الأمر PDF في حالة $P(X=x)$ أو بإستخدام الأمر CDF في حالة $P(X\leq x)$ بجانب الأمر الفرعي BINOMIAL مع تعيين القيم الخاصة بكل من : x,n,π. القيم الخاصة لـ x تحدد في الأمر PDF أو CDF بينما قيم المعالم n,π تحدد في الأمر الفرعي BINOMIAL. المثال التالي يوضح كيفية استخدام برنامج ميني تاب في تحديد احتمالات ذو الحدين على الحاسب الشخصي. جدير بالذكر أن هناك كثير من البرامج الإحصائية الجاهزة الأخرى متاحة للاستخدام بسهولة بجانب برنامج ميني تاب، ونحن نحثك على استخدام الحاسب الآلي لهذا الغرض بدلا من استخدام الجداول الإحصائية في ملاحق هذا الكتاب.

مثال (٤-٢)

إعلان عن معجون أسنان يدعى أن هذا المعجون يفضله 40% من الأشخاص البالغين في الولايات المتحدة الأمريكية. سحبت عينة عشوائية من 50 شخص لاختبار صحة هذا الادعاء. افترض للحظة أن هذا الادعاء صحيحا واستخدم توزيع ذو الحدين لتحديد الاحتمالات الآتية:

(أ) احتمال أن 18 شخصا بالضبط في العينة تفضل معجون الأسنان.

(ب) احتمال أن 25 شخصا على الأكثر تفضل معجون الأسنان.

(جـ) احتمال أن عدد الأشخاص اللذين يفضلون معجون الأسنان ما بين 30,12 (بما فيهم الرقمين 30,12).

(د) بفرض أن 10 من الـ50 شخصا في العينة يفضلون معجون الأسنان. في ضوء إجابتك عن الجزئية(جـ)، ما هي النتيجة المنطقية حول ادعاء هذا الإعلان اعتمادا على العينة العشوائية الحالية؟

الحل

نفرض أن المتغير العشوائي X يدل على عدد الأشخاص في العينة اللذين يفضلون معجون الأسنان. قيم معالم توزيع ذو الحدين هي: $\pi=0.4, n=50$:

(أ) نبحث عن احتمال أن X تأخذ القيمة 18 أي : $P(X=18)$ وهذا الاحتمال يساوي .0987 وقد تحدد كما يلي:

```
MTB  >pdf   18 ;
SUBC > binomial 50    .4.
          K                P( X = k )
      18.00               0.0987
```

(ب) نبحث عن احتمال أن X تأخذ قيما صحيحة وحتى القيمة 25، أي:

$$P(X\leq 25) = F(25;50,.4)$$

وهذا الاحتمال يساوي (.9427) وقد تحدد كما يلي:

```
MTB  >  cdf 25;
SUBC > binomial 50     .4.
          K                  P( X LESS OR = k)
      25.00                       0.9427
```

(جـ) الاحتمال المطلوب هو أن X تأخذ قيما صحيحة في الفترة من 12 إلى 30 بما فيهما الرقمين 30 ,12, أي:

$$P(12 \le X \le 30) = P(X \le 30) - P(X \le 11)$$

الاحتمالات التجميعية $P(X \le 11), P(X \le 30)$ حددت كما يلي:

```
MTB  > cdf  30 ;
SUBC >binomial  50  .4.
        K     P( X LESS OR = k)
     30.00              0.9986
MTB  > cdf  11;
SUBC > binomial  50  .4.
         K     P( X  Less or = k)
     11.00              0.0057
```

وعلى ذلك يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(12 \le X \le 30) = 0.9986 - 0.0057 = 0.9929$$

(د) من الجزئية (جـ) وحيث أن X تأخذ قيما صحيحة في الفترة من 12 إلى 30 هو 0.9929 فإن احتمال أن X تأخذ قيما خارج هذه الفترة هو 0.0071 = 0.9929- 1 وعلى ذلك فإن النتيجة المشاهدة بأن عشرة شخاص يفضلوا معجون الأسنان هي نتيجة ذات احتمال ضعيف جدا، هذا على فرض أن الادعاء بأن 40% من الأشخاص يفضلوا معجون الأسنان كان صحيحا. لذلك فإن النتيجة المنطقية التي تؤثث على هذه العينة العشوائية هي أن هذا الادعاء غير صحيحاً، فالنسبة التي يدعي بها تبدو عالية.

جداول ذو الحدين: Binomial Tables

في حالة عدم تمكنك من الحصول على برامج إحصائية جاهزة، فإنه يمكن استخدام الجدول A في الملاحق الموجودة في نهاية الكتاب لتحديد احتمالات ذو الحدين. وقد تم جدولة توزيع ذو الحدين لمختلف قيم π,n باستخدام إما الصيغة (4.2) أو الصيغة (4.3) أو كليهما. في جدول A يتم تقييم الاحتمالات التجميعية لذو الحدين (صيغة 4.3) عند قيم محددة لكل من: x,n,π. من المهم أن نعرف أنه يمكن أيضا تحديد الاحتمالات المفردة باستخدام هذا الجدول، لأن المتغير العشوائي ذو الحدين هو قيم صحيحة وأن الخاصية الموضحة بالصيغة (3.3) في الفصل الثالث متحققة تماما. وتحديداً احتمال أن المتغير العشوائي ذو الحدين X يأخذ قيمة معينة x هو:

$$P(x\,;\,n,\pi) = F(x\,;\,n,\pi) - F(x-1\,;n,\pi) \qquad \textbf{(4.4)}$$

حيث $F(x\,;n,\pi)$ هو الاحتمال التجميعي لقيم ترقى وتزيد حتى تشمل (x)، أما $F(x-1,n,\pi)$ هو الاحتمال التجميعي لقيم ترقى وتزيد حتى تشمل (x-1).

فمثلا: احتمال أن X تأخذ القيمة 3 تساوى احتمال أن X تأخذ قيما أقل من أو تساوي 3 ناقص احتمال أن X تأخذ قيما أقل من أو تساوي 2.

ولتوضيح استخدام الجدولA ، نفرض أن $\pi=0.3, n=10$. احتمال أن X تأخذ قيما صحيحة أقل من أو تساوي 4 هو:

$$P(X \leq 4)=F(4 ; 10, 0.3) = 0.8497$$

احتمال ان X تأخذ قيما صحيحة أكبر من 2 هو :

$$P(X > 2) = P(X \geq 3) = 1-P(X \leq 2) = 1-0.3828 = 0.6172$$

واحتمال ان X تأخذ القيمة 5 هو:

$$P(X=5) = P(5 ; 10, 0.3) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4)$$
$$= 0.9527 - 0.8497 = 0.1030$$

مثال (٤-٣)

في مصنع لإنتاج سماعات استريو ، تسحب عشوائيا كل يوم 25 وحدة من إنتاج المصنع للفحص الكامل. اعتماداً على أحدث معلومات مسجلة يعتقد بأن نسبة المعيب من السماعات المنتجة في ظل ظروف الإنتاج المستقرة هي0.01.

(أ) أخذا في الإعتبار توزيع ذو الحدين، ما هو احتمال أنه في يوم معين نجد على الأقل ثلاث سماعات معيبة في العينة المسحوبة.

(ب) بفرض أنه وجد فعلا في أحد الأيام ثلاث سماعات أو أكثر معيبة. في ضوء إجابتك للجزء (أ)، ما هي النتيجة المنطقية حول العملية الإنتاجية في ذلك اليوم.

الحـــل

لاستخدام توزيع ذو الحدين هنا يجب أن نثق في أن الـ 25 سماعة والتي تسحب عشوائياً كل يوم، تشكل نسبة قليلة جداً من العدد الكلي للوحدات المنتجة في ذلك اليوم (أقل من 5% طبقاً للقواعد العادية) وهذا يؤكد مبدأ الاستقلالية، بمعنى أن الاحتمال 0.01 لإنتاج سماعة معيبة يبقى ثابتاً لكل السماعات التي تسحب.

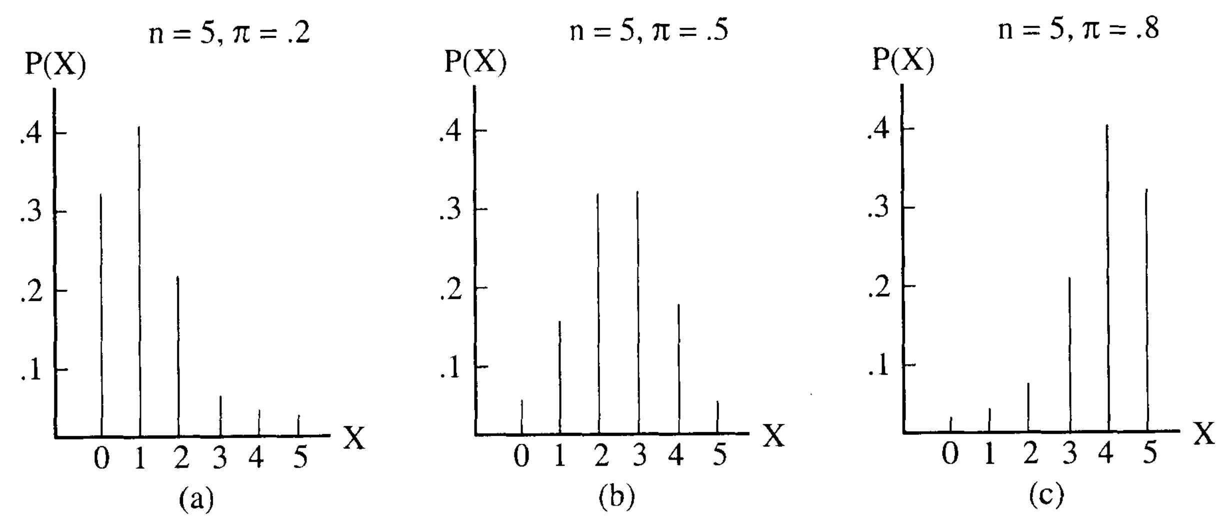
(أ) بفرض أن المتغير العشوائي X يدل على عدد السماعات المعيبة الموجودة في العينة المسحوبة من 25 وحدة. عند $n=25$, $\pi=0.01$ نجد أن احتمال أن X تأخذ قيما صحيحة أكبر من أو تساوي 3 هي:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.9980 = 0.002$$

(ب) حيث أن احتمال أن نجد ثلاث سماعات أو أكثر معيبة هو 0.002 (أي أن هذا يحدث مرتين فقط من كل 1000 مرة) فإننا يجب اعتبار هذا الحدث ضعيف الاحتمال جداً. والنتيجة المنطقية أن جودة السماعات يجب أن يتفق عليها من خلال معالجة مشاكل خط الإنتاج في ذلك اليوم. هنا محاولة ما يجب أن تبذل للتعرف على العوامل المسببة لهذا الاختلاف.

تأثير قيمة π :

بتغير قيمة المؤشر π، نحصل على توزيعات لذو الحدين تختلف في شكلها البياني تماما؛ فمثلا لنعتبر توزيعات ذو الحدين مع قيم المؤشرات:$(n=5, \pi=0.2)$, $(n=5, \pi=0.5)$,$(n=5, \pi=0.8)$ على التوالي، والأشكال البيانية المناظرة لتلك التوزيعات الاحتمالية موضحة في شكل (٤-٢).



شكل (٤-٢) : أشكال بيانية لدوال احتمال ذو الحدين

الأشكال البيانية الثلاث السابقة تبدو مختلفة تماماً، وحيث أن عدد المحاولات n=5 لم يتغير في التوزيعات الثلاث، فإن تلك الاختلافات لابد وأن يكون سببها اختلاف قيم π. لاحظ مثلا عندما تكون π=0.2 فإن الاحتمالات تتناقص بوضوح كلما زادت قيمX بدءاً من 2 فما فوق وحتى 5. بمعنى آخر يتضاءل التوزيع تدريجياً تجاه اليمين. الأثر العكسي يشاهد في الشكل (C) عندما تكون π = 0.8، حيث يتضائل التوزيع تدريجياً ناحية اليسار وعندما تكون π=0.5 يكون التوزيع متماثل.

تؤثر المعلمة π في شكل توزيع ذو الحدين بطريقة تجعله يصبح ملتوي الى اليمين أو ملتوي إلى اليسار أو متماثل اعتماداً على قيم π. بصفة عامة لأي قيمة لـn :

١. إذا كانت π<0.5 يكون توزيع ذو الحدين ملتويا جهة اليمين (إلتواء موجب).

٢. إذا كانت π > 0.5 يكون توزيع ذو الحدين ملتويا جهة اليسار (إلتواء سالب).

٣. إذا كانت π = 0.5 يكون توزيع ذو الحدين متماثلا.

يلاحظ أيضا أن الالتواء يتضاءل تدريجيا لقيم π التي تقترب من 0.5 ويصبح أكثر وضوحاً لقيم π التي تقترب من الصفر أو الواحد.

تلخيص توزيع ذو الحدين: القيمة المتوقعة والانحراف المعياري:

الآن نوجه اهتمامنا تجاه طرق تلخيص توزيع ذو الحدين. نفرض أنه قبل أن تلقى بقطعة عملة متوازنة 100 مرة، أنك سئلت ما يلي: ما هو عدد الصور التي تتوقع أن تشاهدها ؟ هل تقول 50 ؟ هل توصلك إلى هذا الرقم يتم على أساس أن احتمال ظهور الصورة في أي مرة ترمى فيها القطعة هو 0.5 وحيث أن هناك 100 رمية فإن حاصل ضرب 100 في 0.5 يعطي عدد الصور التي تتوقعها؟ إذا كان تفسيرك كذلك فأنت على حق تماماً.

إذا كان X متغير عشوائي متقطع له توزيع ذو الحدين، فإن القيمة المتوقعة (أو المتوسط في المدى الطويل) للمتغير العشوائي X تنتج من حاصل ضرب عدد المحاولات n في احتمال النجاح π ،أي:

$$E(X) = n\pi \qquad (4.5)$$

بالإضافة إلي ذلك فإن تباين X يمكن إثباته ليكون حاصل ضرب متوسط X أي ($n\pi$) في احتمال الفشل ($1-\pi$)؛ أي:

$$Var(X) = n\,\pi\,(1-\pi) \qquad (4.6)$$

ونتيجة لذلك يكون الانحراف المعياري لـX هو:

$$SD(X) = \sqrt{n\pi\,(1-\pi)} \qquad (4.7)$$

مثال (٤-٤)

في شهر ما قدم مندوب شركة تأمين عروض تأمين على الحياة لـ20 من العملاء المحتملين، وجد تاريخيا أن واحداً من كل خمسة يشتروا فعلا وثيقة تأمين من هذا المندوب. مستخدماً توزيع ذو الحدين، أجب عن الأسئلة الأتية الخاصة بنشاط هذا المندوب في الشهر القادم.

(أ) ما هو احتمال أن اثنين على الأقل من العملاء يشتروا وثائق تأمين على الحياة في الشهر القادم.

(ب) ما هو احتمال أنه لن يزيد عن أربعة عملاء يشتروا وثائق تأمين في الشهر القادم.

(جـ) ما هو احتمال أن اربعة عملاء بالضبط يشتروا وثائق تأمين في الشهر القادم.

(د) حدد المتوسط، التباين، الانحراف المعياري لعدد العملاء اللذين يشتروا وثائق تأمين على الحياة الشهر القادم.

(هـ) حدد احتمالات أن العدد الفعلى للعملاء اللذين يشتروا وثائق تأمين في الشهر القادم سوف يقع داخل اثنين- داخل ثلاثة- من وحدات الانحراف المعياري بعيداً عن المتوسط.

الحل

لكي نستخدم توزيع ذو الحدين، يجب أن تحقق هذه التجربة الشروط التي وضحت من قبل. يجب أن نفترض أن قرارات الشراء وقرارات عدم الشراء من قبل 20 زبون تمت زيارتهم بواسطة هذا المندوب تشكل مجموعة من الحوادث المستقلة، بحيث يكون احتمال أن أي زبون يشترى وثيقة تأمين هو 0.2 (واحد من كل خمسة). يبدو أنه من المقبول أن نستنتج أن قرار الزبون بشراء وثيقة تأمين هو قرار شخصي، لذلك فمن المتوقع أن يكون مستقلا عن قرارات الشراء لباقي الزبائن. أيضا يفترض أن هذه المجموعة من الزبائن تشكل عينة عشوائية من الزبائن المحتملين لهذا المندوب: (ملحوظة: إذا كانت هذه الإفتراضات غير صحيحة، فإن الإجابات التالية يمكن أن تكون غير صحيحة أيضا).

للإجابة على تلك الأسئلة، دعنا نعرف المتغير العشوائي X ليدل على العدد الفعلي للزبائن اللذين يشتروا وثائق تأمين من هذا المندوب خلال ذلك الشهر من بين 20 زبون تمت زيارتهم من قبل هذا المندوب.

(أ) إحتمال "إثنين على الأقل" تعني إحتمال أن X تأخذ قيما صحيحة أكبر من أو تساوي 2 وهذا الإحتمال عبارة عن:

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - .0692 = .9308$$

(ب) "الا يزيد عن أربعة" تعني أن X تأخذ قيما صحيحة أقل من أو تساوي 4 وهذا الاحتمال عبارة عن:

$$P(x \leq 4) = F(4; 20, 0.2) = .6296$$

(جـ) من الصيغة (4.4) الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X=4)=P(X\leq 4)-P(X\leq 3)=0.6296-0.4114=0.2182$$

(د) حيث أن : n=20, π=0,2 ومن الصيغ (4.5) وحتى (4.7) نجد أن :

$$\mu=E(X)=(20)(0.2)=4; \qquad \sigma^2=Var(X)=(20)(.02)(0.8)=3.2$$

$$\text{And}\quad \sigma=SD(X)=\sqrt{32}=1.79$$

(هـ) حيث أن : μ =4, σ =1,79 ، فإن فترة القيم التي تقع داخل وحدتين انحراف معياري بعيداً عن المتوسط تكون (*):

$$\mu\pm 2\sigma=4\pm(2)(1.79)=4\pm 3.58=(0.42,7.58)$$

قيم X الممكن أن تتواجد في الفترة (0.42,7.58) هي 1,2,3,4,5,6,7. لذلك فالاحتمال المطلوب هو احتمال أن X تأخذ قيمة واحدة من تلك القيم أي:

$$P(1\leq x\leq 7)=P(x\leq 7)-P(x=0)=0.9679-0.0115=0.9564$$

أي أن هناك احتمالا قدره 96% تقريباً بأن يكون العدد الفعلي للزبائن اللذين يشترواوثائق تأمين سوف يقع داخل وحدتين انحراف معياري بعداً عن المتوسط.

وبطريقة مماثلة فترة القيم التي تقع داخل ثلاث انحرافات معيارية بعداً عن المتوسط هي:

$$\mu\pm 3\sigma=4\pm(3)(1.79)=4\pm 5.37=(-1.37,9.37)$$

وحيث أن X لا يمكن أن تأخذ قيماً سالبة، تكون الفترة المطلوبة هي: (صفر، 9.73) والقيم الممكنة الموجودة في هذه الفترة هي: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.

لذا فالاحتمال المطلوب يكون:

$$P(0\leq x\leq 9)=F(9;\ 20,0.2)=0.9974$$

لاحظ أن هذه الاحتمالات تناظر إلى حد كبير احتمالات القاعدة التجريبية وأنها تزيد بدرجة ملحوظة عن الاحتمالات الناتجة عن متباينة تشيبتشيف. وهذه الملاحظة يجب ألا تندهش لها حيث أننا نتعامل هنا مع توزيع ذو قمة وحيدة يماثل بدرجة كبيرة شكل (٤-٢ a).

مثال (٤-٥)

اشترى تاجر تجزئة 10,000 شريط فيديو من نوعية جيدة، وقد أكد مورد هذه الصفقة أن نسبة المعيب في الصفقة لا يتجاوز 1% (طبقا للموصفات المتفق عليها). لاختبار ادعاء المورد، قام تاجر التجزئة بسحب عينة عشوائية من 100 شريط فوجد بها 6 أشرطة معيبة:

(أ) مفترضا صحة ادعاء المورد أي π =0.01 ، احسب المتوسط والانحراف المعياري لعدد الأشرطة المعيبة في العينة.

(ب) اعتمادا على إجابتك في (أ) هل كان من الممكن أن يتواجد 6 أشرطة معيبة بالعينة لو كان ادعاء المورد صحيحاً ؟

(*) تذكر: الرمز ± يعنى «زائد أو ناقص». وبالتالي 3.58 ± 4 تكون الفترة من:
4 + 3.58 = 7.58 to 4 - 3.58 = 0.42

(جـ) اعتماداً على إجابتك في (ب) وبفرض أننا وجدنا فعلا 6 أشرطة معيبة، ما هو الاستنتاج المنطقي حول ما يدعيه مورد هذه الصفقة المكونة من 10,000شريط.

الحل

في البداية، يلاحظ أن تطبيق توزيع ذو الحدين مناسب لهذه الحالة، حيث أن الشريط إما أن يكون معيبا أو سليما وأن حجم العينة n=100 هو حقيقة نسبة صغيرة جداً من إجمالي عدد الوحدات التي تم شراؤها وهكذا يتحقق الاستقلال بين وحدات العينة.

(أ) بفرض أن X متغير عشوائي يدل على عدد الأشرطة المعيبة، وعلى ذلك نجد أنه لعينة حجمها n=100 واحتمال وجود شريط معيب $\pi=0.01$ أن القيمة المتوقعة لعدد الأشرطة المعيبة يكون:

$$\mu = E(X) = n\pi = 100\,(0.01) = 1$$

أي أنه خلال العديد من العينات ذات الحجم 100 شريط نجد أن متوسط عدد الأشرطة المعيبة هو شريط واحد، أما الانحراف المعياري فهو:

$$\sigma = SD\,(X) = \sqrt{n\pi\,(1-\pi)} = \sqrt{100(0.01)(1-0.01)} = 0.995$$

(ب) للإجابة على هذا السؤال، يلاحظ أن العدد المشاهد من الأشرطة المعيبة في العينة (وهو6) هو أكبر من المتوسط بأكثر من ثلاث وحدات انحراف معياري أي:

$$\mu + 3\sigma = 1 + 3(0.995) = 3.985 < 6$$

في الحقيقة فإن العدد المشاهد للأشرطة المعيبة هو أكبر من المتوسط بأكثر من 5 وحدات انحراف معيارية. فإذا كان ادعاء المورد صحيحاً، فإن وجود ست أشرطة معيبة يعد حدثاً من غير المحتمل حدوثه إلى حد بعيد حتى في ضوء المحافظة الشديدة على قاعدة تشيبتشيف.

(جـ) بناءعلى إجابة الجزء (ب) فإن الاستنتاج المنطقي هنا هو أن ما يدعيه المورد غير صحيح، بمعنى أنه من الواضح أن تلك الصفقة تحتوي على أكثر من 1% شريط معيب.

مدلولات عملية من مثال (٤-٥)

العملية التي يتم بمقتضاها سحب عينة عشوائية صغيرة من دفعة إنتاج كبيرة بهدف فحصها للتأكد من جودة تلك الدفعة تعرف باسم "المعاينة بالقبول" **Acceptance Sampling** وغالبا ما يستخدم المعاينة بالقبول كوسيلة يمكن بمقتضاها أن يتفق كل من المنتج والمستهلك على ما إذا كانت الصفقة مقبولة أم لا. إعتمادا على عدد الوحدات التي وجد أنها معيبة في العينة، يكون الإجراء العادي هو إما قبول الدفعة كلها أو رفضها وإعادتها مرة أخرى للمورد أو المنتج. وعلى ذلك نجد أنه في مثال (٤-٥) يجب اعادة الصفقة المكونة من 100,000 شريط إلي المورد مرة أخرى، حيث أن إمكانية وجود ست وحدات معيبة من كل 100 وحدة هو أمر بعيد جدا أن يتحقق هذا إذا كانت π حقا 0.01 أو أقل. ظاهريا، هذه العملية تبدو أنها نافعة ومفيدة، ومع ذلك فهناك عوائق تلقى بظلالها على تلك المنافع. عمليات الفحص أساسا لا تحسن من جودة الإنتاج لأنها لا تحسن من العملية الفنية التي تعطي الأنتاج. في الحقيقة، فإن وجود "مستوى مقبول من الوحدات المعيبة" يمثل عقبة في التحسن المستمر، حتى يتم تحقيق المستوى المقبول. أفضل طريقة لتحسين جودة الإنتاج هو أن نعمل بإستمرار على تحسين العملية الأنتاجية ذاتها التي تقدم هذا المنتج.

تمارين:

(٤-١) فسر ما يعنيه توزيع ذو الحدين.

(٤-٢) بصفة عامة، ما الذي يعنيه متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين؟ ما هي القيم الممكنة التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير؟

(٤-٣) هل المعاينة مع الإحلال أم المعاينة بدون إحلال، هي التي تميز توزيع ذو الحدين؟ إشرح.

(٤-٤) في التطبيقات العملية، هل المعاينة تتم تقريباً بالإحلال أم بدون إحلال؟ وضح ذلك في حالة توزيع ذو الحدين.

(٤-٥) فسر الهدف من دالة إحتمال توزيع ذو الحدين.

(٤-٦) ما هي معالم توزيع ذو الحدين؟ وبما تمثل تلك المعالم؟

(٤-٧) ما هي العوامل التي تتحكم في شكل توزيع ذو الحدين؟ وضح ذلك.

(٤-٨) وضح ما هي القيمة المتوقعة والتباين لمتغير له توزيع ذو الحدين.

(٤-٩) بفرض إنك وكيل رسمي لشركة ما، أعطي مثالاً لما تعتقده أنه متغير عشوائي له توزيع ذو الحدين في مجال عملك.

(٤-١٠) بفرض أنك تمتلك محلاً لبيع الدراجات، أعطي مثالاً لما تعتقده أنه متغير عشوائي له توزيع ذو الحدين في هذا المجال.

(٤-١١) بفرض أنك مدير مصنع لإنتاج أكياس هواء فارغة، أعطي مثالاً لما تعتقده أنه متغير عشوائي له توزيع ذو الحدين في هذا المجال.

(٤-١٢) بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع ذو الحدين، حدد الإحتمالات لكل قيم X وارسم التوزيع الإحتمالي للمعالم التالية:

(a) $n=4, \pi=.2$ (b) $n=4, \pi=.5$ (c) $n=4, \pi=.8$

(٤-١٣) كرر التمرين (٤-١٢) ولكن للقيم التالية:

(a) $n=4, \pi=.3$ (b) $n=5, \pi=.3$ (c) $n=6, \pi=.3$

(٤-١٤) بالإشارة إلى كل جزء في التمرين (٤-١٢)، حدد الإحتمالات التجميعية التالية:

(a) $P(X \leq 1)$ (b) $P(X \geq 2)$ (c) $P(X < 3)$ (d) $P(X \geq 3)$

(٤-١٥) بالإشارة إلى كل جزء في التمرين (٤-١٣)، كرر تمرين (٤-١٤).

(٤-١٦) بفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين له $n=10$, $\pi=.6$.

حدد الإحتمالات التالية:

(a) $P(X < 4)$ (b) $P(X = 4)$ (c) $P(X \geq 6)$

(d) $P(X < 8)$ (e) $P(X > 2)$ (f) $P(X \geq 8)$

(٤-١٧) كرر التمرين (٤-١٦) عند $n=15$, $\pi=.2$.

(٤-١٨) بفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين له $n=20$, $\pi=.2$. إستخدم الصيغ (4.5)و (4.7) لتحديد المتوسط والإنحراف المعياري للمتغير X. بعد ذلك إحسب إحتمال أن X تأخذ قيمة تقع داخل وحدتين إنحراف معياري بعيداً عن المتوسط.

(٤-١٩) أختير عشوائياً 25 شخصاً من تجمع سكني معين وارسل إليهم إستمارات إستقصاء تسويقية. بإفتراض أن إحتمال الإستجابة هو 3. وان شروط توزيع ذو الحدين متحققة:

(أ) ما هو إحتمال أن يستجيب شخصان على الأكثر؟

(ب) ما هو إحتمال أن يستجيب أربعة فقط؟

(جـ) ما هو إحتمال أن يستجيب عشرة أشخاص على الأقل؟

(د) ما هو المتوسط والإنحراف المعياري لعدد الأفراد الذين يستجيبوا لهذا الإستقصاء.

(٤-٢٠) صاحب مصنع لغسالات الملابس يعلم من الخبرة السابقة أن 10% من الغسالات المباعة تتطلب أعمالاً تصليحية خلال فترة الضمان. بفرض أن محل تجزئة باع 20 غسالة من هذا النوع خلال شهر ما، وبفرض أن شروط توزيع ذو الحدين متحققة، أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما هو إحتمال ألا توجد غسالة تحتاج إلى أعمال تصليح خلال فترة الضمان.

(ب) ما هو إحتمال أن ثلاث غسالات على الأقل سوف تحتاج إلى أعمال تصليح خلال فترة الضمان.

(جـ) حدد المتوسط والإنحراف المعياري لعدد الغسالات التي تحتاج لأعمال التصليح، ثم احسب احتمال أن يقع العدد الفعلي داخل وحدتين إنحراف معياري من المتوسط.

(٤-٢١) يتسابق مرشحان B,A على منصب عمدة أحدى المقاطعات الصغيرة وكان الإعتقاد السائد أن هذه الإنتخابات متكافئة. قبل الإنتخابات بأسبوع تم إختيار 25 ناخباً ممن لهم حق الإنتخاب بطريقةعشوائية وتم سؤالهم عن إختيارهم بين المرشحان B,A. بفرض أن شروط ذو الحدين متحققة:

(أ) ماهو إحتمال أن 14 على الأقل سوف يفضلوا المرشح A؟

(ب) حدد المتوسط والإنحراف المعياري لعدد الناخبين اللذين يفضلوا المرشح A ثم احسب إحتمال أن يقع العدد الفعلي داخل وحدتين انحراف معياري عن المتوسط.

(جـ) افترض أن سبعة ناخبين من بين الـ 25 ناخب اختاروا المرشح A. في ضوء إجابتك عن (ب) ما الذي تستنتجه من سياق هذه البيانات حول نتيجة السباق؟

(٤-٢٢) صاحب مصنع لإنتاج مكابس يعتقد أن نسبة المكابس غير المطابقة للمواصفات لا تتجاوز 5%. في أحد الأيام سحبت عينة عشوائية من 20 مكبس وتم إختبارها لمعرفة ما إذا كانت مطابقة للمواصفات أم لا. بفرض أن شروط توزيع ذو الحدين متحققة:

(أ) ما إحتمال ألا يتجاوز عدد المكابس غير المطابقة للمواصفات عن مكبس واحد؟

(ب) حدد المتوسط والإنحراف المعياري لعدد المكابس غير المطابقة للمواصفات، ثم احسب إحتمال أن يقع العدد الفعلي للمكابس داخل وحدتين انحراف معياري حول المتوسط.

(جـ) بفرض أنك وجدت في أحد الأيام ثلاث مكابس من الـ 20 غير المطابقة للمواصفات. في ضوء إجابتك عن (ب) ما الذي تستنتجه حول ما يدعيه صاحب المصنع؟

(٤-٢٣) اكتشف صاحب مصنع لإنتاج السيارات أن 20% من تقنية الفرامل والتي ظهرت في إنتاج عام 1994 كانت معيبة. بفرض أن صاحب المصنع قد باع 20,000 سيارة من هذا النوع:

(أ) في يوم معين، أعيدت 500 من هذه السيارات لصاحب المصنع لفحصها وإصلاحها إذا تطلب الأمر ذلك. حدد المتوسط والإنحراف المعياري لعدد السيارات التي تحتاج إلى إصلاح في ذلك اليوم.

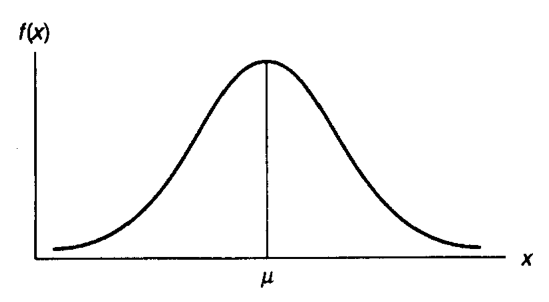
(ب) بفرض أنه في أحد الأيام وجد أن هناك 140 من 500 سيارة بها عيوب في تقنية الفرامل. في ضوء إجابتك عن (أ) ما الذي تستنتجه حول ما يدعيه صاحب المصنع من أن نسبة العيوب في الفرامل هي 20%؟

(٤-٢٤) استناداً إلى السجلات التاريخية، تعتقد مصلحة الضرائب أن حوالي 70% من كل الملفات الضريبية التي تم مراجعتها لمولين تعدلت دخولهم السنوية لتصبح 100,000$ أن عليهم سداد 1000$ في شكل ضرائب إضافية. في عينة من 200 ملف تم مراجعتها، وجدت مصلحة الضرائب أن منهم 175 ملف على أصحابها دفع ضرائب إضافية 1000$. هل بيانات هذه العينة تغير من إعتقاد مصلحة الضرائب؟ دعم إجابتك.

(٤-٣) التوزيع الطبيعي: The Normal Distribution

التوزيع الطبيعي هو بلا شك أهم وأكثر التوزيعات الاحتمالية المستمرة إستخداماً على نطاق واسع، وكما سنرى في الفصول التالية، فإنه يعد حجر الزاوية في تطبيقات الإستنتاج الاحصائي والذي يعتمد على عينات عشوائية من البيانات.

وكما هو موضح في شكل (٤-٣) يظهر الشكل البياني لدالة كثافة الإحتمال الطبيعي أنه منحنى متماثل، جرسي الشكل، له تركيز كثيف حول القيمة المركزية وله طرفين بلا نهاية إلى اليمين وإلى اليسار.



شكل (٤-٣) منحنى دالة كثافة إحتمال التوزيع الطبيعي

عدد كبير من الدراسات التجريبية إشارت إلى ان التوزيع الطبيعي غالباً ما يعطي تمثيلاً مناسباً لمجتمعات أو عمليات في بيئات إدارية متنوعة وفي مجالات أخرى. فمثلاً، توزيع الأوزان لمنتج ما يصب بواسطة ماكينة في أوعية أو صناديق، هي في الغالب قريبة من التوزيع الطبيعي، بالمثل حجم المبيعات الأسبوعية في مطاعم الوجبات السريعة ربما يناسبها أيضاً التوزيع الطبيعي. نضف إلى ذلك أنه غالباً ما يستخدم التوزيع الطبيعي كنموذج يفيد في تحديد الإحتمالات الموضوعية للنواتج المكن أن

تقع لحادث ما في المستقبل. فمثلاً قد يستخدم كتوزيع إحتمالي لمعدل العائد السنوي لأحد الأسهم. ومع ذلك يجب أن نكون على حذر عند إفتراض أن التوزيع الطبيعي يمكن أن يستخدم كنموذج مناسب دون أن نتحقق من ذلك تجريبياً. فمثلاً من المعروف على نطاق واسع أن توزيع الدخول السنوية يعد ملتويا بدرجة كبيرة، لذا فإنه من المؤكد أن التوزيع الطبيعي لن يكون نموذجاً ملائماً في هذه الحالة. وإذا كان التوزيع الطبيعي هو أكثر التوزيعات إستخداماً على نطاق واسع، فإنه أيضاً يساء إستخدامه على نطاق واسع بسبب التفسير الخاطئ لكلمة طبيعي **normal** خاصة إذا كان معناها الحرفي وهو "نظام أو معيار مقبول" قد طبق خطأ. دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي والموضحة بالمعادلة (4.8) إكتشفت في القرن الثامن عشر، ويعرف التوزيع الطبيعي أيضاً باسم توزيع جاوس لأن عالم الرياضيات الألماني كارل فريدريك جاوس كان قد تناوله في أعماله في بداية القرن التاسع عشر وفي خلال القرن التاسع عشر إستخدم بكثرة من قبل العلماء اللذين لاحظوا بصورة متكررة أن الأخطاء في القياسات الطبيعية تتبع نظاماً يوحي بتوزيع طبيعي.

دالة كثافة إحتمال التوزيع الطبيعي: The Normal Probability Density Function

تذكر أن دالة كثافة الإحتمال لمتغير عشوائي متصل لا تعطي إحتمال ان المتغير العشوائي يأخذ قيمة معينة، فذلك الإحتمال في الواقع هو الصفر. بديلاً لذلك فإننا نبحث عن إحتمال أن يقع المتغير العشوائي داخل فترة معينة وذلك بإيجاد المساحة تحت دالة كثافة الإحتمال وداخل حدود هذه الفترة (بإستخدام التكامل)، ودالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي موضحة بالمعادلة الرياضية التالية:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{(-1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2} \qquad (4.8)$$

الرموز π, e تعبر عن ثوابت وهي أعداد طبيعية تظهر في كثير من الصيغ الرياضية والقيم العددية المقربة لهما هي:

$e=2.71828$........and $\pi=3.14159$................

ربما تكون سعيداً لو عرفت أنك عملياً لن تتعامل مع الصيغة (4.8)، لأنه يمكنك إستخدام جداول إحصائية أو برامج إحصائية جاهزة، ومع ذلك فإنه من المهم أن تلاحظ في هذه الصيغة أن معالم التوزيع الطبيعي هما σ, μ وهذه المعالم هي المتوسط والإنحراف المعياري على التوالي للتوزيع الطبيعي. لذا إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطيعي، فإن القيمة المتوقعة لـX هي μ والإنحراف المعياري X هيσ.

عند تخصيص قيم معينة للمتوسط μ والإنحراف المعياريσ في الصيغة (4.8)، فإننا نحصل على توزيع طبيعي وحيد. دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي عند قيم مختلفة للمتوسط μ مع تثبيت الإنحراف المعياري σ ثم عند قيم مختلفة لـσ مع تثبيت μ موضحة بيانياً في شكل (٤-٤). من هذا الشكل يمكن أن نصل إلى عدة ملاحظات هامة:

* لكل زوج من القيم (σ, μ)، دالة كثافة الإحتمال للتوزيع يكون لها شكل جرسي ومتماثل.

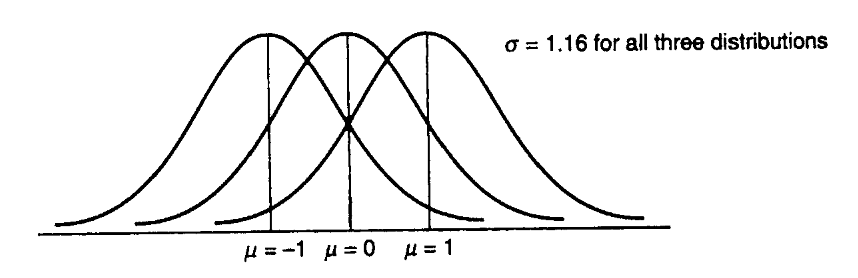
* نقطة التماثل بالنسبة للمساحة تحت شكل دالة كثافة الإحتمال هي المتوسط μ، بمعنى نصف المساحة تقع على يسار المتوسط والنصف الأخر يقع على يمين المتوسط. وهذا يدل على أن إحتمال وقوع مفردة معينة أدنى المتوسط هو نفسه إحتمال وقوع هذه المفردة أعلى المتوسط. وعلى ذلك، لأي متغير عشوائي طبيعي X نجد أن :

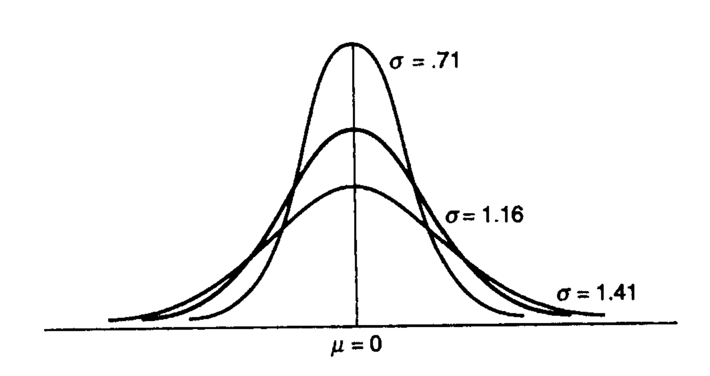
$$P(X \le \mu) = P(X \ge \mu) = .5. \qquad (4.9)$$

* حيث أن التوزيع الطبيعي متماثل، فإن الوسيط هو نفسه تماماً مثل المتوسط. في الواقع فإن المنوال للتوزيع الطبيعي هو أيضاً مساو في القيمة لكل من الوسيط والمتوسط، لأن أعلى قيمة في دالة كثافة الإحتمال تحدث عندما تكون $X=\mu$.

* المتوسط μ يحدد الموضع **Location**، حيث يستقر أو يوضع المنحنى.

* الإنحراف المعياري يحدد إنتشار **Spread** التوزيع، أي مدى القيم التي من الممكن أن يأخذها المتغير العشوائي.





شكل (٤-٤): دوال كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي عند قيم مختلفة لكل من μ ، σ

التوزيع الطبيعي التجميعي: The Cumulative Normal Distribution

يمكن تحديد إحتمال أن متغير عشوائي X يتبع توزيع طبيعي هو أقل من أو يساوي قيمة معينة x بإستخدام دالة التوزيع التجميعية.

$$P(X \le x) = F(x; \mu, \sigma) \qquad (4.10)$$

من الفصل الثالث نتذكر أن دالة التوزيع التجميعية مثل $F(x;\mu,\sigma)$ تمثل ذلك الجزء من المساحة تحت منحنى دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي $f(x;\mu,\sigma)$ والمحدد من على اليمين بقيمة معينة x. من المهم أن نتحقق من أن القيمة المعينة x هي قيمة جزئية، حيث أن الدالة التجميعية $F(x;\mu,\sigma)$ تمثل المساحة التي على يسار x . رأينا في الجزء (٣-٧) كيف تستخدم دالة التوزيع التجميعية لمتغير عشوائي متصل في تحديد إحتمالات عن فترة لهذا المتغير. ومما يؤسف له أنه حتى الآن لا يوجد أحد قادراً على تقديم الدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي $F(x;\mu,\sigma)$ في صورة رياضية يمكن إستخدامها بسهولة. بإستخدام الحاسب الآلي يمكن جدولة $F(x;\mu,\sigma)$ لأي مجموعة محددة من قيم μ، σ . لكن هذا يتطلب جدول منفصل لكل مجموعة من تلك القيم، كما أن عدد أزواج القيم الممكنة لا نهاية له، لذلك فمثل هذا

الجهد يفترض فيه الاستحالة. لحسن الحظ، من الممكن تحديد الإحتمالات عن فترة لأي متغير له توزيع طبيعي بالرجوع إلى جدول توزيع طبيعي واحد فقط وهو مهم جداً يعرف بإسم التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي **Standard normal distribution** وسوف نوضح الآن كيف يتم ذلك.

جدولة التوزيعات الطبيعية: التوزيع الطبيعي المعياري The Standard Normal Distribution

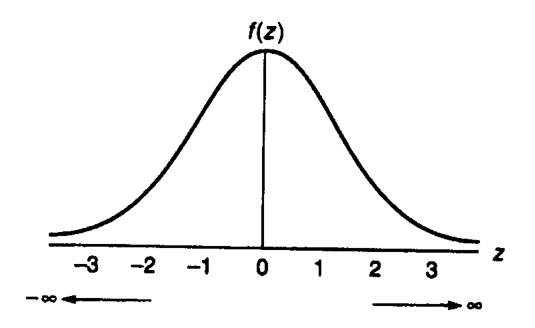
يأتي مفهوم المتغير العشوائي المعياري أو القياسي (نوقش في الفصل ٣-٩) ليلعب دوره هنا. بإستخدام المعادلة (3.15) في الجزء (٣-٩). يمكن القول أنه إذا كان X متغير عشوائي طبيعي متوسطه μ وإنحرافه المعياري σ فإن الصيغة:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad (4.11)$$

تحدد العلاقة بين Z,X حيث Z هي متغير عشوائي طبيعي متوسطه صفر وإنحرافه المعياري واحد. بمعنى آخر، المتغير العشوائي القياسي Z له توزيع طبيعي وحيد متوسطه μ=صفر وإنحرافه المعياري σ=١. هذا التوزيع يعرف بإسم التوزي الطبيعي القياسي أو المعياري **Standard normal distribution** وله دالة كثافة الإحتمال على الصورة:

$$f(Z;\ 0\ ,\ 1)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)Z^2},\quad -\infty < Z < \infty \qquad (4.12)$$

ونحن لن نستخدم هذه الصيغة الرياضية مباشرة، لكنها في الواقع تضع الأساس لكل الجداول التي تتضمن إحتمالات توزيع طبيعي والشكل البياني لدالة كثافة إحتمال التوزيع الطبيعي المعياري موضحة في شكل(٤-٥).



شكل (٤-٥) الشكل البياني لدالة كثافة إحتمال التوزيع الطبيعي المعياري

فمثلاً، إذا كان X متغير عشوائي طبيعي متوسطة μ=10, σ=2 فإن Z=(X-10)/2 هو متغير عشوائي طبيعي متوسطه صفر وإنحرافه المعياري واحد. نفرض أننا نبحث في تحديد إحتمال أن X تأخذ (مثلا) قيماً أقل أو تساوي 13.5. العلاقة الموضحة بالصيغة (4.11) تتيح لنا تحويل القيمة 13.5 إلى قيمة مناظرة للمتغير العشوائي الطبيعي Z.

قيمة Z التي تناظر X=13.5 هي: $Z=(13.5-10)/2=1.75$

من المناقشة التي عرضناها عن قيم Z في الفصلين الثاني والثالث، يمكن تفسير القيمة X=13.5 بأنها أصبحت 1.75 وحدة إنحراف معياري(σ=2) زيادة عن المتوسط (μ=10)وحيث أن Z تحددت بواسطة X ، فإن إحتمال أن X تأخذ فيما أقل من أو تساوى 13.5 هو نفسه إحتمال أن Z تأخذ قيماً أقل من أو تساوي 1.75. وبصيغة أخرى، الفترة الإحتمالية $P(X \leq 13.5)=F(13.5;\ 10\ ,\ 2)$ هي بالضبط

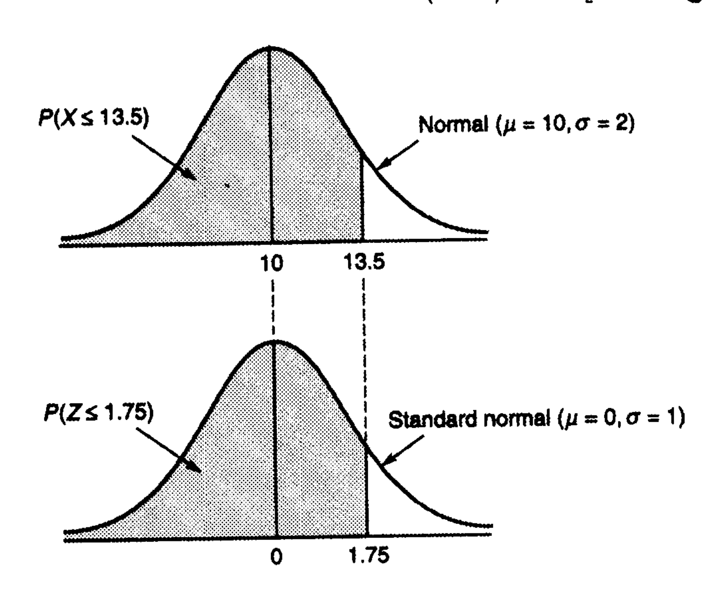
مثل الفترة الإحتمالية: $P(Z\leq 1.75)=F(1.75;0,1)$ حيث $F(1.75;0,1)$ هي الدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي المعياري مقيمة عند $Z=1.75$. هذا يعني أيضاً أن القيم 13.5, 1.75 هي قيم متناظرة بحيث تتساوى المساحات التي على يسار كل منهما، لذلك:

$$P(X \leq 13.5) = P(Z \leq \frac{13.5 - 10}{2} = P(Z \leq 1.75)$$

or

$$F(13.5;10, 2) = F(1.75;0, 1).$$

هذا التناظر موضح بيانياً في شكل (٤-٦)



شكل (٤-٦) التناظر بين التوزيع الطبيعي (10,2) والتوزيع الطبيعي المعياري.

ولتعميم هذا التناظر، نفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي متوسطه μ وإنحراف معياري σ. لإيجاد إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من أو تساوي قيمة معينة x، فإننا نحول أولاً القيمة x إلى قيمة Z المناظرة ويرمز لها بالرمز z بإستخدام الصيغة (4.11). إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من أو تساوي القيمة الجزئية x هو نفسه إحتمال أن Z تأخذ قيماً أقل من أو تساوي القيمة الجزئية z. بمعنى أخر، القيمة الجزئية x تناظر z من الإنحرافات المعياريةزيادة عن (إذا كانت Z موجبة) أو أقل من (إذا كانت Z سالبة) المتوسط μ. وعلى ذلك فإن إحتمال الفترة: $P(X\leq x) = F(x;\mu,\sigma)$ هو نفسه إحتمال الفترة $P(Z\leq z) = F(z;0,1)$.

لذا يمكن أن نكتب:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{X - \mu}{\sigma}) = P(Z \leq z) \qquad \textbf{(4.13)}$$

or

$$F(x;\mu,\sigma) = F(z;0,1) \qquad \textbf{(4.14)}$$

حيث $F(z;0,1)$ هي الدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي المعياري مقيمة عند القيمة الجزئية z.

عند إستخدام الصيغة (4.11) يكون من المهم أن نأخذ في الإعتبار تفسير قيمة Z كما ناقشناها في

الفصلين الثاني والثالث. قيمة Z المناظرة لقيمة معينة x هي المسافة بوحدات إنحراف معيارية بحيث تكون القيمة x أعلى أو أدنى المتوسط للمتغير العشوائي X. وكنتيجة لذلك، يمكن تحديد الفترات الإحتمالية لأي متغير عشوائي طبيعي X عن طريق معرفة الدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي المعياري .F(z;0,1)

إستخدام الجدول الطبيعي المعياري Using the Standard Normal Table

تقوم البرامج الإحصائية الجاهزة بحساب الإحتمالات للتوزيع الطبيعي، ومرة أخرى فنحن نشجع على إستخدام الحاسب الآلي في هذا الشأن وسوف نوضح ذلك بإختصار من خلال برنامج ميني تاب. من ناحية أخرى وبديلاً لذلك، فقد تم جدولة دالة الإحتمال التجميعية F(z;0,1) وهي موضحة في جدول B في الملاحق بآخر الكتاب. عند أي قيمة معينة z، يحدد الجدول إحتمال أن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z هو أقل من أو يساوي z. العمود الأول يسرد قيم Z وحتى رقم عشري واحد. قمم الأعمدة الأخرى تحدد خانةالمئات في قيمة Z. لتعيين إحتمال يناظر قيمة معينة لـZ مكونة من رقمين عشريين، يجب البحث في قمم الأعمدة حتى نحدد رقم المئات.

دعنا نوضح كيف يستخدم جدول B للعديد من قيم Z. لنأخذ القيمة الجزيئية 0.89 لإيجاد إحتمال أن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z هو أقل من أو يساوي 0.89، فإننا نعين أولاً موقع 0.8 في قمم الصفوف (أول عمود) بعد ذلك نبحث عن موقع 0.09 في قمم الأعمدة، وأخيراً نتحرك عبر الصف 0.8وأسفل العمود 0.09 لتعيين الإحتمال المرغوب فيه وهو 0.8133، وتتبع نفس الخطوات لتحديد إحتمالات عن فترة معينة لمتغير طبيعي معياري والتي تناظر قيم جزيئية أخرى، كما هي موضحة في الجدول التالي:

القيمة الجزيئية	الإحتمال
- 1.8	$P(Z \le -1.8) = F(-1.8; 0, 1) = .0359$
- .45	$P(Z \le -.45) = F(-.45; 0, 1) = .3264$
1.76	$P(Z \le 1.76) = F(1.76; 0, 1) = .9608$

والآن نوضح كيف يمكن أن نستخدم جدول B في تحديد الإحتمالات لأي متغير عشوائي طبيعي. نفرض أن X متغير يتبع توزيع طبيعي له متوسط μ=50 وإنحراف معياري σ =10 والمطلوب هو تحديد إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من أو تساوي 45، بإستخدام الصيغ (4.13)و (4.14) نجد أن:

$$P(X \le 45) = P(Z \le \frac{45-50}{10}) = P(Z \le -0.5)$$

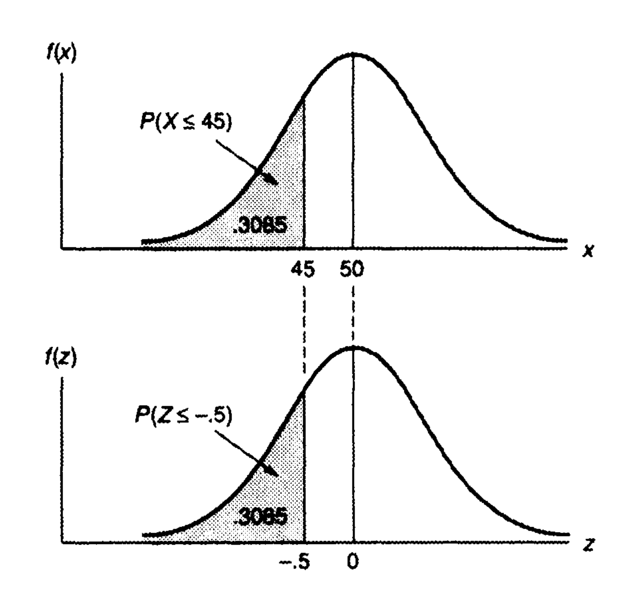
OR

$$F(45; 50, 10) = F(-.5; 0,1).$$

من جدول B في ملحق آخر الكتاب نجد أن:

$$P(X \le 45) = P(Z \le -.5) = F(-.5; 0, 1) = .3085$$

وهكذا، إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من أو تساوي 45 هو نفسه إحتمال أن Z تأخذ قيماً أقل من أو تساوي .5- أي 0.3085، حيث أن متوسط X هو 50 والإنحراف المعياري هو 10، فالقيمة 45 هي عبارة عن نصف وحدة إنحراف معياري لـX وأدنى متوسط X، وهذا هو بدقة ما تشير إليه قيمة Z والتي هي 5.-، حيث أن متوسط Z هو الصفر وإنحرافها المعياري هو الواحد الصحيح. التساوي في المساحات تحت منحنى دوال كثافة الإحتمال لكل من Z,X في هذا المثال موضحة في شكل(٤-٧).



شكل (٤-٧) : تساوي المساحات تحت منحنى دوال الكثافة لكل من Z,X

أيضاً يمكن إستخدام جدول B في تحديد إحتمالات أن متغير عشوائي طبيعي يأخذ قيماً داخل فترة معينة، وللتوضيح دعنا نستخدم مرة أخرى المتغير العشوائي ذو المتوسط 50 والإنحراف المعياري10. بفرض أننا نرغب في تحديد إحتمال أن X تأخذ قيماً داخل الفترة (46,58). لإيجاد هذا الإحتمال فإننا نحول هذه الفترة إلى فترة مناظرة من قيم Z بإستخدام الصيغة (4.11) أي:

$(46-50)/10= -0.4$ ، $(58-50)/10=0.8$. وبالتالي فإحتمال أن X تقع بين 46، 58 هو نفسه إحتمال أن Z تقع بين 0.4-، 0.8 . من المعادلة (3.5) في الجزء (٣-٧)، نجد أن إحتمال أن Z تأخذ قيماً بين 0.4-، 0.8 يساوي المساحة (أخذاً في الإعتبار دالة كثافة إحتمال Z) التي على يسار 0.8 مطروحاً منها المساحة التي على يسار 0.4- أي:

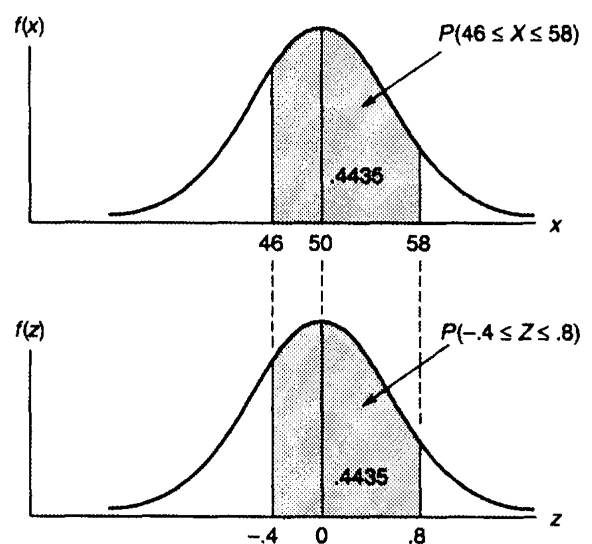
$$P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -0.4)$$

$$=0.7881 - 0.3446 = 0.4435$$

لذلك:

$$P(46 \leq X \leq 58) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) = 0.4435$$

تساوي المساحات في هذا المثال موضحة في شكل (٤-٨).



شكل (٤-٨): تساوي المساحات تحت منحنى دوال الكثافة لكل من z,x

مثال (٤-٦)

بفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن الذكاء البشري عندما قيس بواسطة إختبارات IQ. فإذا كان X لها توزيع طبيعي بمتوسط 100 وإنحراف معياري 10. حدد احتمالات أن Xتأخذ قيماً:

(أ) أكبر من 100 (ب) أقل من 85 (جـ) على الأكثر 112

(د) على الأقل 108 (هـ) أكبر من 90 (و) ما بين 86، 98

(ز) ما بين 104و 112

الحـل

في واقع الأمـر فإننا في هذا المثال نوضح كل الحالات المختلفة التي يمكن أن تنشأ عند تحـديد الإحتمالات بإستخدام جدولB، والطريقة هي تحويل قيم X إلى قيم Z بإستخدام الصيغة (4.11) ثم استخدام جدولB. لاحظ أنه بإستثناء المطلوب(أ) أعطيت أشكال بيانية لتوضيح المساحات الإحتمالية لباقي الأسئلة.

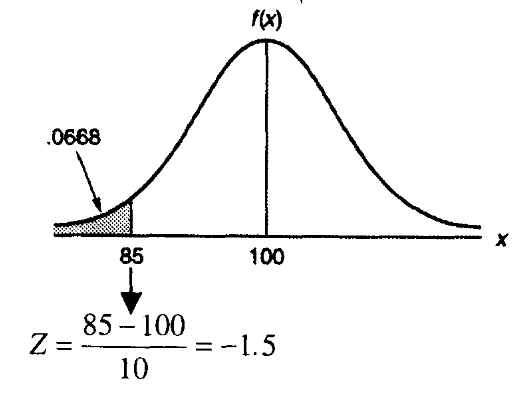
(أ) حيث أن أي توزيع طبيعي هو توزيع متماثل حول المتوسط، فإحتمال أن X تأخذ قيماً أكبر من متوسطها (100) هو 0.5 ومع ذلك نجد أنه بالتحويل إلى توزيع طبيعي معياري

$$P(X > 100) = P(Z > \frac{100 - 100}{10} = P(Z > 0)$$

والآن بإستخدام قاعدة الإحتمال للحوادث المكملة، تحصل على:

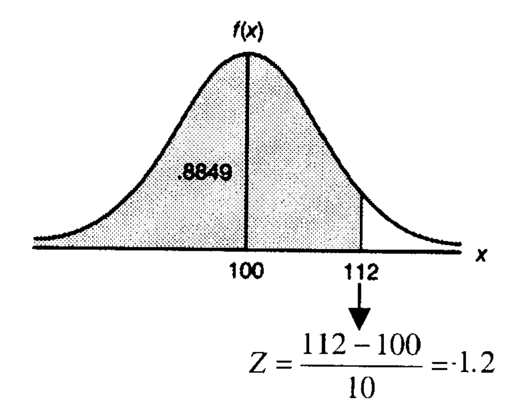
$$P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 0.5$$

(b) $P(X < 85) = P(Z < -1.5) = .0668$



$$Z = \frac{85 - 100}{10} = -1.5$$

(C) $P(X \le 112) = P(Z \le 1.2) = .8849$

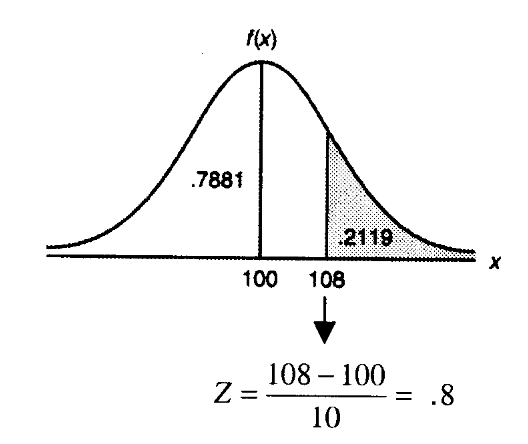


(d) $P(X \ge 108) = P(Z \ge .8)$

$= 1 - P(Z < .8)$

$= 1 - .7881$

$= .2119$

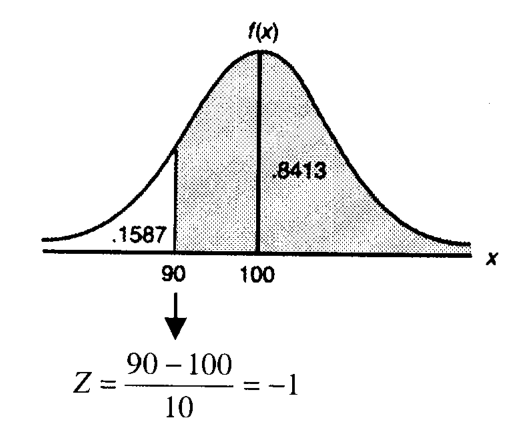


(e) $P(X > 90) = P(Z > -1)$

$= 1 - P(Z \le -1)$

$= 1 - .1587$

$= .8413$

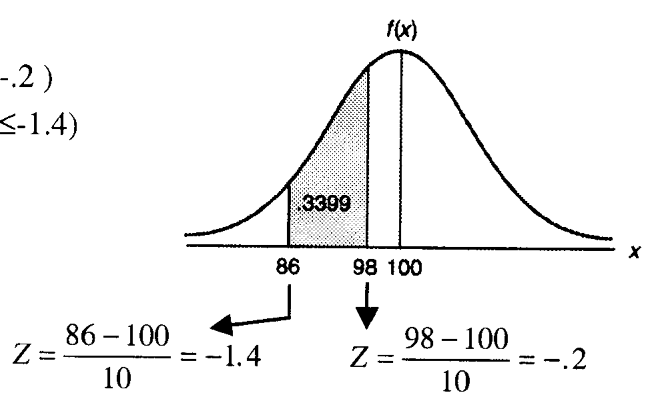


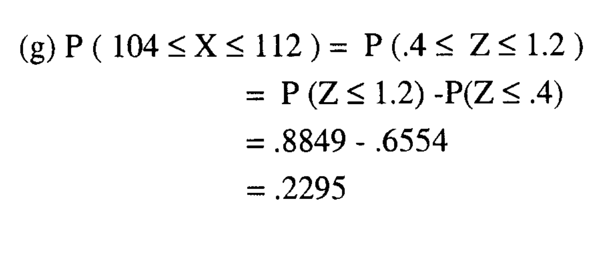
(f) $P(86 \le X \le 98) = P(-1.4 \le Z \le -.2)$

$= P(Z \le -.2) - P(Z \le -1.4)$

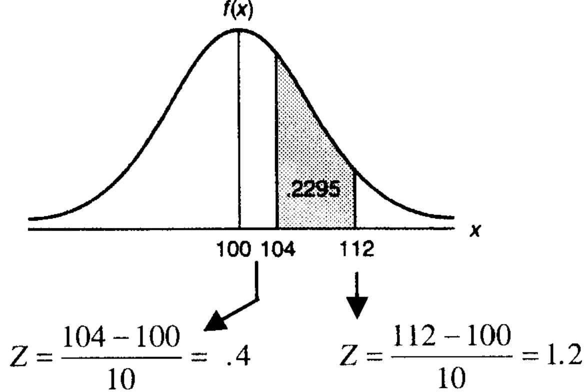
$= .4207 - .0808$

$= .3399$





$$(g)\ P(104 \le X \le 112) = P(.4 \le Z \le 1.2)$$
$$= P(Z \le 1.2) - P(Z \le .4)$$
$$= .8849 - .6554$$
$$= .2295$$



$$Z = \frac{104-100}{10} = .4 \qquad Z = \frac{112-100}{10} = 1.2$$

يلاحظ أن الأسلوب الذي إستخدم لتحديد الإحتمالات في الأجزاء من (ب:ز) يمثل خطوات عامة يمكن استخدامها لأي توزيع طبيعي لحساب المساحات التي على يسار نقطة أصغر من المتوسط (المطلوب ب) أو على يسار نقطة أكبر من المتوسط(جـ) أو على يمين نقطة أكبر من المتوسط (د) أو على يمين نقطة أقل من المتوسط (هـ) أو لفترة تقع بأكملها على يسار المتوسط(و) أو لفترة تقع بأكملها على يمين المتوسط (ز).

مثال (٤-٧)

إذا كان X متغير عشوائي طبيعي بمتوسط μوإنحراف معياريσ. حدد إحتمال أن X سوف تأخذ قيماً داخل واحد، اثنين، ثلاثة إنحرافات معيارية بعداً عن المتوسط.

الحل

هنا لم تحدد قيماً معينة لكل من σ,μ وهذا يعني أن الإحتمالات التي نحن بصدد تحديدها تكون متحققة لجميع التوزيعات الطبيعية. هذه الإحتمالات تحدد بوضوح أن التوزيعات الطبيعية تتركز بقوة حول المتوسط.

إحتمال أن X تأخذ قيماً داخل وحدة إنحراف معياري بعداً عن المتوسط يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$$

ويمكن معاملة μ+σ، μ-σ وكأنها قيم معينة لـX ومن ثم يمكن إستخدام الصيغة (4.11) لتحويلها إلى قيم معيارية Z. قيمة Z المناظرة لـx=μ-σ هي:

$$Z = \frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1$$

وقيمة Z المناظرة لـx=μ + σ هي:

$$Z = \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

وبالتالي فإن إحتمال أن تقع X بين μ-σ، μ+σ هو نفسه إحتمال أن تقع Z بين 1-، 1 . أي:

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(-1 \le Z \le +1)$$

والآن:

$$P(-1 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

لذلك فإن إحتمال أن تقع X بين $\mu-\sigma$، $\mu+\sigma$ (أي داخل وحدة إنحراف معياري بعداً عن المتوسط) هو 0.6826 وهذا يعني أن أكثر من ثلثي كل المشاهدات من أي توزيع طبيعي تقع داخل وحدة إنحراف معياري من المتوسط.

باتباع نفس الخطوات، نجد أن قيمZ التى تناظر$\mu-2\sigma$ ، $\mu+2\sigma$ هي 2,-2 على التوالى، وعليه:

$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

لذلك فإن أكثر من95% من كل المشاهدات من أي توزيع طبيعي تقع داخل وحدتين إنحراف معياري بعداً عن المتوسط.

حيث أن متوسط Z هو الصفر والإنحراف المعياري هو الواحد، فإن قيم Z المناظرة لـ $X=\mu-3\sigma$، $X=\mu+3\sigma$ هي$Z=-3, Z=+3$ على التوالي، وكنتيجة لذلك:

$$P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0.9987 - 0.0013 = 0.9974$$

وهذا في واقع الأمر يعني أن 100% تقريباً من كل المشاهدات من أي توزيع طبيعي تقع داخل ثلاث وحدات إنحراف معياري بعداً عن المتوسط.

يوضح مثال (٤-٧) أنه لأي متغير عشوائي طبيعي X نجد أن إحتمال أن X تأخذ قيماً داخل مسافة قدرها واحد، إثنين، ثلاثة إنحرافات معيارية بعداً عن المتوسط هي: 0.6826، 0.9544، 0.9974 على التوالي. وغالباً ما يشار إلى ذلك بإسم القاعدة التجريبية:**empirical rule** والتي نوقشت من قبل في الجزء (٢-٥). الإحتمالات المقترنة بالقاعدة التجريبية تدل على أنه للتوزيع الطبيعي يوجد تركيز كبير للقيم حول المتوسط، فمثلاً أكثر من ثلثي القيم تقع داخل وحدة إنحراف معياري بعداً عن المتوسط.

مثـــال (٤-٨)

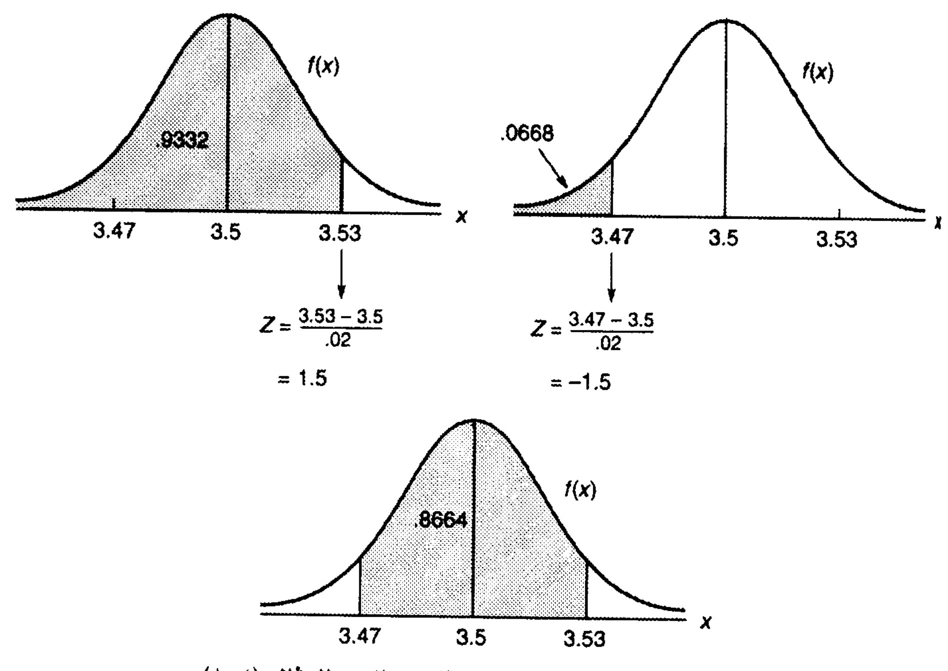
إذا كان القطر الخارجي لقاعدة دائرية لنوع معين من الكراسي يتم إنتاجها بعملية إنتاجية مستقرة لها نموذج مناسب يتبع توزيع طبيعي متوسطه 3.5 سم وإنحراف معياري 02.سم. فإذا كان هذا النوع من قاعدة الكراسي يجب ألا يقل قطره عن 3.47سم ولا يزيد عن 3.53سم حتى تكون قابلة للإستخدام، ما هي نسبة القواعد المنتجة بهذه العملية التي يجب إستبعادها لأن أقطارها خارج المدى الممكن قبوله؟

الحـــــل

نفرض أن X متغير عشوائي يدل على قطر قاعدة الكرسي المنتج وفق هذه العملية المستقرة. توزيع X يفترض أنه طبيعي بمتوسط $\mu=3.5$ وإنحراف معياري $\sigma=.02$. إحتمال أن قطر القاعدة يكون مقبولاً هو نفسه إحتمال أن تقع X بين3.47 و 3.53سم. قيم Z المناظرة لكل من $x=3.47$و $x=3.53$ هي:

$$Z = \frac{3.47-3.5}{.02} = -1.5$$

$$Z = \frac{3.53-3.5}{.02} = 1.5$$



شكل (٤-٩) : توضيح تحديد الإحتمالات للمثال (٤-٨)

$$P(3.47 \leq X \leq 3.53) = P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1.5) = .8664$$

تذكر أن الأحتمال لحدث ما قد عرف في الفصل الثالث على أنه التكرار النسبي لوقوع الحدث في المدى الطويل خلال تجربة يتم تكرارها تحت نفس الظروف ، لذلك ، فحوالي 86.64% من قواعد الكراسي المنتجة وفق هذه العملية سيكون لها أقطار ممكن إستخدامها أي مقبولة. من ناحية أخرى وطبقاً لقاعدة الإحتمال للحوادث المكملة نجد أن 1336.=8664.-1 أي حوالي 13.36%من القواعد يجب إستبعادها.

البحث في تحسين العملية الإنتاجية لمثال (٤-٨)

أي عملية إنتاجية ينتج عنها إستبعاد 13.36% من إنتاجها يجب إعتبارها عملية غير مقبولة ويجب تحسينها وذلك بتخفيض الإختلافات بين الوحدات الإنتاجية. وحيث أن العملية الإنتاجية مستقرة ، فإن تخفيض الإختلافات يجب أن يأتي كنتيجة لإعادة تصميم العملية الإنتاجية حتى يمكن تخفيض الأسباب الشائعة أو العادية لتلك الإختلافات. فمثلاً تخفيض 25% في الإنحراف المعياري (أي من02.=σ إلى σ =.015) ستكون نتيجته تخفيض نسبة الخردة أي المستبعد من 13.36% إلى أقل من 5%.

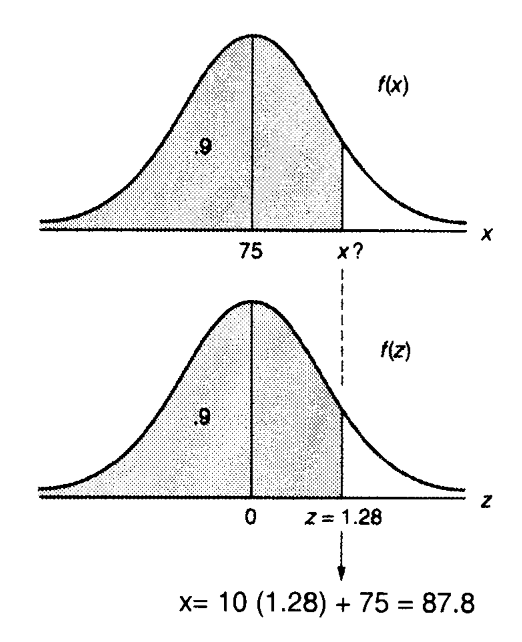
إيجاد القيمة الجزئية x بمعلومية F(x)

في التطبيقات الإحصائية ، غالباً ما نحتاج إلى تحديد قيمة معينة x لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ، بحيث تقع نسبة معلومه من المساحة على يسار هذه القيمة. بمعني آخر ، يكون لدينا الإحتمال ونرغب في تحديد القيمة الجزئية المناظرة x للمتغير العشوائي. بفرض أنه من المعلوم أن درجات إختبار الإحصاء تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 75 وإنحراف معياري 10 ، ماهي الدرجة x التي يحققها الطالب بحيث يكون 10% من الدرجات تكون مرتفعة عن x؟

إذا كان 10% من الدرجات تتعدى x ، فإن 90% من الدرجات تكون أقل من أو تساوي x ، أي:

$$P(X \leq x) = .9$$

وكل ما نبحث عنه هو القيمة الجزيئية x بحيث أن 90% من الدرجات تكون أقل من أو تساويها. إعتماداً على المساحة التجميعية 9. يمكن أن نتصور أين تقع هذه الدرجة على المحور الأفقي مثلما نشاهد ذلك في أعلى شكل (٤–١٠). من هذا الشكل نلاحظ أن الدرجة x يجب أن تكون على يمين الدرجة المتوسطة (75 درجة)، لأن 90% من الدرجات أقل من أو تساوي x. بإستخدام الصيغة (4.11) يمكن تحويل القيمة الجزيئية xإلى قيمة جزيئية مناظرة z أي $z=(x-75)/10$. هذا التناظر بين هذه القيم الجزيئية موضح في شكل (٤–١٠).



شكل (٤–١٠) : التناظر بين القيم الجزئية z,x

لاحظ أنه إذا كانت قيمة z معلومة، فإنه يمكن إستخدام هذه المعادلة في الحل للحصول على قيمة x المطلوبة. من تساوي الإحتمالات كما هو مبين في شكل (٤–١٠) نعلم أن قيمة z هي قيمة النسبة المئوية التسعون للتوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$P(Z \leq z) = .9$$

لتحديد z، فإننا نعكس العملية السابقة بإستخدام جدول B وذلك بالبحث في صلب هذا الجدول عن أقرب قيمة إحتمالية للإحتمال 0.9. بعد ذلك نربط هذه القيمة الإحتمالية بقيمة Z المعيارية، أي القيمة الناتجة من تقاطع رأسي الصف والعمود. وللتوضيح، نبحث أولاً في صلب الجدول عن أقرب رقم لـ 0.9نجده 8997. أما رأس الصف ورأس العمود التي تناظر 8997. هما: 1.2 (الصف) و08. (العمود). لذا، فإن القيمة المطلوبة المناظرة للنسبة المئوية التسعون هي 1.28. هذا يعني أنه لكل التوزيعات الطبيعية، نجد أن قيمة النسبة المئوية التسعون هي 1.28 وحدة إنحراف معياري أعلى المتوسط. معنى هذا أنه للتوزيع الطبيعي الذي متوسطه 75وإنحراف معياري 10 نجد أن:

$$1.28 = \frac{x-75}{10}$$

∴ قيمة النسبة المئوية التسعون هي:

$$x = (10)(1.28) + 75 = 87.8$$

لذلك، فإن 90% تقريباً من درجات الإحصاء سوف تكون أقل من 88 درجة. وكما وضحنا من

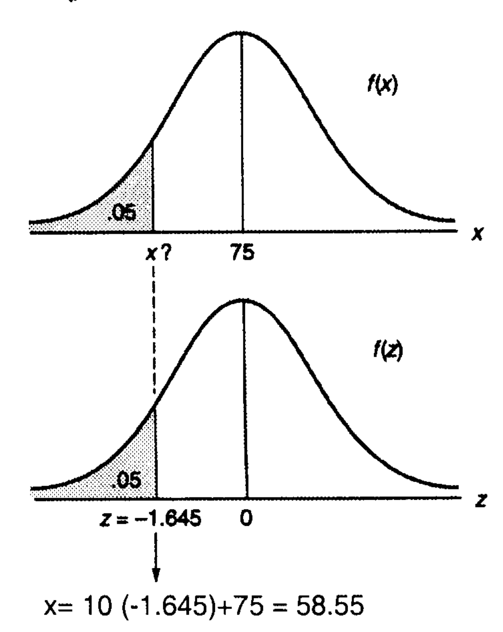
قبل، فهذا الجهد يمكن أن يؤدي بيسر وسهولة بإستخدام الكمبيوتر.

وكتوضيح آخر، نفرض أن 5% من الطلبة اللذين أدوا إختبار الإحصاء قد حصلوا على درجة الرسوب، فما هي أقل درجة للنجاح؟ نفرض أن الحد الأدنى لدرجة النجاح هي القيمة الجزيئية x، عندئذ تكون xهي قيمة النسبة المئوية الخامسة، أي:

$$P(X<x)=.05$$

مرة أخرى، يتم تحويل الحد الأدنى للنجاح x إلى قيمة معيارية z كما هو موضح في شكل (٤-١١). في هذه الحالة يلاحظ أن القيمة الجزيئية x يجب أن تقع على يسار المتوسط، حيث أن 5% فقط من الدرجات أقل من x. وكما سبق، نجد أن قيمة z الناتجة من تساوي الإحتمالات تكون على صورة:

$$P(Z<z)=.05$$



شكل (٤-١١): التناظر بين القيم الجزيئية z,x

وبعمل مسح للإحتمالات في صلب الجدول B لإيجاد أقرب قيمة لـ.05، نجد أنها تقع تماماً في منتصف المسافة بين .0505و .0495. وحيث أن قيمة Z المناظرة لـ .0505 هي -1.64 وتلك المناظرة لـ .0495هي -1.65، فإننا نجزئ الفرق بالتساوي بين -1.64، −1.65 وتستقر قيمة Z عند -1.645 وهذا يعني أنه لكل التوزيعات الطبيعية، تكون قيمة النسبة المئوية الخامسة هي 1.645إنحراف معياري أدنى المتوسط، وكنتيجة لذلك:

$$-1.645=\frac{x-75}{10}$$

$$x=(10)(-1.645)+75=58.55$$

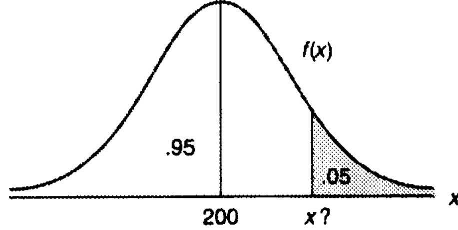
وعلى ذلك تكون درجة النجاح في هذا الإختبار هي 59 درجة أو أكثر.

مثال (٤-٩)

بفرض أن الطلب الشهري على منتج ما يتبع تقريباً توزيع طبيعي بمتوسط 200 وحدة وإنحراف معياري 40 وحدة. ما هي أكبر كمية مخزون يكون متاحاً في بداية الشهر بشرط أن إحتمال نفاذ المنتج (المخزون) خلال الشهر لا يزيد عن 5%؟

الحل

بفرض أن المتغير العشوائي X يمثل الطلب الشهري ، حيث X له توزيع طبيعي بمتوسط 200وحدة وإنحراف معياري 40 وحدة. نحن نبحث عن بداية معينة لمستوى المخزون x بحيث يكون إحتمال أن يتعدى الطلب الشهري الفعلي القيمة x هو 05. وهذا يعادل القول بأن إحتمال أن الطلب الشهري الفعلي لن يزيد عن القيمة x هو 95. ، لذلك نبحث عن القيمة الجزيئية x بحيث أن 95% من المساحة الكلية لتوزيع الطلب تكون على يسارها. بمعنى آخر، x هي قيمة النسبة المئوية الخامسة والتسعون كما في شكل(٤-١٢).



شكل (٤-١٢) : قيمة النسبة المئوية الـ 95 لمثال (٤-٩)

مما تقدم، نعلم أن المساحة على يسار x تساوي المساحة على يسار z أي:

$$P(X \le x) = P(Z \le z) = .95$$

حيث:

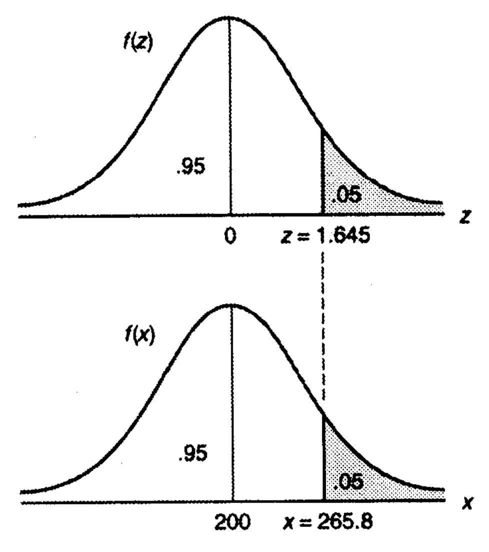
$$z = \frac{x - 200}{40}$$

وبمسح صلب جدول B عند أقرب إحتمال لـ95. ، نجد أنه يقع تماماً في منتصف المسافة بين القيم الجدولية 9495.و 9505. وهي تناظر قيم Z: 1.64و 1.65 ومثلما وضحنا من قبل، نجزئ الفرق بالتساوي بين هاتين القيمتين لنحصل على القيمة 1.645. وهكذا نجد أن قيمة النسبة المئوية الـ 95 لكل التوزيعات الطبيعية هي 1.645 إنحراف معياري أعلى من المتوسط. وكنتيجة لذلك:

$$1.645 = \frac{x - 200}{40}$$

$$x = (40)(1.645) + 200 = 265.8$$

انظر إلي شكل (٤-١٣):



شكل(٤-١٣): التناظر بين القيم الجزيئية x,z

مما تقدم يتبين أن بدايات المخزون الشهرية يجب ألا تقل عن 266 وحدة، على فرض أن إحتمال نفاذ المخزون خلال الشهر لا يزيد عن 05.. ولكن تنبه لهذا التحذير: بفرض أن سياسة الشركة، إعتمادا على هذا التحليل، قامت بتحديد بدايات المخزون عند المستوى 266 وحدة. هذه السياسة تكون مقبولة فقط إذا تأكدنا من أن إفتراض أن عملية الطلب في المستقبل ستبقى خاضعة لتوزيع طبيعي متوسطه 200 وإنحرافه المعياري 40. أفضل طريقة للتأكد من ذلك يتم من خلال التقييم الدوري لتوزيع الطلب.

إستخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

يمكن تجنب إستخدام الجداول الإحصائية لتحديد الاحتمالات الخاصة بالتوزيع الطبيعي وإستخدام بدلا من ذلك الحاسب الآلي الشخصي مع برنامج إحصائي مناسب. فإذا كان لديك حاسب شخصي، فإننا نحثك بقوة لإستخدامه في هذا الشأن. المثال التالي يوضح كيفية استخدام البرنامج الاحصائي ميني تاب، حيث تستخدم الأوامر CDF وINVCDF بجانب الأمر الفرعي NORMAL للحصول على المتوسط والانحراف المعياري. عندما يستخدم الأمر CDF فإن النتيجة التي نحصل عليها هي مساحة على يسار القيمة الجزيئية المكتوبة في أمر CDF للتوزيع الطبيعي المشار إليه بالأمر الفرعي NORMAL. بمعنى آخر، عند معلومية x، النتيجة التي نحصل عليها هي $F(x;\mu,\sigma)$. أيضاً، عندما يستخدم الأمر INVCDF فإن النتيجة التي نحصل عليها هي القيمة الجزيئية التي تناظر المساحة المكتوبة في أمر INVCDF للتوزيع الطبيعي المشار إليه بالأمر الفرعي NORMAL. بمعنى آخر، بمعلومية $F(x;\mu,\sigma)$ نحصل على x.

مثال (٤-١٠)

عند مراجعة السجلات التاريخية لبنك ما، وجد مدير الإئتمان أن المتوسط الربع سنوي (بالدولار) لتخلف العملاء عن سداد ديونهم قد بلغ 1.5 مليون دولار خلال السنوات الأربع الأخيرة، بإنحراف معياري 4. مليون دولار. افترض ان عملية التخلف عن سداد الديون ستبقى مستقرة في المستقبل القريب وأن توزيع إجمالي حجم التخلف عن رد الديون الربع سنوية يتبع توزيع طبيعي.

(أ) ماهو إحتمال أن يكون إجمالي حجم التخلف عن رد الديون في ربع معين من السنة لن يكون أكثر من 1.1 مليون دولار؟

(ب) ما هو إحتمال أن يكون إجمالي حجم التخلف عن رد الديون في الربع الحالي من السنة سيكون أكبر من 2 مليون دولار.

(جـ) ما هو إحتمال أن يكون إجمالي حجم التخلف عن رد الديون في ربع ما يتراوح بين 1.2و 2.2 مليون دولار.

(د) ما هي قيمة المبلغ الذي يجب على البنك أن يخصصه في الميزانية لمواجهة التخلفات عن رد الديون الربع سنوية، بحيث يكون إحتمال تعدي هذه القيمة هو 01..

الحل

دع المتغير العشوائي X يرمز إلى إجمالي حجم التخلف عن رد الديون في ربع ما. قيم مؤشرات التوزيع الطبيعي هنا هي: $\sigma=0.4, \mu=1.5$:

(أ) نبحث عن إحتمال أن إجمالي حجم الدين لن يزيد عن 1.1 مليون دولار، أي:

$P(X \leq 1.1) = F(1.1;1.5,.4)$

والإحتمال الناتج هو 1587. وقد تحدد كما يلي:

```
MTB  > cdf   1. 1;
SUBC > normal 1.5    .4.
     1.1000    0.1587
```

(ب) نبحث عن إحتمال أن X تأخذ قيماً أكبر من 2 مليون دولار، أي: $P(X>2)$ وبإستخدام قاعدة الحوادث المكملة، نجد أن:

$P(X>2)=1-P(X \leq 2)$

حيث $P(X \leq 2)$ تعطي القيمة الإحتمالية 8944. وقد تحددت كما يلي:

```
MTB  > cdf  2;
SUBC > normal 1.5     .4.
     2.000        0.8944
```

وكنتيجة لذلك، يكون الإحتمال المطلوب هو:

$P(X>2)=1-.8944=.1056$

(جـ) نبحث عن إحتمال: $P(1.2 \leq X \leq 2.2)$، بإستخدام الخاصية الثانية لدالة التوزيع التجميعية (انظر إلى نهاية الفصل ٣-٧) نجد أن:

$$P(1.2 \leq X \leq 2.2) = P(X \leq 2.2) - P(X \leq 1.2)$$

حيث: $P(X \leq 2.2)$، $P(X \leq 1.2)$ تعطي الإحتمالات 9599، 2266. على التوالي، وهي قد تحددت كما يلي:

```
MTB  > cdf    2.2;
SUBC > normal  1.5       .4.
     2.2000     .9599
MTB  > cdf   1.2;
SUBC > normal  1.5       .4.
     1.200         .2266
```

ويصبح الإحتمال المطلوب هو:

$P(1.2 \leq X \leq 2.2)=.9599-.2266=.7333$

(د) هنا نرغب في تحديد القيمة الجزئية x، بحيث يكون إحتمال أن تتعدى X القيمة الجزئية x هو 01. وبصورة مماثلة نجد أن:

$P(X \leq x)=.99$

القيمة الجزئية المقابلة لهذا الاحتمال هي 2.4305 مليون دولار، وقد تحددت كما يلي:

```
MTB  > invcdf  .99;
SUBC > normal  1.5       .4.
     0.9900       2.4305
```

تمارين:

(٤-٢٥) صف الملامح الأساسية للتوزيع الطبيعي.

(٤-٢٦) حدد معالم التوزيع الطبيعي واشرح معناها.

(٤-٢٧) اشرح لماذا تعتبر قيمة المتغير العشوائي الطبيعي التي تزيد عن ثلاثة إنحرافات معيارية عن المتوسط هي قيمة نادرة.

(٤-٢٨) ماذا يطلق على التوزيع الطبيعي الذي متوسطه صفر وإنحرافه المعياري واحد؟ اشرح لماذا يعد هذا التوزيع مهماً.

(٤-٢٩) اشرح لماذا يكون إحتمال أن يأخذ متغير عشوائي طبيعي قيمة معينة هو الصفر.

(٤-٣٠) اعتبر توزيع الدرجات الرقمية في أحد المناهج الإختيارية لطلاب قسم الإدارة. هل ترى أن هذا التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي؟ دعم إجابتك.

(٤-٣١) افترض أنك مدير مصنع ينتج كراسي ذات قاعدة دائرية. اعطي مثالاً لمتغير يمكن أن يتبع توزيع طبيعي في تلك العملية الإنتاجية.

(٤-٣٢) افترض أنك محلل استثمار. اعطي مثالاً عن متغير ترى أن له توزيع طبيعي في هذا السياق.

(٤-٣٣) افترض أنك تاجر جملة تورد للمطاعم بضاعة عليها طلب مستمر. اعطي مثالاً لمتغير تراه يتبع التوزيع الطبيعي في هذا السياق.

(٤-٣٤) بفرض أن Z متغير عشوائي طبيعي معياري، حدد الإحتمالات الآتية:

(a) $P(Z \leq -1.62)$ (b) $P(Z > .95)$
(c) $P(-1.42 \leq Z \leq .98)$ (d) $P(1.12 \leq Z \leq 2.84)$

(٤-٣٥) أعد التمرين (٤-٣٤) وإحسب الاحتمالات التالية:

(a) $P(-2.48 \leq Z \leq -.38)$ (b) $P(Z > -1.08)$
(c) $P(Z \leq 1.96)$ (d) $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96)$

(٤-٣٦) بفرض أن Xمتغير عشوائي طبيعي متوسطه 50 وإنحرافه المعياري 10. حدد الإحتمالات الآتية:

(a) $P(X < 40)$ (b) $P(X < 65)$ (c) $P(X > 55)$
(d) $P(X > 35)$ (e) $P(40 < X < 45)$ (f) $P(38 < X < 62)$

(٤-٣٧) بفرض أن X متغير عشوائي طبيعي متوسطه 200 وإنحرافه المعياري 20. حدد الإحتمالات الأتية:

(a) $P(185 < X < 210)$ (b) $P(215 < X < 250)$
(c) $P(X > 240)$ (d) $P(X > 178)$

(٤-٣٨) بفرض أن Z متغير عشوائي طبيعي معياري. أوجد القيم الجزيئية Z والتي تناظر الاحتمالات التالية:

(a) $P(Z < z)=.10$ (b) $P(Z < z)=.98$ (c) $P(Z < z)=.99$

(d) $P(Z < z)=.01$ (e) $P(Z < z)=.025$ (f) $P(Z < z)=.975$

(٤-٣٩) بفرض أن Z متغيرعشوائي طبيعي معياري. أوجد قيم Z التي تناظر الإحتمالات التالية:

(a) $P(Z > z)=.1515$ (b) $P(Z > z)=.6700$

(c) $P(Z < z)=.0571$ (d) $P(Z < z)=.9788$

(٤-٤٠) بفرض أن Z متغير عشوائي طبيعي متوسطه 10وإنحرافه المعياري 5. أوجد القيم الجزيئية x والتي تناظر الاحتمالات التالية:

(a) $P(X < x)=.10$ (b) $P((X < x)=.98$ (c) $P(X < x) =.99$

(d) $P(X < x)=.01$ (e) $P(X < x)=.025$ (f) $P(X < x) =.975$

(٤-٤١) بفرض أن Z متغير عشوائي طبيعي متوسطه 25- وإنحرافه المعياري 10 أوجد القيم x والتي تناظر الاحتمالات التالية:

(a) $P(X < x)=.1251$ (b) $P(X < x)= .9382$

(c) $P(X > x)=.3859$ (d) $P(X > x)= .8340$

(٤-٤٢) بفرض أن درجات إختبار الإحصاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 72وإنحراف معياري 12.

(أ) إذا كانت درجتك في هذا الإختبار هي 82، ما هي نسبة الدرجات التي تتعدى الدرجة التي حصلت عليها؟

(ب) إذا كانت درجة صديقك هي 62، ما هي نسبة الدرجات التي تقل عن هذه الدرجة؟

(٤-٤٣) إذا كانت قيمة الضريبة على الدخل الذي يتراوح بين 50,000, 40,000 دولار، يلائمها توزيع طبيعي بمتوسط 1200 دولار وإنحراف معياري 400 دولار. ما هو إحتمال أن تزيد الضريبة التي يدفعها موظف ما عن 2200 دولار؟

(٤-٤٤) إذا كان معدل العائد الشهري في أحد الأوراق المالية يلائمه توزيع طبيعي بمتوسط 1.5% وإنحراف معياري 0.95%. إذا كان لدى أحد المستثمرين في بداية شهر ما 10,000 دولار، ما هو إحتمال أنه في بداية الشهر يزيد هذا المبلغ ليصبح 10,300 دولار على الأقل إعتماداً على ذلك العائد الشهري؟

(٤-٤٥) بالإشارة إلى التمرين رقم (٤-٤٢)، نفرض أن أستاذ المادة قرر أن 10% فقط من أعلى الدرجات في هذا الإختبار تحقق التقدير A. ما هي أصغر درجة رقمية تحقق التقدير A في هذا الإختبار؟

(٤-٤٦) مطعمان للوجبات السريعة W,M، مبيعاتهما اليومية تتبع التوزيع الطبيعي. تبين من الخبرة السابقة أنه بالنسبة للمطعم M أن متوسط مبيعاته 5000$ بانحراف معياري 1200$، بينما للمطعم W كان المتوسط 4400$ بإنحراف معياري 1000$. في يوم معين كانت مبيعات المطعم M هي 6500$. ما هو حجم المبيعات التي يمكن أن يحققها المطعم W في هذا اليوم حتى تتوافق نسبياً مع مبيعات M؟

(٤-٤٧) حدد الربيعين الأول والثالث لأي توزيع طبيعي بدلالة وحدات من الانحراف المعياري تقع

أعلى أو أدني المتوسط. إستخدم هذه النتائج في تحديد الربيعين الأول والثالث لقيمة الضرائب في التمرين (٤-٤٣).

(٤-٤٨) حددالنسب المئوية 90th, 10th لأي توزيع طبيعي. استخدم هذه النتائج لتحديد النسب 90th, 10th لمعدل العائد الشهري في التمرين (٤-٤٤).

(٤-٤٩) بفرض أن قيمة المبيعات اليومية في أحد المحلات الشعبية يلائمة التوزيع الطبيعي بمتوسط 2500$ وإنحراف معياري 250$. في أحد الأيام كانت المبيعات 1500$ كيف يمكنك وصف مبيعات ذلك اليوم بوحدات نسبية؟

(٤-٤) التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين:

THE NORMAL DISTRIBUTION AS AN APPROXIMATION TO THE BINOMIAL DISTRIBUTION:

يمكن إستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين عندما تكون n كبيرة. بصفة عامة يكون التقريب مناسباً طالما أن $n\pi>5$, $n(1-\pi)\geq5$. كل هذا ينبع من الحقيقة التاريخية التي إكتشفت أن دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي ما هي إلا صورة نهائية لدالة إحتمال ذو الحدين عند قيم r الكبيرة. هذا يعني أنه عندما نسأل السؤال: ماذا يحدث لدالة إحتمال ذو الحدين عندما تصبح n كبيرة بدرجة كافية؟ تكون الإجابة أننا نصل إلى دالة كثافة إحتمال التوزيع الطبيعي.

في الماضي كان هذا التقريب ذو فائدة كبيرة لأنه يخفض الجهد الحسابي بصورة واضحة، ولكن مع شيوع الحاسبات الشخصية والبرامج الإحصائية المتطورة، أصبح التقريب الطبيعي لتوزيع ذو الحدين في هذه الأيام أقل أهمية. وسوف نوضح كيفية إستخدام التقريب الطبيعي في الفصول من الخامس إلى السابع عند الحديث عن الإستنتاج الإحصائي المتعلق بمعلمه توزيع ذو الحدين π.

بإختصار كيف يتم هذا التقريب؟ إعتبر إستقصاء ما يتم على 100 ناخب وفيه يسأل كل واحد عن مرشحه السياسي الذي يفضله (أو تفضله). نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الناخبين اللذين يفضلوا المرشح A. بفرض أن نسبة الناخبين (عادة مجهولة) الراغبين في إعطاء أصواتهم في هذه اللحظة، للمرشح A هي $\pi=.55$ عندئذ X يكون لها توزيع ذو الحدين بمتوسط $n\pi=(100)(.55)=55$ وإنحراف معياري $\sqrt{n\pi(1-\pi)}=\sqrt{(100)(.55)(.45)}=4.97$. لاحظ أنه طبقاً للإرشادات السابقة، فإن حجم العينة يعد كبيراً بدرجة كافية لكي يستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين بكفاءة عالية. لاحظ أن كل من عدد حالات النجاح المتوقعة $n\pi=55$ وعدد حالات الفشل المتوقعة $n(1-\pi)=45$ أكبر بكثير جداً من 5. والآن أي توزيع طبيعي يجب إستخدامه؟ هو ذلك التوزيع الطبيعي الذي يعطي تقريب جيد، أي ذلك التوزيع الذي له نفس المتوسط والإنحراف المعياري لتوزيع ذو الحدين، بمعنى آخر، يستخدم التوزيع الطبيعي الذي له المتوسط $\mu=55$ والإنحراف المعياري $\sigma=4.97$.

(٤-٥) عملية بواسون: THE POISSON PROCESS

على الرغم من أن توزيع ذو الحدين والتوزيع الطبيعي يمكن أن يعطيا مجالاً واسعاً للعديد من الظواهر العشوائية المتنوعة، إلا أنه يتبقى ظواهر أخرى هامة لا يلائمها التوزيع الطبيعي أو توزيع ذو الحدين. أحد الأمثلة على ذلك: مشاكل خط الإنتظار متمثلة في عدد العملاء اللذين يصلوا إلى مكان الخدمة خلال فترة زمنية محدودة، طول الفترة الزمنية المطلوبة لإنهاء خدمة عميل. مثال آخر،

مشاكل موثوقية (Reliability) الإنتاج مثل: طول الزمن الذي تتوقف فيه مرحلة معينة من العملية الإنتاجية.

إستخدام التوزيعات الإحتمالية لوصف مشاكل خط الإنتظار وموثوقية الإنتاج هي المفتاح الأساسي لتحسين تلك العمليات. في هذا الفصل نقدم عملية بواسون **Poisson Process** وهي عملية إحصائية ينشأ عنها توزيعين إحتماليين يمثلان نماذج نافعة لكل من خط الإنتظار وموثوقية الإنتاج. هذه التوزيعات تعرف باسم: توزيع بواسون **Poisson**، التوزيع الأسي **exponential**. توزيع بواسون يمثل متغير عشوائي متقطع بينما الأسي يمثل متغير عشوائي متصل.

الظاهرة العشوائية التي تعطي نواتج عبر الزمن تسمى عملية عشوائية **Random process**. (الحدوث العشوائي يمكن أن يحدث أيضاً عبر المساحة مثل عيوب في القماش، أو عبر الحجم مثل عدم نقاء الماء. لكن معظم التطبيقات تحدث في سياق البعد الزمني). عملية بواسون **Poisson Process** هي عملية عشوائية تصف كثير من الظواهر الإدارية والتي تشترك في صفات أساسية معينة. أهم التطبيقات لعملية بواسون تشمل مشاكل خط الإنتظار مثل: طول الفترة الزمنية التي ينتظرها العميل للحصول على خدمة، مشاكل الموثوقية مثل طول الفترة الزمنية التي سوف يعمل فيها جزء اليكتروني قبل أن يتعطل.

ويمكن عرض خصائص عملية بواسون كما يلي:

١- عدد مرات الحدوث التي تقع في فترة زمنية معينة مستقلة عن عدد مرات الحدوث التي تقع في فترة سابقة لهذه الفترة.

٢- إحتمال الحدوث الذي يقع في فترة زمنية قصيرة يتناسب تقريباً مع طول الفترة.

٣- إحتمال الحدوث الذي يقع مرتين أو أكثر في فترة زمنية قصيرة جداً هو تقريباً الصفر.

هذه الخصائص تؤدي إلى ظهور كل من توزيعي بواسون والأسي. في عملية بواسون، عدد مرات الحدوث التي تقع في فترة زمنية ثابتة يكون لها توزيع بواسون، بينما طول الفترة الزمنية بين عدد مرات الحدوث المتتالية يكون لها توزيع أسي. وهكذا، المتغير العشوائي البواسوني يمثل عدد مرات الحدوث وهو متغير متقطع بينما المتغير العشوائي الأسي يمثل طول الزمن بين عدد مرات الحدوث المتتالية وهو متغير متصل أو مستمر.

(٤-٥-١) توزيع بواسون The Poisson Distribution

توزيع بواسون* هو توزيع إحتمالي لمتغير متقطع وهو توزيع مفيد بدرجة كبيرة جداً. المتغير العشوائي البواسوني يمثل عدد مرات حدوث مستقلة لظاهرة ما تقع بمعدل متوسط ثابت عبر الزمن (أو الفراغ أو الحجم) وفكرة ثبات المعدل المتوسط تنبع من الخاصية الثانية لعملية بواسون، وهي أن إحتمال حدوث حادث ما في فترة زمنية يتناسب مع طول هذه الفترة، فمثلاً بفرض أن معدل متوسط وصول العملاء إلى بنك ما هو عميل كل 10ثوان، هذا يعني أن معدل متوسط الوصول هو أيضاً إثنين كل 20 ثانية، أربعة كل 40 ثانية، ستة كل دقيقة، 360 كل ساعة... إلخ. هذا هو معنى أن المعدل المتوسط يكون ثابتاً عبر الزمن. أما إذا كان المعدل المتوسط الذي تقع به الحوادث عبر الزمن هو معدل متغير، فإن توزيع بواسون يكون غير مناسباً ولا يجب إستخدامه.

* نسبة إلى سيمون بواسون، وهو عالم رياضيات فرنسي ظهر في القرن التاسع عشر.

كنظرة عامة نجد أن كثير من الظواهر العشوائية تحدث مستقلة بمعدل متوسط ثابت عبر الزمن أو الحجم أو الفراغ وفيما يلي بعض الأمثلة على ذلك.

* عدد العملاء اللذين يصلوا إلى مكان الخدمة في فترة زمنية محددة.
* عدد مكونات الكومبيوتر التي تتعطل في فترة زمنية محددة.
* عدد القضايا التي ترفعها شركات التأمين للمطالبة بأقساط التأمين خلال فترة زمنية معينة.
* عدد البكتريا التي تتوالد في مزرعة معينة.
* عدد كرات الدم الحمراء في حجم معين من دم شخص ما.

وقد إستخدم توزيع بواسون على نطاق واسع لنمذجة ظواهر خط الإنتظار، مثل تلك التي تقابلنا في محلات الخدمة، حيث من المعتاد أن ننتظر الخدمة (أحياناً في عدة محطات) قبل أن نحصل عليها.

دالة إحتمال بواسون: The poisson probability function

فيما يلي دالة الإحتمال لتوزيع بواسون:

دالة إحتمال بواسون

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات حدوث مستقلة عن بعضها البعض تقع بمعدل متوسط ثابت عبر الزمن، الفراغ أو الحجم، فإن X يكون لها توزيع بواسون له دالة الإحتمال:

$$P(X=x) = P(x\,;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \textbf{(4.15)}$$

$x = 0 , 1 , 2 , \ldots\ldots ; \lambda > 0$ where $e = 2.71828 \ldots\ldots$

من الصيغة (4.15) يلاحظ أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي البواسوني هي الصفر والأرقام الصحيحة الموجبة. يلاحظ أيضا أن توزيع بواسون يتصف بمعلمه واحدة يرمز لها بالحرف اليوناني λ. المعلمة λ تمثل متوسط عدد مرات الحدوث لكل وحدة زمنية، فراغ أو الحجم. فمثلا، إذا كان العملاء يصلون إلى بنك ما مستقلين عن بعضهم البعض بمعدل متوسط 1.2 عميل كل دقيقة ما بين السلعة 9 إلى الساعة 10 قبل الظهر، فإن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات وصول العملاء في فترة دقيقة واحدة بمعدل $\lambda = 1.2$ ودالة كثافة الاحتمال تكون:

$$P(x;1.2) = \frac{(1.2)^x e^{-1.2}}{x!} \quad , \quad x = 0 , 1 , 2 , \ldots\ldots$$

وهكذا، فإن كل قيمة للمعلمة λ تحدد توزيع بواسون.

ولتوضيح عملية تحديد الاحتمالات في توزيع بواسون، دعنا نستمر مع مثال البنك. باستخدام البرنامج الاحصائي ميني تاب والامر PDF مع الامر الفرعي Poisson 1.2 نحصل على الاحتمالات التالية:

```
MTB  >  pdf ;
SuBC >  poisson 1.2
POISSON WITH MEAN = 1.200
K                P(X=K)
0                0.3012
```

```
1        0.3614
2        0.2169
3        00867
4        0.0260
5        0.0062
6        0.0012
7        0.0002
8        0.0000
```

يلاحظ أن هذه الإحتمالات تتناقص بسرعة كلما زادت قيم المتغير العشوائي X (عدد مرات وصول العملاء في دقيقة واحدة). وعلى الرغم من أن الاحتمالات لاتساوي الصفر تماما عندما تأخذ X قيما أكبر من 8، إلا انها تقترب من الصفر بدرجة كافية عند نقطة يعتبرها برنامج ميني تاب غير ضرورية لأعطائها.

احتمالات بواسون التجميعية :

يمكن تحديد الاحتمالات التجميعية للمتغير العشوائي البواسوني بتجميع الاحتمالات المفردة والمشتقة من دالة احتمال بواسون. للتوضيح، نفرض أننا نرغب في تحديد احتمال أن يصل إلى البنك اثنين على الأكثر من العملاء في فترة دقيقة واحدة. احتمال أن X تأخذ قيما صحيحة أقل من أو تساوي 2 هي:

$$P(X\leq 2)= P(0 ; 1.2)+P(1 ; 1.2)+P(2 ; 1.2)= .3014 + .3614 + .2169 =.8795 .$$

بالمثل، احتمال وصول ثلاثة عملاء على الأقل خلال دقيقة واحدة هو:

$$P(X\geq 3) =1-P(X\leq 2)=1-.8795=.1205.$$

بصفة عامة، احتمال أن المتغير العشوائي البواسوني X يأخذ قيما صحيحة أقل من أو تساوى قيمة معينة x مبين في نهاية الفقرة التالية.

مرة أخرى، يمكن أن يستخدم برنامج ميني تاب بسهولة لتحديد احتمالات بواسون التجميعية، ففي مثال البنك وحيث $\lambda = 1.2$ نستخدم الامر CDF بجانب الأمر الفرعي POISSON 1.2 للحصول على الإحتمالات التجميعية التالية.

```
MTB  > cdf  ;
SUBC > poisson 1.2
POISSON WITH MEAN = 1.200
k     P(X LESS OR =K)
0              0.3012
1              0.6626
2              0.8795
3              0.9662
4              0.9923
5              0.9985
6              0.9997
7              1.000
```

دالة الاحتمال ألتجميعية لبواسون

$$P(X\leq x)= F(x ;\lambda)= P(0 ;\lambda)+P(1 ;\lambda)......+P(x ;\lambda) \quad (4.16)$$

حيث $F(x ; \lambda)$ تشير إلى الإحتمالات التجميعية لقيم X وحتى نصل إلى قيمة معينة x (بما فيها قيمة x أيضاً)

استخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

المثال التالي يوضح إستخدامات أكثر لأوامر برنامج ميني تاب CDF, PDF وذلك لتحديد الإحتمالات الخاصة بتوزيع بواسون.

مثال (٤-١١)

بفرض أن عدد العيوب المشاهدة في نوع معين من السيارات تتبع توزيع بواسون بمتوسط عدد عيوب لكل سيارة هو $\lambda=6$. حدد الاحتمالات التالية لسيارة من هذا النوع:

(أ) إحتمال مشاهدة 8 عيوب بالضبط.

(ب) إحتمال مشاهدة 10 عيوب على الأكثر.

(جـ) إحتمال مشاهدة عدداً من العيوب بين 3و11 (وشاملة العددين 3 و 11).

الحل

بفرض أن المتغير العشوائي X يرمز إلى عدد العيوب المشاهدة في سيارة ما من هذا النوع. قيمة معلمه بواسون هي $\lambda=6$.

(أ) نبحث عن إحتمال أن X تأخذ القيمة 8، هذا الإحتمال [P(X=8)=.1033]. تم تحديده كما يلي:

```
MTB > pdf8;
SUBC> poisson 6.
      K        P(X=K)
    8.00        0.1033
```

(ب) نبحث عن إحتمال أن x تأخذ قيماً صحيحة وحتى 10 (بما فيها 10). هذا الإحتمال [P(X≤10)=0.9574] تم تحديده كما يلي:

```
MTB > cdf 10;
SUBC> poisson 6.
      K       P(X LESS OR=K)
   10.00         0.9574
```

(جـ) إحتمال أن X تأخذ قيماً صحيحة في الفترة من 3 إلى 11 أيضاً هو:

$$P(3 \le X \le 11)= P(X \le 11)-P(X \le 2)$$

والإحتمالات التجميعية P(X≤2), P(X≤11) يمكن تحديدها كما يلي:

```
MTB > cdf  11;
SUBC> PIOSSON 6.
      K           P(X   Less OR =K)
   11.00                  0.9799
MTB > cdf  2;
SUBC> poisson 6.
      K                P(X LESS OR = K)
    2.00                  0.0620
```

ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(3 \le X \le 11) = .9799 - .0620 = .9179$$

جدول بواسون: Poisson Tables

في جدول I من ملاحق الكتاب تظهر قيم دالة توزيع بواسون التجميعية (الصيغة 4.16) عند قيم مختارة لكل من x ومعلمه بواسون λ. تكوين هذا الجدول مماثل لتكوين جدول A في توزيع ذو الحدين. ويمكن استخدام هذا الجدول ايضا في تحديد الاحتمالات المفردة، حيث أن المتغير العشوائي البواسوني هو ذو قيم صحيحة، بمعنى: احتمال أن المتغير العشوائي البواسوني X يأخذ قيمة معينة x هو:

$$P(X = x) = P(x; \lambda) = P(X \le x) - P(X \le x-1) \qquad \textbf{(4.17)}$$

ولتوضيح كيفية استخدام جدول I، نفرض أن $\lambda = 2.5$، احتمال أن X تأخذ قيما أقل من 3 هو:

$$P(X < 3) = P(X \le 2) = .5438$$

واحتمال أن X تأخذ قيما لا تقل عن 4 هو:

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3) = 1 - .7576 = .2424$$

واحتمال أن X تأخذ القيمة 2 هو:

$$P(X = 2) = P(2; 2.5) = P(X \le 2) - P(X \le 1) = .5438 - .2873 = .2565$$

مثال (٤-١٢)

بفرض أن عدد المكالمات التليفونية التي تأتي إلى مكتب سفريات أثناء اليوم هي متغير عشوائي بواسوني، حيث تصل في المتوسط 90 مكالمة كل ساعة.

(أ) ما هو احتمال وصول ثلاث مكالمات على الأقل في دقيقة واحدة.

(ب) ما هو احتمال وصول ثلاث مكالمات بالضبط في دقيقة واحدة.

الحل

نفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد المكالمات التي تصل في دقيقة واحدة. وحيث أن الفترة الزمنية التي نهتم بها هي واحد دقيقة، فإننا يجب صياغة معلمة بواسون كمعدل متوسط للحدوث كل دقيقة، وحيث أن المعدل المتوسط للمكالمات ثابت عند 90 مكالمة كل ساعة، فإن المعدل المتوسط كل دقيقة يجب أن يكون $\frac{90}{60} = 1.5$ مكالمة، وبالتالي يكون المتغير العشوائي X له توزيع بواسون بمعدل متوسط $\lambda = 1.5$ مكالمة كل دقيقة.

(أ) نبحث في إحتمال أن عدد المكالمات التي تصل في دقيقة واحدة هو 3 أو أكثر ويكون هذا الاحتمال عبارة عن:

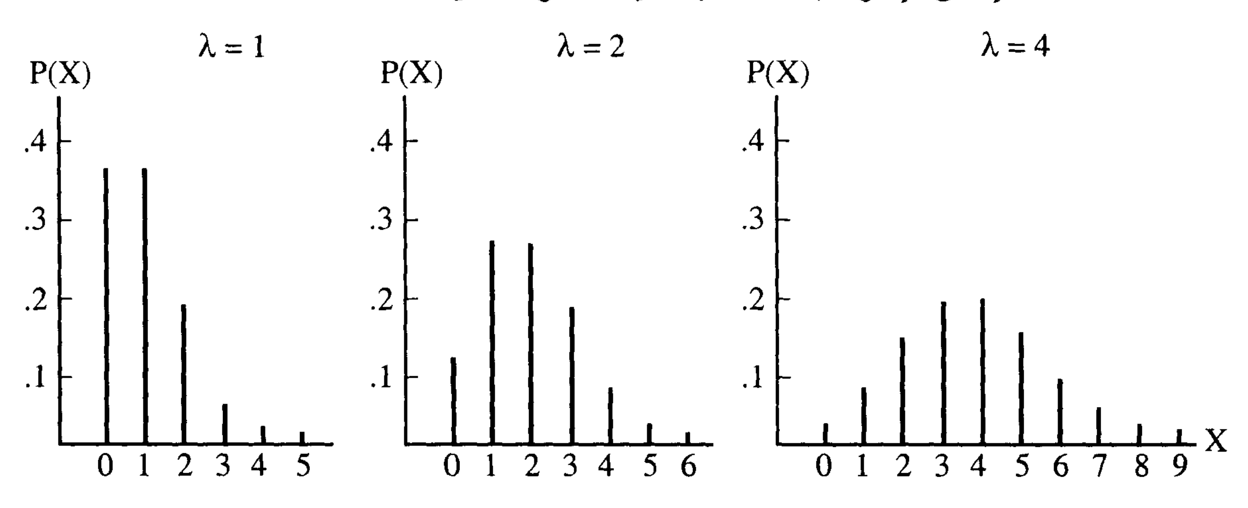
$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - .8088 = .1912.$$

(ب) باستخدام الصيغة (4.17) يكون احتمال وصول 3 مكالمات بالضبط في دقيقة واحدة هو:

$$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) = .9344 - .8088 = .1256.$$

تأثير قيمة λ :

كما وضحنا من قبل، فإن الاحتمالات المفردة لتوزيع بواسون تتناقص بسرعة مع زيادة قيم المتغير العشوائي وكنتيجة لذلك فتوزيع بواسون هو دائما موجب الإلتواء لأي قيمة لـλ. في شكل (٤-١٤) تم رسم دالة احتمال توزيع بواسون عن : $\lambda = 1, 2, 4$. وعلى الرغم من وضوح الإلتواء الموجب في الحالات الثلاث، إلا أن الإلتواء يتضائل شيئا فشيئا كلما زادت قيمة λ.



شكل (٤-١٤) : دالة احتمال بواسون عند قيم مختلفة لـ λ

تلخيص توزيع بواسون: القيمة المتوقعة والانحراف المعياري:

حيث أن المعلمه λ عرفت على أنها متوسط عدد مرات الحدوث عبر الزمن أو الفراغ أو الحجم، فإنه يجب ألا نفاجيء بأن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي البواسوني X هي في الواقع λ، (وهذه حقيقة طبقا لتعريف القيمة المتوقعة). والمثير للإنتباه، الخاصية التي ينفرد بها توزيع بواسون، وهي أن تباين X هو أيضاλ ، بمعنى أنه للمتغير العشوائي البواسوني X

$$E(X) = \lambda \;;\; Var(X) = \lambda \;,\; SD(x) = \sqrt{\lambda} \qquad \textbf{(4.18)}$$

مثـــال (٤-١٣)

بفرض أن الحوادث عند تقاطع مزدحم تحدث عشوائيا ومستقلة عن بعضها بمعدل متوسط حادثين كل أسبوع.

(أ) ما هو احتمال أن أربعة حوادث بالضبط تقع في التقاطع هذا الأسبوع؟

(ب) حدد احتمال أن عدد الحوادث التي تقع هذا الأسبوع سوف تكون داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

الحـــل

بفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الحوادث التي تقع هذا الأسبوع، بالتالي فإن X يكون متغير عشوائي بواسوني بمعلمه $\lambda = 2$.

(أ) باستخدام الصيغة (4.17)، يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X=4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) = .9473 - .8571 = .0902$$

(ب) حيث أن $\lambda=2$، فإن: $E(X) = 2$ و $Var(X) = 2$، $SD(X) = \sqrt{2} = 1.4142$. فترة القيم التي تقع داخل 2 إنحراف معياري من المتوسط:

$$E(X) \pm 2\,SD(X) = 2 \pm (2)(1.4142) = 2 \pm 2.83 = (-.83, 4.83)$$

وحيث أن X لا يمكن أن تأخذ قيما سالبة، فالقيم الممكنة التي تشملها هذه الفترة هي:

صفر، 1، 2، 3، 4 ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو: $P(X \leq 4) = .9473$

تقريب بواسون إلى توزيع ذو الحدين:

يعطي توزيع بواسون تقريباً دقيقاً لتوزيع ذو الحدين في الحالات التي تكون فيها n كبيرة و π صغيرة جداً. والقاعدة الإرشادية لاستخدام هذا التقريب هي $(n/\pi) \geq 500$. في مثل هذه الحالات، ينفذ هذا التقريب بوضع $\lambda = n\pi$ ثم إستخدام دالة إحتمال بواسون. فمثلاً الإحتمالات في توزيع ذو الحدين عند $\pi = .05, n=200$ قريبة جداً من الإحتمالات في توزيع البواسون بمعلمه $\lambda=(200)(.05)=10$. هذا التقريب مصدرة إثبات رياضي أوضح أن دالة إحتمال بواسون هي صورة نهائية لدالة إحتمال ذو الحدين عندما تزيد n إلى مالا نهاية وتتناقص π تجاه الصفر. بهذه الطريقة فإن حاصل الضرب $n\pi$ يظل ثابتاً. والهدف من إستخدام هذا التقريب هو تخفيض الجهد الحسابي، خاصة في الحالات التي لا يتاح فيها إستخدام جدول ذو الحدين. ومع ذلك فتقريب بواسون أصبح هذه الأيام أقل أهمية مقارنة بالماضي بعد أن إنتشرت البرامج الأحصائية الجاهزة وأصبحت في متناول الجميع.

(٤-٥-٢) التوزيع الأسي: The Exponential Distribution

تأمل عملية بواسون والتي فيها عدد مرات الحدوث المستقلة تظهر بمعدل متوسط ثابت قدره λ لكل وحدة زمنية. هنا طول الفترة الزمنية بين مرات الحدوث المتعاقبة يمكن إعتبارها متغير عشوائي مستمر لها توزيع أسي بمتوسط زمني يساوي $(1/\lambda)$. كنتيجة لهذه الفكرة الأساسية، إستخدم التوزيع الأسي ليكون نموذجا لأطوال الزمن العشوائي كما في الأمثلة:

* الزمن بين حالتي وصول متتاليتين إلى مكان خدمة.
* الزمن بين حالات التعطل المفاجئ لآلة في مصنع ما.
* الزمن بين حالتي تصادم في تقاطع مزدحم.
* أزمنة الخدمة في البنوك، في السوبر ماركت، في محلات اصلاح الملابس، . . .، إلخ.
* أزمنة الحياة للأجزاء الميكانيكية والكهربائية مثل: البطاريات، المصابيح، كروت الكمبيوتر.

دالة كثافة احتمال التوزيع الأسي:

يمكن ايضاح دالة كثافة احتمال التوزيع الأسي على النحو التالي:

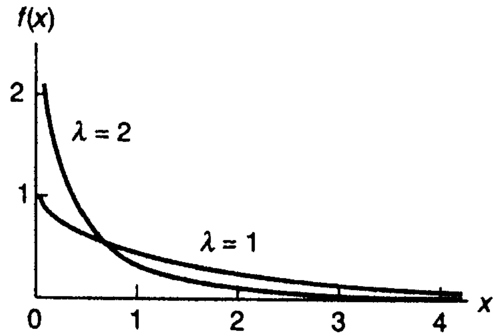
دالة كثافة احتمال التوزيع الأسي

يكون المتغير العشوائي المتصل X له توزيع أسي إذا كانت دالة كثافة الإحتمال له على الصورة:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \; x > 0 \; , \; \lambda > 0 \qquad (4.19)$$

حيث $e = 2.71828.........$

من الصيغة (4.19) يلاحظ ان المتغير العشوائي الأسي يأخذ قيما موجبة فقط. يلاحظ أيضا أن معلمه التوزيع الأسي هيλ. وكما في التوزيعات الاخرى، نجد أنه لكل قيمة تأخذها λ يكون هناك توزيع أسي وحيد. في شكل (٤-١٥) رسمت دالة كثافة الإحتمال الأسي عند قيمتين للمعلمه λ. ويلاحظ بوضوح أن التوزيع الأسي ملتويا إلى اليمين لكلا القيمتين من قيم λ ويظل هذا الإلتواء متحققا لجميع قيم λ. وكما سنرى الآن، هذا النوع من الإلتواء يوحي بأن اغلبية القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X سوف تكون أقل من متوسط قيم X وهي حقيقة تختلف بوضوح عما كنا نشاهده في التوزيع الطبيعي المتماثل.



شكل (٤-١٥) : دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الأسي عند قيمتين للمعلمه λ

ومعنى المعلمه λ هو أساسا نفس معنى معلمه توزيع بواسون، أي ان λ تمثل المعدل المتوسط الذي تقع به الحوادث العشوائية عبر الزمن. فمثلا تأمل طول الزمن بين الأعطال المفاجئة للآله في مصنع ما. إذا كانت λ=2 فإن المعدل المتوسط لحدوث العطل المفاجيء هو 2 عطل في كل وحدة زمنية. فإذا كانت الوحدة الزمنية مثلا 8 ساعات، فإنه في المتوسط نجد 2 عطل مفاجيء كل 8 ساعات وهذا يعني أن متوسط طول الزمن بين الأعطال المفاجئة هو 1/λ =1/2 من فترة الـ 8 ساعات أي 4 ساعات وبالتالي تكون القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي الأسي على الصورة:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad (4.20)$$

نضف إلى ذلك أن تباين X يكون:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (4.21)$$

ويكون الانحراف المعياري:

$$SD(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad (4.22)$$

لذلك، في التوزيع الأسي نجد أن المتوسط له نفس قيمة الإنحراف المعياري.

مثال (٤-١٤)

بفرض أن المعدل المتوسط الذي تصل به السيارات إلى محطة غسيل السيارات هو 10 سيارة كل ساعة. إذا افترضنا أن الزمن بين وصول كل سيارتين متتاليتين يلائمه التوزيع الأسي. حدد متوسط الزمن بين وصول السيارات وكذالك الفترة الزمنية خلال وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

الحـــل

لدينا معلمه التوزيع الأسي $\lambda=10$ وبالتالي فإن متوسط الزمن بين وصول سيارتين متتاليتين هو $E(X)=1/10$ من الساعة أي يساوي 6 دقائق . من الصيغة (4.22)، الإنحراف المعياري هو أيضا 6 دقائق. الفترة الزمنية التي تقع داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط هي:

$$E(X) \pm 2SD(X) = 6 \pm 2(6) = 6 \pm 12 = (-6,18)$$

وحيث أن المتغير العشوائي الأسي يأخذ قيما موجبة فقط، فإن الفترة الزمنية المطلوبة هي (صفر و 18) دقيقة.

من المثال (٤-١٤) يلاحظ ما يلي: حيث ان المتوسط يساوي الإنحراف المعياري، فإن المتغير العشوائي الأسي لا يمكن أن يأخذ قيما تقل عن واحد انحراف معياري ادنى المتوسط. ولكن من الممكن لهذا المتغير العشوائي أن يأخذ قيما بأي عدد من الإنحرافات المعيارية اعلى المتوسط ويوضح تلك الخاصية الإلتواء الموجب الشديد للتوزيع الأسي.

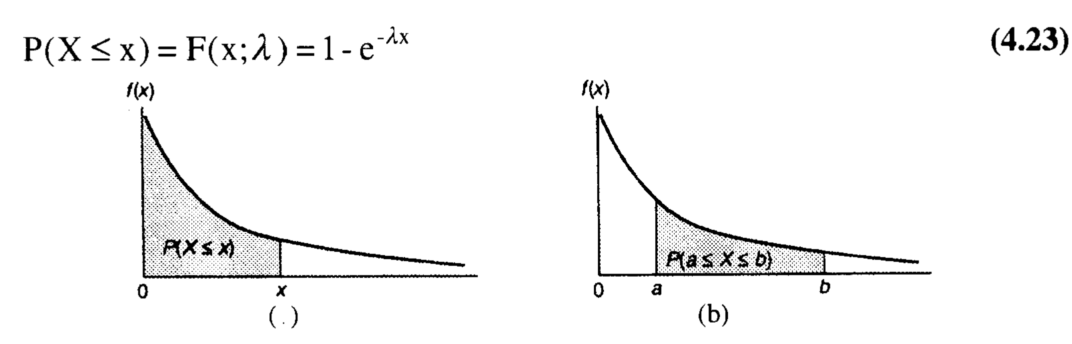
دالة التوزيع التجميعية:

حيث أن المتغير العشوائي الأسي هو متغير مستمر، يصبح اهتمامنا منصبا على فترة احتمالات وإلى هذا الحد نحتاج إلى دالة التوزيع التجميعية. احتمال أن المتغير العشوائي الأسي X يأخذ قيما أقل من أو تساوي قيمة معينة x معطي بدالة التوزيع التجميعية التالية:

$$P(X \le x) = F(x ; \lambda)$$

وكما وضحنا من قبل، فإن $F(x ;\lambda)$ تمثل جزء من المساحة تحت الشكل البياني لدالة كثافة احتمال التوزيع الأسي والمحددة من اليمين بالقيمة x، كما هو موضح في شكل (٤-١٦ أ). من السهل نسبيا التعامل رياضيا مع دالة التوزيع التجميعية $F(x ; \lambda)$ وهذه الدالة موضحة بالصيغة التالية:

$$P(X \le x) = F(x;\lambda) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (4.23)$$



شكل (٤-١٦) : المساحات المناظرة لفترة احتمالات في التوزيع الأسي

باستخدام الصيغة (4.23) وقاعدة الاحتمال للحوادث المكملة، نجد أن:

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x} \qquad (4.24)$$

وهذا يعني أن احتمال أن يتعدى طول الزمن قيمة معينة x هو $e^{-\lambda x}$. وكما سنرى لاحقا أهمية هذه الملاحظة عند الحديث عن أهمية الموثوقية للمكونات الميكانيكية أو الكهربائية.

احتمال أن X تأخذ قيما في الفترة من a إلى b يتحدد بالصيغة التالية: (انظر إلى الصيغة (3.5) في الفصل الثالث)

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) &= P(X \le b) - P(X \le a) \\ &= (1-e^{-\lambda b})-(1-e^{-\lambda}\ ) \\ &= e^{-\lambda}\ \ -e^{-\lambda b} \end{aligned} \qquad (4.25)$$

وهذه الفترة الإحتمالية موضحة في شكل (٤–١٦ ب).

مثال (٤–١٥)

بفرض أن طول زمن المكالمة التليفونية في بعض الأعمال الأدارية يلائمها التوزيع الأسي، فإذا كان متوسط طول الزمن هو 4 دقائق، حدد الإحتمالات التالية:

(أ) طول المكالمة لن يكون اكثر من 4 دقائق.

(ب) طول المكالمة سوف يكون بين 6,2 دقائق.

(ج) طول المكالمة سوف يكون أكثر من 8دقائق.

الحل

نفرض أن المتغيرالعشوائي X يمثل طول المكالمة التليفونية في تلك الأعمال الأدارية، وحيث ان القيمة المتوقعة لـX معلومة وهي 4 دقائق يمكن استخدام الصيغة (4.20) لكي نحصل على :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4 \qquad ,\text{then} \qquad \lambda = \frac{1}{4}$$

(أ) لتحديد إحتمال أن X تأخذ قيما أقل من أو تساوي 4 دقائق، تستخدم الصيغة (4.23) ، حيث x=4 أي أن :

$$P(X \le 4) = 1-e^{-(1/4)(4)} = 1-e^{-1} = 1-.3679 = .6321$$

يلاحظ هنا أن 6321. تمثل احتمال أن طول المكالمة التليفونية لن يكون أكثر من متوسط طول المكالمة وهو 4 دقائق. ينتج عن هذا أن 6321. هو احتمال أي متغير عشوائي أسي بأخذ قيماً أقل من أو تساوى متوسطه بغض النظر عن قيمة λ . لذلك فإن ثلثي قيم أي متغير عشوائي أسي تقريباً سوف تكون أقل من القيمة المتوسطة.

(ب) الإحتمال المطلوب هنا يتحدد بإستخدام الصيغة (4.25)، حيث b=6, a=2 أي:

$$\begin{aligned} P(2 \le X \le 6) &= e^{-(1/4)(2)}-e^{-(1/4)(6)} = e^{-.5}-e^{-1.5} \\ &= .6065-.2231 = .3834 \end{aligned}$$

(جـ) الإحتمال المطلوب هنا يتحدد بإستخدام الصيغة (4.24)، حيث x=8

$$P(X > 8) = e^{-(1/4)(8)} = e^{-2} = .1353$$

إستخدام الحاسب الآلي : Using the Computer

يمكن استخدام أمر CDF في برنامج ميني تاب بجانب الأمر الفرعى EXPO لتحديد احتمالات فترة لتوزيع أسي. في الأمر الفرعى EXPO نعرف المتوسط للتوزيع الأسي. باستخدام مثال (٤-١٥) يمكن تحديد الاحتمالات المطلوبة على النحو التالي:

(أ)

```
MTB > cdf 4 ;
SUBC > expo 4.
     4.000      0.6321
```

(ب) الإحتمالات $P(X \leq 2), P(X \leq 6)$ تتحدد على النحو التالي:

```
MTB  > cdf 6 ;
SUBC > expo  4,
     6.0000     0.7769
MTB  > cdf 2 ;
SUBC > expo  4.
     2.000      0.3935
```

$\therefore P(2 \leq X \leq 6)=.7769-.3935=.3834$

(جـ) احتمال الحدث المكمل $P(X \leq 8)$ يتحدد كما يلي:

```
MTB  > cdf 8;
SUBC > expo 4.
     8,000     0.8647
```

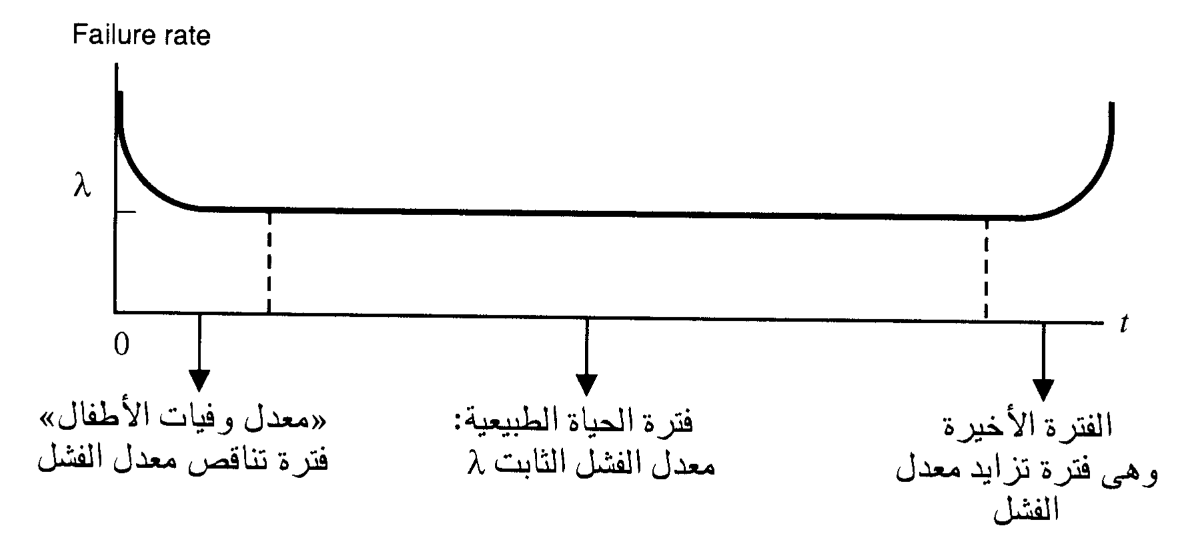
$P(X > 8)=1-.8647=.1353$

(٤-٥-٣) دراسة الموثوقية باستخدام التوزيع الأسي:

Reliability Considerations Using the Exponential Distribution

تختص مشكلة الموثوقية بتقدير طول الحياة لمكون أو نظام من المكونات، والرؤية الإحصائية لمثل هذه المشكلة هي التعرف أساسا على موضوعين: (١) التوزيع الإحتمالي الذي يلائم زمن الفشل. (2) دالة الموثوقية **reliability function** . ودواله الموثوقية عند الزمن t هي احتمال أن طول الحياة للمكون أو للنظام سوف يتعدى قيمة معينة t.

ولقد استخدم التوزيع الأسي بكثرة كنموذج لزمن الفشل. وحيث أن التوزيع الأسي ينشأ من عملية بواسون، فإن استخدام هذا التوزيع في سياق الكلام عن مشاكل زمن الفشل يدل ضمنيا على أن متوسط معدل حدوث الفشل هو مقدار ثابت عبر الزمن. في كثير من الحالات هناك ثلاث صور واضحة للموثوقية: (١)"وفيات الأطفال"، حيث توجد فترة بداية ذات معدل فشل عالي تنخفض كلما استبعدت المكونات المعيبة. (٢) فترة حياة طبيعية، يكون خلالها معدل الفشل ثابتا. (٣) فترة استمرار، خلالها يتزايد معدل الفشل كلما تعدت المكونات أزمنة الحياة والتي صممت لتحقيقها. ينشأ عن ذلك ما يعرف بأسم "منحنى باثتوب (بانيو) للموثوقية" **bathtub curve** وهو الموضح في شكل (٤-١٧).



شكل(٤-١٧) : منحنى باثتوب الموثوقية

ثبات معدل الفشل أثناء الحياة الطبيعية، يعني أن احتمال فشل المكون أو النظام أثناء فترة معينة من الزمن يعتمد فقط على طول هذه الفترة وليس على فترة عمل المكون نفسه. معدلات الفشل العالية في بداية دورة الحياة غالبا ما يمكن تجنبها باختبارات مبدئية مكثفة لاستبعاد العيوب(هذا التدريب يسمى "burn- in") أما في نهاية دورة الحياة فيتم ذلك بإحلال المكونات قبل بداية الاستمرار. تحديد معدلات الفشل أثناء الحياة الطبيعية هي أساس التخطيط لرفع جودة المنتج وإرضاء العميل بالإضافة إلى عملية اتخاذ القرارات فيما يتعلق بالضمانات، تكاليف الخدمة، مستويات القوة البشرية اللازمة للخدمة إلى غير ذلك من القرارات.

الحجة من استخدام التوزيع الأسي ليلائم أطوال الزمن العشوائية في مشاكل صفوف الانتظار تماثل وتناظر الحجة من استخدامه ليلائم أطوال الحياة في مشاكل الموثوقية. بمعنى، إذا كان مركز الخدمة في حالة تشغيل بدرجة تكفي لأن يتحقق شرط الاستقرار، فإن احتمال اكتمال الخدمة في فترة زمنية محددة من المكن أن يعتمد على طول هذه الفترة وليس على طول الفترة التي اكتملت فيها الخدمة سابقا. بالمثل، إحتمال أن يصل زبون إلى مركز الخدمة في فترة زمنية معينة، من المكن أن يعتمد على طول هذه الفترة وليس على طول الفترة السابقة لوصول زبون آخر. تحليل صفوف الانتظار اعتمادا على توزيعي بواسون والأسي يمكن الإداريين من التخطيط السليم لعدد مراكز الخدمة في البنوك، مطاعم الوجبات السريعة، محطات البنزين، خدمة الاستعلامات عن التليفونات، عند مراجعة حسابات الزبائن في المحلات التجارية الكبرى إلى غير ذلك من العمليات.

دالة الموثوقية اعتمادا على التوزيع الأسي من السهل تحديدها. دع المتغير العشوائي T يمثل طول حياة مكون ما أو نظام. إذا كانت دالة كثافة الاحتمال هي الأسي بالمعلمة λ، فإن دالة الموثوقية للمكون عند الزمن t، ويرمز لها بالرمز R(t)، هي احتمال أن طول حياة المكون يتعدى الزمن t وتعطي بالصورة التالية:

$$R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t} \qquad (4.26)$$

مثال (٤-١٦)

بفرض أن زمن حياة التشغيل لضاغط الهواء في المكيفات (الكومبريسور) يلائمه التوزيع الأسي بمتوسط زمن حياة 15,000 ساعة.

(أ) حدد موثوقية ضاغط الهواء عند t=20,000 ساعة.

(ب) حدد زمن التشغيل t بحيث تكون موثوقية ضاغط الهواء خارج هذا الزمن هي 0.1.

(جـ) حدد الزمن الوسيط لحياة هذا النوع من ضاغط الهواء.

الحل

بفرض أن المتغير العشوائي T يرمز إلى طول مدة الحياة لهذا النوع من ضاغط الهواء، وحيث أن :

$$E(T)= 1/\lambda =15,000 \qquad ,\text{then } \lambda= \frac{1}{15,000}$$

(أ) باستخدام الصيغة (4.26)، الموثوقية عند t= 20,000 ساعة تحدد كما يلي:

$$R\ (20,000) =P(T >20,000)=e^{-(1/15,000)(20,000)} =e^{-1.3333}=.2636$$

وبالتالي فإن احتمال أن يتعدى ضاغط الهواء 20,000 ساعة عمل هو تقريبا 26%.

(ب) هنا نبحث في تحديد الزمن t بحيث تكون الموثوقية عند t هي 0.1، بمعني عند معلومية:

$$R(t)=e^{-(1/15,000)t} = 0.1$$

فما هي قيمة الزمن t ؟ أسهل طريقة لتحديد t هو أن نتذكر أن الزمن المطلوب هو النسبة المئوية الـ90th، حيث أن احتمال (أي الموثوقية) تخطى هذا الزمن هو 0.1ومن الأفضل أداء ذلك باستخدام الحاسب الآلي، حيث يستخدم الأمر INVCDF في برنامج ميني تاب مع الأمر الفرعي EXPO على النحو التالي:

```
MTB > invcdf    .9 ;
SUBC > expo     15,000.
     0.9000     3.45 E + 04
```

وبالتالي يكون الزمن المطلوب هو t=34,500 ساعة.

(جـ) الزمن الوسيط للحياة يناظر النسبة المئوية الـ50th. باستخدام نفس الخطوات السابقة في (ب)، يتحدد الزمن الوسيط للحياة كما يلي:

```
MTB > invcdf    .5 ;
SUBC > expo     15,000.
     0.5000     1.04 E + 04
```

وبالتالي يكون الزمن الوسيط لحياة هذا النوع من ضاغط الهواء هو 10,400 ساعة.

ويجب ألا نندهش اذا كان وسيط الحياة أقل بكثير من متوسط الحياة، حيث أن التوزيع الأسي هو توزيع ملتوي إلى اليمين بشكل واضح.

تمارين :

(٤-٥٠) عين الخصائص المميزة لعملية بواسون.

(٤-٥١) أذكر اسم التوزيعين اللذين ينشئا من عملية بواسون. وهل المتغيرات العشوائية المرتبطة بهم مستمرة أم متقطعة ؟ وضح ذلك.

(٤-٥٢) صف الشكل العام للتوزيعين اللذين ذكرتهم في التمرين السابق.

(٤-٥٣) بالنسبة للحالات التالية، حدد نوعية المتغير العشوائي ثم ناقش عما إذا كانت الشروط الأساسية لتوزيع بواسون محتمل توافرها أم لا:

أ- حوادث السيارات التي يصاب فيها السائقين عند أي عمر خلال فترة خمس سنوات.

ب- حوادث السيارات التي تصاب فيها السائقات لمجموعة أعمار معينة خلال فترة خمس سنوات.

جـ- الوفاة الناتجة عن سرطان الرئة خلال سنة لمجموعة عمرية من المدخنين.

هـ- الزيارات لمستوصف خلال خمسة أيام عمل من الأسبوع.

و- القضايا التي يكسبها محامي خلال فترة ثلاث سنوات.

ز- تعطل آلة أثناء عملية الإنتاج خلال يوم عمل.

(٤-٥٤) افترض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون. استخدم دالة احتمال بواسون لتحديد احتمال أن X يأخذ القيم: 0,1,2,......,7. ثم ارسم التوزيع الاحتمالي للقيم التالية لـ λ. إعتماداً على نتائجك، وضح كيف يتأثر توزيع بواسون بقيم λ:

(a) $\lambda = 1.1$ (b) $\lambda = 1.4$ (c) $\lambda = 1.8$

(٤-٥٥) افترض أن X متغيرعشوائي يتبع توزيع بواسون له $\lambda = 2.2$. حدد الاحتمالات التالية:

(a) $P(X < 4)$ (b) $P(X = 4)$

(c) $P(X > 9)$ (d) $P(X \leq 8)$

(e) $P(X = 2)$ (f) $P(X \geq 2)$

(٤-٥٦) كرر التمرين السابق (٤-٥٥) عند $\lambda=3.5$.

(٤-٥٧) بالرجوع إلى تمرين(٤-٥٥)، حدد المتوسط والانحراف المعياري للمتغير X، ثم حدد احتمال أن تأخذ X قيمة تقع داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(٤-٥٨) كرر تمرين (٤-٥٧) ، عند $\lambda=3.5$. هل تبدو هذه الاحتمالات أنها تتأثر حقيقة بقيمة λ ؟

(٤-٥٩) افترض أنه في إحدى المدن الكبرى توقف المطاعم نشاطها بطريقة عشوائية ومستقلة بمعدل ثابت قدره 2 مطعم في المتوسط شهريا.

(أ) حدد احتمال أنه خلال 6شهور قادمة نجد 8 مطاعم بالضبط سوف توقف نشاطها.

(ب) حدد احتمال أنه خلال 3 شهور قادمة نجد أن 5 مطاعم على الأكثر سوف توقف نشاطها.

(جـ) حدد احتمال أنه خلال شهرين قادمين نجد 6مطاعم على الأقل سوف توقف نشاطها.

(د) حدد المتوسط والانحراف المعياري لعدد المطاعم التي سوف توقف نشاطها خلال شهرين، ثم حدد احتمال أن يقع العدد الحقيقي للمطاعم داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(٤-٦٠) إذا كان متوسط عدد الحاسبات الشخصية المباعة من خلال محل تجزئة هي 6 أجهزة في الأسبوع. افترض أن شروط توزيع ذو الحدين كلها متوفرة:

(أ) ما هو احتمال بيع جهازين خلال يوم عمل؟ (بفرض أن الأسبوع هو 6 أيام عمل).

(ب) ما هو احتمال بيع 15 جهاز على الأقل خلال فترة أسبوعين؟

(جـ) ما هو احتمال أن 4أجهزة على الأكثر سوف تباع خلال ثلاثة أيام؟

(د) ما هو المتوسط والإنحراف المعياري لعدد الأجهزة المباعة خلال 4أيام؟ وماهو احتمال أن يقع العدد الحقيقي للأجهزة المباعة خلال وحدتين انحراف معياري من المتوسط؟

(هـ) هل أنت مقتنع بفروض هذه المشكلة؟ وضح لماذا يبدو ذلك مقبولاً أو غير مقبولاً بالنسبة لك.

(٤-٦١) عدد الأخطاء أو العيوب في قطعة من النسيج الخام يلائمهامتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمتوسط 4أخطاء لكل 180 قدم مربع.

(أ) ما هو احتمال أن نجد 9 أخطاء على الأقل في قطعة نسيج طولها 180قدم مربع.

(ب) حدد الانحراف المعياري لعدد الأخطاء لقطعة بهذا الطول، ثم احسب احتمال أن يقع العدد الحقيقي للأخطاء المشاهدة داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(جـ) افترض أنك وجدت 9 أخطاء في قطعة بهذا الطول من النسيج. من خلال إجابتك على (أ)، (ب) ما هو رأيك في عملية إنتاج ذلك النسيج الخام، أخذا في الاعتبار معدل الأخطاء؟

(٤-٦٢) يصل العملاء إلى مكتبة للاستعارة بمعدل متوسط 50 عميل في الأسبوع. وصول العملاء يتبع توزيع بواسون وأسبوع العمل يتكون من 5 أيام.

(أ) ما هو احتمال أنه في يوم معين يصل 12 عميل على الأقل إلى المكتبة للإستعارة ؟

(ب) حدد احتمال أنه في يوم معين يكون عدد العملاء اللذين يأتون إلى المكتبة يقع داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(جـ) إفترض أنه في يوم معين وصل أثنان من العملاء إلى هذه المكتبة. من خلال إجابتك على (ب)، بماذا تصف مستوى نشاط هذه المكتبة في هذا اليوم ؟

(٤-٦٣) في فترة ساعة الغذاء، يصل العملاء إلى بنك ما بمعدل ثلاث عملاء كل دقيقة. أجب عن الأسئلة التالية معتمداً على توزيع بواسون:

(أ) ما هو احتمال أن يدخل 18 عميل على الأقل إلى البنك في فترة 5 دقائق أثناء فترة ساعة الغذاء ؟

(ب) هل تتوقع أن تنطبق إجابتك بدقة لفترة 5 دقائق خلال الساعة المفتوحة والتي تمتد صباحا من الساعة 9:00 إلى الساعة 10:00 ؟

(٤-٦٤) افترض أن X متغير عشوائي له التوزيع الأسي ، حيث $\lambda=1/2$. حدد الاحتمالات التالية:

(a) $P(X<2)$ (b) $P(X>1)$ (c) $P(X>4)$ (d) $P(1.5 \le X \le 5)$

(٤-٦٥) افترض أن X متغير عشوائي له التوزيع الأسي وأن متوسط X هو 5 . حدد الاحتمالات التالية:

(a) $P(X<5)$ (b) $P(2<X<8)$ (c) $P(X>6)$ (d) $P(5<X<10)$

(٤-٦٦) إذا كان المعدل المتوسط للمكالمات التليفونية التي تصل إلى شركة ما هو 30 مكالمة كل ساعة. افترض أن طول المدة الزمنية بين مكالمتين متتاليتين يلائمها التوزيع الأسي.

(أ) أوجد المتوسط والانحراف المعياري للزمن بين المكالمات.

(ب) حدد احتمال أن يقع الزمن بين مكالمتين متتاليتين داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(جـ) حدد المتوسط والانحراف المعياري لعدد المكالمات التي تصل في فترة خمس دقائق.

(٤-٦٧) إذا كان متوسط زمن تشغيل آلة بين عطلين متتالين هو 24 ساعة. لو أن الوقت بين عطلين متتاليين تم نمذجته بالتوزيع الأسي ، حدد الاحتمالات التالية:

(أ) زمن تشغيل الآلة 24 ساعة على الأقل.

(ب) زمن تشغيل الآلة 12 ساعة على الأكثر.

(جـ) أن يتروواح زمن التشغيل بين 42,15 ساعة.

(د) عدم وجود أعطال خلال يوم معين [اليوم 24 ساعة].

(٤-٦٨) افترض أن نوع معين من البطاريات القلوية ذات الجهد 9 فولت لها العمر 155 ساعة استخدام ، إذا كانت أعمار هذه البطاريات هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي ، حدد الاحتمالات التالية:

(أ)ألا يزيد عمر البطارية عن 155 ساعة استخدام.

(ب) أن يكون عمر البطارية 200 ساعة استخدام على الأقل.

(جـ) أن يتراوح عمر البطارية بين 120,50 ساعة استخدام.

(٤-٦٩) في مكتب للتوظيف ، هناك وظيفة معينة يجب أن تمر من خلال مرحلتين B,A قبل اكتمالها. من المعروف أن وقت الخدمة في المراحل B,A لها التوزيع الأسي بمعدل زمن خدمة 8,4 ساعات على التوالي. إذا فرضنا الاستقلال بين أزمنة الخدمة في تلك المراحل ، ما هو احتمال

أن زمن الخدمة في المرحلة A لا يزيد عن 1.5 ساعة وفي المرحلة B لا يزيد عن 5 ساعات.

(٤-٧٠) بالرجوع إلى التمرين (٤-٦٨) :

(أ) ما هي الموثوقية لهذا النوع من البطاريات عند 200ساعة استخدام ؟

(ب) ما هو العمر الوسيط لهذا النوع من البطاريات ؟

(جـ) تسعير هذه البطاريات يعتمد على فرض أن 5% من البطاريات سوف تتلف خلال فترة الضمان. حدد طول فترة الضمان التي تحقق هذا الفرض.

(٤-٧١) افترض أن متوسط عمر جهاز VCR (مسجل كاسيت وراديو) هو500 ساعة استخدام قبل أن يحتاج إلى عملية الإصلاح. افترض أن الوقت الذي يسبق أول عملية إصلاح له توزيع أسي.

(أ) ما هي الموثوقية لجهاز VCR عند 1500 ساعة استخدام ؟

(ب) عند أي وقت تكون الموثوقية لجهاز VCR تساوي 0.9 ؟

(جـ) عند أي وقت تكون الموثوقية لجهاز VCR تساوي0.1 ؟

(د) ما هو احتمال أن جهاز VCR لن يحتاج إلى عملية إصلاح خلال أول 500 ساعة استخدام ؟

(٤-٧٢) بالرجوع إلى المثال التوضيحي الشامل في نهاية الفصل الثاني، هل يبدو أن وصول المرض خلال العشرة شهور الخاصة بالدراسة تمثل عملية بواسون؟ وهل أطوال مدد إقامتهم خلال الشهور العشرة تتبع عملية بواسون ؟ (إجابتك ستكون شخصية، لأنه لا يتوفر لديك الوسائل كي تجيب على هذه الأسئلة ولكن عليك بتكوين رأيا اعتمادا على فحص الشكل البياني لهذا المثال).

(٤-٧٣) بالرجوع إلى تمرين (٢-١٧) هل يبدو أن طول المدة اللازمة لإتمام الإجراءات البنكية يخضع للتوزيع الأسي؟ (التعليق الذي بين القوسين في التمرين (٤-٧٢) يمكن استخدامه في هذا التمرين).

(٤-٦) ملخص: Summary

في هذا الفصل، قدمنا أربع توزيعات احتمالية، خاصة التي أثبتت فائدتها في عملية إتخاذ القرارات. هذه التوزيعات هي: ذو الحدين، الطبيعي، بواسون والأسي.

توزيع ذو الحدين هو مثال لتوزيع احتمالي متقطع، ويشتق هذا التوزيع من تكرار تجربة عشوائية فيها كل ناتج يصنف إما نجاح أو فشل. المتغير العشوائي هنا يمثل عدد حالات النجاح خلال n من المحاولات (الحالات) المستقلة، حيث يكون احتمال النجاح ثابتاً من محاولة لأخرى. معالم توزيع ذو الحدين هي احتمال النجاح الثابت وعدد المحاولات n. اعتمادا على قيمة احتمال النجاح الثابت، يمكن أن يكون توزيع ذو الحدين إما متماثلاً أو ملتوياً (إلى اليمين أو إلى اليسار).

التوزيع الطبيعي هو مثال لتوزيع احتمالي مستمر، ويظهر الشكل البياني لدالة كثافة احتمال

التوزيع الطبيعي على أنه منحنى جرسي الشكل متماثل وله تركيز مكثف حول المركز أو المتوسط، كما أن له ذيلين بدون حدود إلى اليمين وإلى اليسار. 68% من قيم المتغير العشوائي الطبيعي تقع داخل وحدة انحراف معياري من المتوسط، بينما 95% من القيم تقع داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط. معالم التوزيع الطبيعي هي متوسطه وانحرافه المعياري. التوزيع الطبيعي المعياري (ومتوسطه الصفر وانحرافه المعياري يساوي واحد) يستخدم لتحديد فترة احتمالات لكل المتغيرات العشوائية الطبيعية الأخرى.

توزيعات بواسون والأسي تعد توزيعات مفيدة جداً لنمذجة مشاكل خط الإنتظار. هذه التوزيعات تنبع من عملية بواسون والتي تصف الكثير من الظواهر التي تحدث عشوائياً عبر الزمن. عدد مرات الحدوث التي تقع بمعدل ثابت في فترة زمنية ثابتة يكون لها توزيع بواسون، بينما طول الفترة الزمنية بين حالات الحدوث المتعاقبة فلها توزيع أسي.

مراجع REFERENCES

1- K.Bury. *Statistical Models in Applied Science*. New York: Wiley, 1975.

2- G.Canavos. *Applied Probability and Statistical Methods*. Boston: Littel, Brown, 1984.

3- C.Derman, L. Glesser, and I. Olkin. *Probability Models and Applications.* New York: Macmillan, 1980.

4- R.Winkler and W. Hays. *Statistics: Probability, Inference, and Decision,* 2nd ed. New York: Holt Rinehart& Winston, 1975.

تمارين إضافية:

(٤-٧٤) افترض أن X لها توزيع ذو الحدين حيث $\pi=.5, n=10$

(أ) حدد احتمال أن X تقع داخل وحدة انحراف معياري من المتوسط، وكذلك داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(ب) ما هي إجابتك عن (أ) إذا كانت $\pi=.4, n=15$ ؟

(٤-٧٥) افترض أن احتمال ظهور وحدة معيبة في خط إنتاجي هي 05. وأن العملية الإنتاجية مستقرة وأن الوحدات الناتجة من هذه العملية تشكل مجموعة محاولات مستقلة. من بين 20 وحدة منتجة، ما هو احتمال ظهور:

(أ) وحدتين معيبتين.

(ب) وحدتين معيبتين على الأكثر.

(جـ) وحدة واحدة معيبة على الأقل.

(٤-٧٦) شركة إليكترونيات تدعى أن نسبة الوحدات المعيبة في مكون معين تقوم بإنتاجه هي 5%. أحد المشترين لكميات كبيرة من المكون قام بفحص عينة من 15 وحدة تم سحبها عشوائيا. فوجد بها 4 وحدات معيبة. بفرض أن أدعاء الشركة صحيحا وأن شروط توزيع ذو الحدين متوفرة، ما هو إحتمال وقوع مثل هذا الحدث ؟ وهل أنت ميال إلى استنتاج أن الادعاء غير صحيح ؟ علق على ذلك.

(٤-٧٧) تبين من الدراسات الميدانية السابقة أن تفضيل المستهلك بين علامتين تجاريتين متنافستين B,A من منتج معين يتم بالتساوي. لوفرضنا استقلال الاختيار بين هاتين العلامتين، ما هو احتمال أنه من بين 85 شخص يتم اختيارهم عشوائيا نجد أنه لن يزيد عن 10 أشخاص سوف يفضلوا العلامة A ؟

(٤-٧٨) افترض أن هناك اختبار يحتوي على 15 سؤال: صح أو خطاء وأن شرط النجاح هو الإجابة الصحيحة عن 9 أسئلة على الأقل. لو أن شخصا استخدم قطعة عملة سليمة وكان يلقيها ليقرر الإجابة بين صح أو خطاء بالنسبة لكل سؤال، ما هو احتمال أن هذا الشخص يحقق شروط النجاح في هذا الامتحان ؟

(٤-٧٩) شركات تليفونات ذات المسافات الطويلة بدأت في إنتاج التليفون المحمول، وذلك لزيادة حصتها من السوق الاستهلاكية وتوصلت الشركة من سجلاتها التاريخية أن واحدا من كل 10 مشتركين يتحولوا إلى هذه الخدمة الجديدة.

(أ) في يوم معين، قرر10,000 مواطن التعاقد مع الشركة، حدد المتوسط والانحراف المعياري لعدد المشتركين اللذين سوف يتحولوا إلي هذه الخدمة الجديدة.

(ب) الشركة تحتاج على الأقل إلى 940 من 10,000 تعاقد كي يتحولوا إلى الخدمة الجديدة حتى يصبح ذلك التحول ذو قيمة ومنفعة للشركة. في ضوء إجابتك عن (أ) ما الذي تراه حول احتمالات نجاح الخدمة الجديدة التي تقدمها الشركة ؟

(٤-٨٠) إحدى الجامعات الكبيرة تتوقع أن تتلقى 16,000 استمارة التحاق من الطلبة الجدد في العام القادم، ويفترض بأطمئنان أن درجات الـSAT المطلوبة في هذه الاستمارات تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 950 وانحراف معياري 100. لوأن الجامعة قررت أن تقبل أول 25% من درجات SAT، ما هي أقل درجة للـSAT يمكن أن تكون مطلوبة للقبول ؟

(٤-٨١) تصنع أقطار المكابس من خلال عملية إنتاجية يلائمها التوزيع الطبيعي بمتوسط طول قطر5 سم وانحراف معياري 001. سم. ولكي تكون هذه المكابس قابلة للاستخدام يجب أن يكون القطر ما بين 4.998 إلى 5.002 سم وإذا كان قطر المكبس أقل من 4.998 فإنه يعامل كنفاية أو خردة أما إذا كان القطر أكبر من 5.002 سم فإنه يعاد تصنيعه مرة أخرى. ما هي نسبة المكابس المكن قبولها؟، ما هي نسبة النفايات ؟ وما هي نسبة ما يعاد تصنيعه مرة أخرى ؟

(٤-٨٢) افترض أن بدايات الأجور لخريجي كلية التجارة في سنة معينة تتبع توزيع طبيعي بمتوسط

24000 دولا وانحراف معياري 200 دولار.

(أ) لو أن خريجا تسلم بداية أجره ،كان في أعلى 5% من بدايات الأجور ، فما هي قيمة الأجر الذي تسلمه هذا الخريج؟

(ب) لوأن بداية الأجر لخريج ما تناظر النسبة المئوية الـ 25، فما هو أجر ذلك الخريج ؟

(٤-٨٣) افترض أن X متغير عشوائي له توزيع طبيعي، وأنه معلوما أن قيمة النسبة المئوية الـ40 للمتغير X هي 50 وأن قيمة النسبة المئوية الـ 80 للمتغير X هي100، حدد المتوسط والانحراف المعياري للمتغير X.

(٤-٨٤) ترغب إحدى شركات الطيران في الحصول على مسامير برشام لتركب في محرك الطائرة وكان الحد الأدنى المطلوب لمقاومة الشد للمسمار الواحد هو 25,000 رطل، طلب من ثلاث مصانع لإنتاج مسمار البرشام(A, B, C) أن تتقدم بمعلومات تتعلق بمقاومة الشد لتلك المسامير. أجابت المصانع الثلاث وذكرت أن مقاومة الشد للمسامير التي تنتجها تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط مقاومة شد هي على التوالي: (28,000 ,30,000 , 29,000) رطل.

(أ) هل المعلومات التي حصلت عليها شركات الطيران كافية لاتخاذ قرار بالاختيار ؟ ولماذا ؟

(ب) بفرض أن الانحرافات المعيارية في المصانع (A, B, C) هي على التوالي 1200, 1800,1000 رطل. لكل مصنع، حدد إحتمال أن المسمار المنتج لا يحقق الحد الأدنى المطلوب.

(جـ) لوكنت أنت في شركة الطيران واعتمادا على اجابتك في (ب)، فأي العروض المقدمة من C,B,A تفضلها ؟ ولماذا؟

(٤-٨٥) مصنع لأنتاج أجهزة فرامل السيارات يفترض أن أعمار هذه الأجهزة هي متغير عشوائي لها التوزيع الطبيعي بمتوسط 3 سنوات وانحراف معياري 6 شهور. إذا كان تكلفة تركيب جهاز واحد 10 دولار، فما هي اجمالي التكلفة في أول سنتين عند تركيب 1000000جهاز ؟

(٤-٨٦) الزمن اللازم لتجميع وحدة انتاجية معينة هو متغير عشوائي له توزيع طبيعي بمتوسط 30 دقيقة وانحراف معياري 2 دقيقة. حدد الزمن بحيث يكون احتمال أن يتعدى زمن تجميع الوحدة هو 02..

(٤-٨٧) أوزان حبوب ما في العلب تتبع تقريبا توزيع طبيعي بمتوسط 600 جرام. عملية التعبئة مصممة بحيث لا يكون هناك أكثر من علبة واحدة من بين 100 علبة يكون وزنها خارج المدى 610-590 جرام.

(أ) ما هي أقصى قيمة للإنحراف المعياري تكون ضرورية لتحقيق هذه العملية.

(ب) لتخفيض التباين فإن عملية التعبئة يجب أن يعاد تصميمها لتخفيض المدى ليكون من 605- 595 جرام. ما هي اقصى قيمة للإنحراف المعياري لعملية التعبئة المعاد تصميمها ؟

(٤-٨٨) في تمرين (٣-٢٥) كنت قد قدرت احتمال أن يكسب فريق Cincinnati Reds (CR) بطولة

دولية بعد أن يحقق اول فوزين له، هذا التقدير كان معتمداً على معلوماتك التاريخية. هناك طريقة أخرى لتقدير ذلك الإحتمال وهي استخدام توزيع ذو الحدين. بمجرد أن يكسب اول مبارتين، فإن فريق Reds يحتاج إلى ان يفوز في أكثر من مبارتين من المباريات الخمسة المتبقية.

(أ) مفترضا أن احتمال ان يكسب فريق Reds أي مبارة هو 5.، حدد احتمال ان يفوز Reds بالبطولةالدولية.

(ب) قارن نتائجك في (أ) مع اجابتك للتمرين (٣-٢٥). هل هناك أي تشابه؟ اشرح لماذا لا يوجد تماثل تام بينهما؟ أيهما هو الإجابة الأدق؟

(٤-٨٩) عدد اعطال ماكينة في مصنع تجميع تتبع توزيع بواسون بمتوسط 4 اعطال في كل وردية مدتها 8 ساعات.

(أ) ما هو احتمال أن يحدث عطل واحد على الأقل في ساعة واحدة؟

(ب) ما هو احتمال أنه في ساعة واحدة يزيد عدد الأعطال عن المتوسط بأكثر من وحدتين انحراف معياري؟

(جـ) بفرض أنه وجد 3 اعطال في ساعة واحدة، اعتمادا على اجابتك في (ب) علق على إمكانية حدوث مثل هذه الحالة.

(٤-٩٠) تتلقى شركة تأمين على الحياة 1000 مطالبة وفاة في المتوسط كل سنة. افترض ان عدد مطالبات الوفاة التي تتلقاها الشركة تتبع توزيع بواسون. اجب عن الأسئلة التالية بفرض أن السنة 50 اسبوع

(أ) حدد احتمال أنه في اسبوع معين تتلقى الشركة 12 مطالبة وفاة على الأقل.

(ب) إذا كانت قيمة الوثيقة في المتوسط لهذه الشركة هي 100000 دولار، ما هي جملة المبالغ التي يجب ان تدفعها الشركة في المتوسط لتغطي مطالبات الوفاة التي تتلقاها في اسبوع معين.

(جـ) حدد احتمال أن يقع عدد المطالبات التي تتلقاها الشركة في أسبوع داخل وحدتين انحراف معياري من المتوسط.

(٤-٩١) افترض ان متوسط عمر نوع معين من بطاريات السيارات هو 60 شهرا من الإستخدام. فإذا كانت اعمار هذه البطاريات تتبع التوزيع الأسي، أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما هو احتمال أن يكون عمر بطارية من هذا النوع 66 شهرا على الأقل؟

(ب) ما هو احتمال أن عمر بطارية من هذا النوع يتعدى المتوسط بأكثر من وحدتين انحراف معياري؟

(جـ) عند أي عمر تكون الموثوقية لهذا النوع من البطاريات تساوي 7.؟

(د) بفرض أن المصنع وافق على أن يستبدل البطاريات بدون مقابل إذا تلفت البطارية قبل

مرور 30 شهرا من الإستخدام ، فإذا كانت عملية الإستبدال هذه تكلف المصنع 20 دولار للبطارية الواحدة وكان هناك 200000 بطارية يشملها هذا العرض أو الإتفاق ، ما هي تكلفة الإستبدال الكلية التي يتحملها المصنع في المتوسط ؟

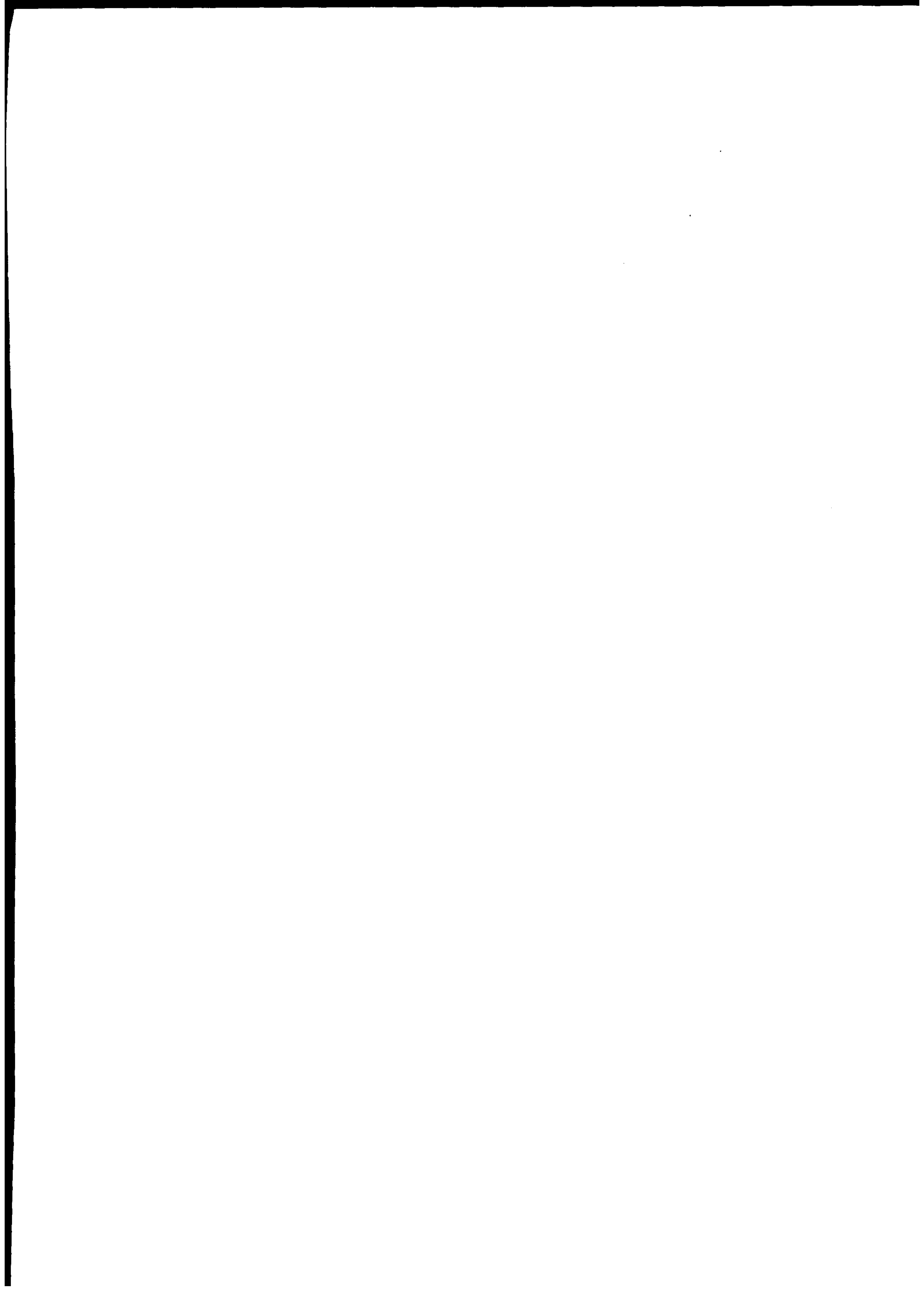
(٤-٩٢) بالرجوع إلى تمرين (٣-٧٥) ولا سيما إلي النظامين اللذين يقعا على يسار الرسم. إذا كانت المكونات C,B,A تعمل باستقلال بحيث أن عمر كل مكون هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بمتوسط أعمار 20 ساعة. لكل نظام ، حدد احتمال ان النظام سوف يعمل أكثر من 30 ساعة.

الفصل الخامس

الإحصاءات وتوزيعات المعاينة

STATISTICS AND SAMPLING DISTRIBUTIONS

محتويات الفصل



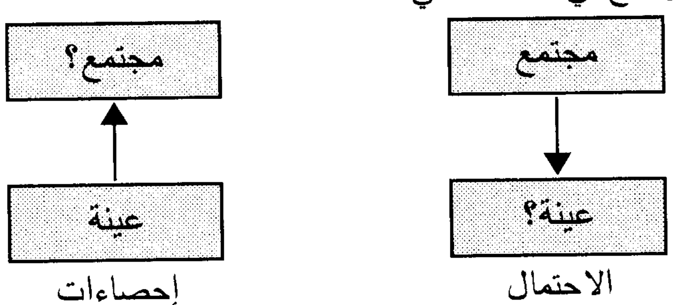
الفصل الخامس

الإحصــــاءات وتوزيعــــات المعاينــــة

STATISTICS AND SAMPLING DISTRIBUTIONS

(٥-١) نظرة على محتويات الفصل: Bridging to New Topics

في الفصلين الأول والثاني، ناقشنا تحليل البيانات بإستخدام الإحصاءات والتفكير الإحصائي بهدف زيادة معلوماتنا حول المجتمع. في الفصلين الثالث والرابع، ناقشنا موضوع الاحتمالات. الآن، ما هو الفرق بين الاحتمالات والإحصاءات؟ في الاحتمالات نحن نركز على توزيع معطى أو معلوم للمجتمع ونسأل ماذا يمكن أن يحدث عندما نسحب عينة عشوائية. فمثلا، إذا علمنا أن توزيع ذو الحدين له: $\pi=.4, n=100$، فإنه يمكن أن نجد إحتمال أن X تأخذ قيماً أقل من 35، بمعنى إذا شاهدنا عدداً من حالات النجاح X من بين $n=100$ محاولة، ما هو إحتمال أن العدد المشاهد يكون أقل من 35؟ من ناحية أخرى. في الإحصاءات يكون لدينا عينة عشوائية، ونسأل ماذا تخبرنا هذه العينة عن الملامح المجهولة للمجتمع الذي سحبت منه هذه العينة، هذا هو الإستنتاج الإحصائي. فمثلاً نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من مجتمع ما توزيعة هو ذو الحدين، بناء على نتائج العينة، ما الذي يمكن أن نقوله عن قيمة النسبة في المجتمع π؟ بصفة عامة. الإستنتاج الإحصائي هو ببساطة عكس إتجاه الإستفسار كما هو موضح في الشكل التالي:



هدفنا هو المساعدة في تفهم طرق التفكير الأساسية في الإستنتاج الإحصائي، ولتحقيق هذا الهدف، فإن فهم وإستيعاب الأحتمال يعد أمراً أساسياً. وهذا هو ما دعانا إلى تغطية أساسيات الأحتمال، المتغيرات العشوائية، التوزيعات الأحتمالية في الفصلين الأخرين. في الفصل الحالي يستخدم مفهوم الأحتمال لبناء إطار نظري للإستنتاج الإحصائى، لذلك فهذا الفصل يمكن إعتباره وكأنه كوبري بين الإحتمال والإستنتاج الإحصائي. في الجزء المتبقي من هذا الفصل، نتناول الطرق التي تستخدم البيانات لمعرفة معلومات عن المجتمع. في هذا الفصل وفي الفصول التالية، تستخدم كلمة مجتمع **Population** في سياق معنى المجموعة التي ترغب في معلومات عنها. من المهم أن ندرك أنه إذا كانت البيانات ناتجة عن مجتمع (أو عملية) غير مستقر فإن النتائج التي تؤسس على عينة عشوائية، من غير

المحتمل أن تكون كافية لعمل الإستنتاجات المطلوبة. المثال التالي يوضح الطابع العام لمشكلة عمل استنتاجات حول مجتمعات (عمليات) مستقرة.

مثال (٥-١)

بفرض أنك تعمل لدى شركة تستخدم عدداً كبيراً من مندوبي البيع لترويج مبيعاتها. مسئوليتك هي إقتراح بتعديل خطة المبيعات للعام القادم. وكنقطة بداية، فأنت ترغب في معرفة ما هي المكاسب في المتوسط مع خطة المبيعات الحالية، أي ترغب في معرفة متوسط المجتمع μ. هذه المعرفة سوف تتيح لك ما إذا كانت خطة المبيعات الحالية ذات عائد مجزي للعاملين بالشركة أم لا وإلا فعليك بإقتراح إجراء تعديلات ضرورية.

لسوء الحظ، ليس لديك سجلات عن مكاسب كل أفراد مندوبي البيع، لذلك فليس من الممكن أن تحدد متوسط المجتمع بدقة، بدلاً من ذلك نسحب عينة عشوائية من مندوبي البيع وتحديد مكاسبهم في العام الماضي ثم تقدير μ إعتماداً على مكاسب العينة. الآن، بفرض أن متوسط العينة هو : $\overline{X}=\$22,500$. هذا هو تقديرك المقبول لـμ، ولكن إلى أي مدى يعتمد عليه؟ بمعنى إلى أي مدى يمكن أن يبتعد هذا التقدير عن μ؟ إذا كنت واثقاً بأن $\overline{X}$ بها خطأ لا يزيد عن 500$ مثلاً، فإنه يمكن أن تستخدم المتوسط $\overline{X}$ كأساس للتخطيط، ولكن إذا علمت أن قيمة متوسط العينة يصل الخطأ فيه 6000$ فإنه يجب أن تصر على إجراء البحث على عينة أكبر قبل أن تستمر في تطوير خطة المبيعات.

المشكلة الإحصائية في مثال (٥-١) هي تحديد الثقة في إحصاء العينة المستخدم لتقدير مؤشر المجتمع المناظر. هذه المشكلة تقع في واقع الأمر في صميم كل تطبيقات الأستنتاج الإحصائي. ويلاحظ أن المعلومات الأساسية يجب أن تأتي من الإحتمال، والأسئلة التي نريد أن نسألها حقاً هي: ما هو إحتمال أن قيمة متوسط العينة يختلف عن متوسط المجتمع بأكثر من ?500$ أو بأكثر من ?6000$ في هذا الفصل نقدم الأساس لمعالجة مثل هذه المشاكل. وسوف نرى أن نفس هذا المنهج العام يستخدم لعمل إستنتاجات في حالات عديدة ومتنوعة تشمل إستنتاجات حول المتوسطات، النسب، التباينات، الإنحرافات المعيارية وكثير من المؤشرات الهامة الأخرى، وهذا ما سنقدمة في الفصول التالية.

(٥-٢) أساليب المعاينة Sampling Techniques

كما بينا في الفصل الأول، تعطي المعاينة وسائل جذابة للتعرف على ملامح المجتمع مقارنة مع ما توفرة التعددات الشاملة. فالمعاينة يمكن أن تؤدي عند تكاليف منخفضة وبسرعة أكبر، كما يمكن أن تحقق دقة عالية بسبب محدودية الجهد بجانب إشراف أكثر فاعلية. أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة من أكثر الأساليب شيوعاً في الإستخدام ومن أكثرها بساطة لأختيار عينة عشوائية. في هذا الفصل نقدم تفصيلات أكثر عن المعاينة العشوائية البسيطة كما نقدم أساليب أخرى تعطي إمكانية لتحسين الدقة أو لها مميزات عملية تحت شروط معينة.

المعاينة العشوائية البسيطة Simple Random Sampling

كما بينا في الجزء (١-٤-١) أن المعاينة العشوائية البسيطة، هي وسيلة لاختيار عينة بحيث أن كل المفردات في المجتمع يكون لها فرص متساوية ومستقلة لأختيارها ضمن العينة. هذا المنهج في الأختيار خالي من التحيز، بمعنى أن مفردات المجتمع لا يفضل بعضها في عملية الأختيار كما أنه يعطي الوسيلة التي يمكن بها تقدير الدقة، أيضاً يعطي الوسيلة للتحكم في خطأ المعاينة من خلال إختيار حجم العينة،

[كل هذا موضح بالتفصيل في الفصل (٦-٤-٢)]. ولآختيار عينة عشوائية بسيطة، ترقم مفردات المجتمع من 1 إلى N. والاختيار اليدوي للعينة يتم عن طريق وضع الأرقام من 1 إلى N في صندوق مجوف وتخلط تلك الأرقام جيداً، بعد ذلك يسحب من الصندوق n من المفردات واحدة وراء الأخرى. مفردات المجتمع التي تناظر الأرقام التي إختيرت تمثل العينة المطلوبة. أما الأختيار العملي للعينة العشوائية البسيطة مفاده يتم عن طريق الحاسب الآلي، فمثلاً لأختيار عينة عشوائية من 10 مفردات من مجتمع يتكون من 1000 مفردة بإستخدام أوامر برنامج Minitab يتم على النحو التالي:

```
MTB >  random 10  C1;
SUBC>  integer   1   1000
MTB >  print       C1
  C1
  17    896   112   940   129   179   300   350   60   822
```

وهكذا، مفردات المجتمع التي تحمل الأرقام: 179 ,300 ,350 ,60 ,822 ,129 ,940 ,112 ,896 ,17 (هذه الأرقام مخزنة في العمود C1 في ملف Minitab) هي مفردات العينة المختارة.

المعاينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sampling

غالبا ما نهتم ليس فقط بالتعرف على المجتمع ولكن أيضاً على المجتمعات الفرعية المختلفة. فمثلاً، قد ترغب إدارة التسويق في التعرف ليس فقط على مجتمع المؤسسات الإدارية في الولايات المتحدة، ولكن أيضا التعرف على المجتمعات الفرعية لتلك المؤسسات في المناطق المختلفة. فإذا أختيرت عينة عشوائية بسيطة من مجتمع المؤسسات الأمريكية، فبعض المناطق قد لا تمثل في عملية الأختيار، وحل هذه المشكلة هو إختيار عينة عشوائية بسيطة من كل منطقة وهكذا، فبدل من الأختيار العشوائي مثلا لـ 1000 مؤسسة قومية، يمكن أن نختار عينات عشوائية بسيطة كل من 200 مؤسسة من المناطق الخمس.

المناطق المكونة من الأقاليم في هذا المثال تسمى طبقات **Strata** والطبقات هي مجتمعات فرعية غير متداخلة تكون معاً المجتمع بأكمله، المعاينة العشوائية الطبقية هي أسلوب نسحب به عينات عشوائية بسيطة من كل طبقة وهذا الأسلوب يحقق المميزات التالية:

١- إذا كانت هناك حاجة إلى معرفة معلومات عن مجتمعات فرعية معينة بالإضافة إلى المجتمع ككل فإنه من الأفضل أن يعالج كل مجتمع فرعي وكأنه مجتمع له كل الحقوق.

٢- توفر المعاينة العشوائية الطبقية معلومات عن مجتمعات فرعية هامة ذات أحجام قليلة نسبيه، فمثلا، ربما يكون من الضروري الحصول على عينة مناسبة من مؤسسات كبيرة جداً وهي مؤسسات تمثل نسبة قليلة من مجتمع كل المؤسسات.

٣- ربما تكون المعاينة العشوائية الطبقية أكثر ملائمة من الناحية الإدارية، خاصة اذا كانت عملية تجميع البيانات تنفذ بواسطة مكاتب إقليمية.

٤- عندما تختلف المجتمعات الفرعية كل عن الآخر أختلافا جوهريا ولكن داخليا هي مجتمعات متماثلة، فإن المعاينة العشوائية الطبقية تعطي دقة عالية، بجانب أنها تضمن الحصول على عينة صغيرة من كل مجتمع فرعي، (حيث أن المفرادات داخل المجتمع الفرعي متماثله، فإن عينة بسيطة صغيرة تكفي لتوصيف المجتمع الفرعي).

القضية الأحصائية التي تظهر عند التخطيط لعينة عشوائية طبقية، هي ما يجب أن نفعله في تحديد

وتعريف الطبقات وإختيار أحجام العينات الطبقية عندما تكون هناك إمكانية في تعريف الطبقة. الفكرة هي تكوين الطبقة بطريقة تجعل مفردات المجتمع داخل الطبقة متشابهة، ولكن بين الطبقات تكون مختلفة تماماً. فمثلا في معاينة أزمنة إنتظار العملاء في بنك ما، ربما تتكون الطبقات من : (1) كل العملاء اللذين يصلوا ما بين 11.45 قبل الظهر وحتى 1.30 بعد الظهر (فترة التزاحم) (2) كل العملاء الآخرين. إختيار أحجام العينات الطبقية تعتمد على عدة عوامل. بصفة عامة، العينات الكبيرة تكون مناسبة لطبقات ذات صفات معينة، مثل:(1) الطبقة الكبيرة. (2) الطبقة التي تظهر اختلافات داخلية كبيرة (3) تكاليف المعاينة منخفضة داخل الطبقة. نضف إلى ذلك، أنه اذا كان مطلوبا مستوى معين من الدقة لدراسة طبقة معينة، فإن الأمر يقتضي عينة كبيرة الحجم. في مثل هذه الحالات، فإن حجم العينة يختار بتطبيق نظرية المعاينة العشوائية البسيطة في كل طبقة، (تحديداً، تطبيق الصيغة (6.6) في الجزء (٦-٤-٢) أو صيغ أخرى مماثلة).

في المناقشات التالية للإستنتاج الأحصائي، سنفترض - مالم يشار إلى خلاف ذلك- أن عملية المعاينة هي المعاينة العشوائية البسيطة.

(٥-٣) المؤشرات، الأحصاءات، أساسيات الأستنتاج الأحصائي:

نعلم من الفصل الأول أن المؤشر Parameter هو عدد يلخص بعض ملامح المجتمع (أو العملية) أما الأحصاء Statistic فهو عدد يلخص بعض ملامح العينة. في الفصول السابقة، قابلتنا مؤشرات (أو معالم) مثل المتوسط μ، التباين σ^2، الإنحراف المعياري σ والنسبة π ويناظر هذه المؤشرات الأحصاءات $\overline{X}$ (متوسط العينة)، S^2 (تباين العينة)، S (الإنحراف المعياري للعينة) وP (النسبة في العينة). وكما ذكرنا في الفصل الأول، فإن الأحصاءات عادة ما يشار إليها بالحروف الرومانية الكبيرة والمؤشرات يرمز لها بالحروف اليونانية الصغيرة، أما فيما يتعلق حول النسبة في العينة P، فقد إبتعدنا عن هذا التقليد لنتجنب الخلط عند إستخدام الحرف الكبير P والذي يشير إلى الأحتمال. وكما سنرى في البند (٥-٤) ، فإن الأحصاءات $\overline{X}$,P,S^2 تعتبر أفضل الأحصاءات لتقدير π,σ^2,μ على التوالي. ولكن ماذا نعنى بأفضل إحصاء **best statistic**؟ المعنى لهذا المصطلح وضح في البند (٥-٤).

كيف نصف الكمية التي تمثل مقدار الخطأ في التقدير ؟ دعنا نتأمل الخطوات الموضحة في مثال (٥-١). اسحب عينة عشوائية (جزء من مندوبي المبيعات) من مجتمع (كل مندوبي المبيعات) واحسب قيمة أفضل إحصاء لتقدير المؤشر موضوع الأهتمام (متوسط الكسب في السنة). مبدئياً، لابد أن نعرف ان كل إحصاء يتذبذب في قيمته عشوائيا من عينة إلى أخرى بينما المؤشرات ثابته وهي عادة غير معلومة. القيمة التي تحسبها للأحصاء من عينة واحدة تعمتد على مفرادات العينة التي يتم إختيارها، لذلك فكل إحصاء تحددت قيمته من عينة عشوائية هو متغير عشوائي وبالتالي فهناك تنويعات مختلفة من النواتج لـ $\overline{X}$.

المحاكاة بإستخدام Minitab

لتوضيح كيف تتذبذب الأحصاءات من عينة إلى أخرى، نستخدم برنامج Minitab لمحاكاة أو تقليد النواتج لعملية انتاجية مستقرة تمثل تعبئة علب بمنظف صناعي. المتغير الذي نهتم به هووزن المنظف في العلبة وعادة ما تتم عملية تعبئة العلب بمتوسط $\mu = 50$ أوقية بإنحراف معياري $\sigma = .5$ أوقية. مشرف الأنتاج يختبر بصفة دورية ما اذا كانت العملية تنحرف عن هذه القيم أم لا، ولاداء ذلك، تسحب عينات عشوائية كل ساعة، وكل عينة تتكون من 10 علب. في كل عينة توزن محتويات العلب العشر، بعد ذلك يتم حساب قيم الأحصاءات $\overline{X}$, S,S^2 .

نفرض ان إحدى العينات التي تسحب كل ساعة، كان متوسطها $\overline{X}=50.21$ أوقية وان مشرف الانتاج استخدم هذا الرقم كتقدير لمتوسط العملية الانتاجية الحالية. هنا، إلى أي مدى يبتعد متوسط العملية الحقيقي عن هذا التقدير ؟ هل متوسط العينة 50.21 أوقية يتعدى المتوسط التقليدي للعملية وهو 50 أوقية بكمية كبيرة لدرجة أن المشرف يمكنه أن يستنتج بأطمئنان أن متوسط العملية قد زاد ؟ ربما، ولكن يجب أن نكون حذرين لأن الأختلاف عن 50 ربما يكون ببساطة نتيجة لخطأ المعاينة، (أي اختلاف المعاينة العشوائية).

في هذه المحاكاة، أوزان المنظف في العلب إستنتجت عشوائيا بواسطة الحاسب الآلي لعملية تتبع توزيع طبيعي بمتوسط $\mu=50$ أوقية وأنحراف معياري $\sigma=.5$ أوقية. أوزان المنظف الناتجة من 40عينة مبينة في الجدول (٥-١) بالإضافة إلى القيم المناظرة لـ $\overline{X}$، S^2، S. من المهم أن ندرك أن كل عينة تتكون من أوزان عشر علب (n=10) ومحاكاة 40 عينة يتيح لك ملاحظة التذبذبات على الاحصاءات المختلفة.

من جدول (٥-١) لاحظ انه على الرغم من أن كل العينات قد سحبت من عملية مستقرة (عملية التعبئة) بمتوسط وإنحراف معياري ثابتين ($\mu=50$, $\sigma^2=.25$, $\sigma=.5$) إلا أن قيم متوسط العينة والتباين والانحراف المعياري تتغير من عينة إلى أخرى. عبر 40عينة، نجد أن قيم متوسط العينة يتراوح ما بين 49.68 إلى50.26 أوقية وقيم تباين العينة تتراوح ما بين 0939.، 4469. اوقية مربعة وقيم الانحراف المعياري للعينة تتراوح ما بين 6685., 3065. اوقية.

الآن، دعنا نفكر في ماذا تفيدنا هذه المحاكاة التي تمت عن 40 عينة. هذه المحاكاة تشير إلى أن متوسط العينة يمكن أن يقع في أي مكان بين 49.68 ,50.26، أوقية. تخيل أن العينة التالية التي يمكن محاكاتها (رقم41) هي عينة حقيقية فعلا، أي عينة أختيرت فعلا من قبل مشرف الأنتاج، فإذا كان متوسط هذه العينة له قيمة بين 50.26,49.68 أوقية، فإنه لا يوجد سببا للأعتقاد بأن متوسط العملية قد انحرف بعيداً عن 50 أوقية، ولكن إذا كانت هذه القيمة خارج هذا المدى فيكون هناك سببا للاعتقاد بأن متوسط العملية قد انحرف بعيداً عن 50 أوقية.

TABLE 5.1 - Ten Detergent Weights for Each of 40 Samples

	Sample							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	49.7947	49.4464	49.4286	20.1017	49.3588	50.5592	48.6974	50.3274
	50.1008	50.0919	50.6210	50.0694	49.3250	49.8606	50.1704	50.4538
	49.7705	49.2987	49.5841	49.2684	50.5835	49.5714	50.2938	49.2450
	49.5441	49.9353	49.7827	50.6127	50.3795	49.8802	49.8665	50.6684
	49.8549	49.7241	49.0644	49.7735	49.9955	49.4321	49.4301	50.3544
	50.8049	49.8228	50.2232	49.5841	49.8689	49.4072	49.7276	49.5778
	50.0862	49.9963	50.2785	50.2515	50.2270	50.1515	50.8198	50.3790
	50.1133	50.0652	49.6271	50.2454	50.4187	50.6363	50.0515	49.9014
	50.7101	49.6218	49.3687	49.5772	49.1684	50.2995	49.4014	50.2498
	49.4708	50.4239	49.0867	49.3723	49.6268	50.2035	49.9758	50.4675
$\overline{X}$	50.2050	49.8426	49.7065	49.8856	49.8952	50.0002	49.8434	50.1624
S	.444715	.332984	.521247	.636581	.507269	.442582	.579033	.447729
S^2	.197772	.110878	.271699	.190603	.257349	.195878	.335279	.200461

	Sample							
	9	10	11	12	13	14	15	16
	50.3916	50.6253	50.2785	49.1089	50.4720	48.9005	50.7517	50.0860
	50.8003	50.1251	50.0401	50.9039	49.7567	50.0426	50.9987	49.6346
	49.6066	50.4837	49.6024	49.3020	50.5839	50.1805	49.7301	50.2867
	50.2044	50.6658	49.1805	49.6883	49.5716	50.3177	50.0296	49.3153
	50.0516	49.4746	49.6167	50.9229	50.6004	49.6401	50.5462	50.2598
	50.7528	50.4430	49.9474	50.1053	51.1410	49.9958	49.7919	50.8086
	49.5276	49.9991	49.1185	49.2349	49.8684	49.9839	50.4949	49.6926
	50.3977	50.3673	49.7472	50.3862	50.2565	49.6691	50.3452	49.6668
	50.2110	50.1530	50.1670	50.2169	49.7049	51.0072	49.8577	49.3382
	50.0950	50.3110	49.1431	49.7994	50.4769	49.7220	49.6223	49.9743
$\overline{X}$	50.2039	50.2648	49.6841	49.9669	50.2472	49.9459	50.2168	49.9063
S	.418860	.351204	.429972	.655666	.500371	.542221	.475459	.467799
S^2	.175444	.123344	.184876	.429898	.250371	.294003	.226061	.218836

	Sample							
	17	18	19	20	21	22	23	24
	50.0279	50.7613	49.9137	49.3480	49.5046	49.4700	50.0198	50.3221
	50.0917	49.4965	49.3835	50.1738	50.1577	50.2420	50.5425	49.4004
	49.9403	49.3071	49.5372	49.9085	50.4309	49.6672	49.6524	50.1326
	39.9892	49.8536	49.9971	49.6371	50.2095	49.6428	49.6265	50.1023
	50.3140	49.4683	50.6543	49.6586	51.1310	49.7517	49.8499	49.5409
	51.1127	50.0671	50.1820	49.3503	49.7763	50.4493	50.1197	50.3063
	49.9080	50.0171	50.6060	49.8833	49.3983	49.0368	50.4673	49.8033
	49.9837	50.7736	50.1955	50.1843	49.8290	49.5014	50.7426	49.6240
	49.7992	50.2986	49.6534	50.0740	49.9874	49.7068	49.8588	49.7460
	50.3869	50.2672	49.8383	49.8410	50.3649	49.9450	49.6692	50.6722
$\overline{X}$	50.1554	50.0310	49.9961	49.8029	50.0790	49.7413	50.0229	49.9652
S	.381057	.313313	.423558	.306453	.504563	.399614	.480459	.405425
S^2	.145204	.263490	.179401	.093914	.254584	.159716	.230841	.164369

	Sample							
	25	26	27	28	29	30	31	32
	50.0862	49.8249	50.0373	50.6524	49.7257	49.7064	50.2159	49.4844
	49.6948	50.7340	50.4951	50.6550	50.2716	49.8621	50.1990	49.6676
	49.3642	49.6234	49.8003	50.0758	50.1400	49.6858	50.6695	49.7431
	50.4674	50.5089	49.6586	49.5782	49.6582	50.5127	49.6167	49.9382
	49.8933	50.7001	50.0416	50.0271	49.9833	49.6278	49.3892	49.9836
	50.7576	49.7327	50.1490	49.4451	49.7099	50.1630	50.2285	49.8614
	48.9331	50.0307	49.6172	49.9375	50.6204	50.0714	49.8543	50.3532
	49.0194	49.4360	49.7981	49.8031	49.8643	49.3542	50.3830	51.0504
	49.4671	49.7133	49.4384	50.5766	50.4037	49.9757	49.5597	49.4587
	49.9704	50.9464	50.0893	49.9831	50.3531	50.1084	50.0016	49.8143
$\overline{X}$	49.7654	50.1250	49.9125	50.0734	50.0730	49.9069	50.0117	49.9355
S	.590916	.544908	.309296	.430593	.334587	.329879	.403744	.468978
S^2	.349181	.296925	.095664	.185410	.111949	.108820	.163009	.219940

	Sample							
	33	34	35	36	37	38	39	40
	49.6386	50.5412	50.0758	49.2648	49.9958	49.4766	50.8150	4.8516
	49.4278	50.6664	49.9370	50.3555	50.1461	48.9544	49.3907	50.2398
	49.6417	50.1615	50.0149	49.2529	50.8220	49.8757	50.4036	49.7118
	50.3308	50.0063	50.6402	51.0057	49.4549	49.6427	50.8914	50.3952
	49.7992	49.5385	50.9366	49.1299	49.7946	49.7653	50.1979	50.2024
	49.7850	50.4391	50.1882	50.1116	50.4184	49.8618	48.8848	50.0307
	49.7738	49.2300	49.9356	49.9453	49.1014	49.4685	50.6353	49.7892
	48.9816	49.9336	48.9738	50.3667	50.1235	49.7152	49.5115	49.0505
	50.3651	50.4974	50.3753	50.0320	49.6398	49.8293	50.3415	50.5578
	49.8292	49.8686	49.8599	49.8882	50.5924	50.4184	50.4767	50.3054
$\bar{X}$	49.7573	50.0883	50.0937	49.9353	50.0089	49.7008	50.1548	50.0134
S	.400553	.465802	.523065	.588314	.528543	.373729	.668517	.435802
S^2	.160443	.216972	.273597	.346113	.279358	.139673	.446915	.189923

أيضا، النسبة في العينة معرضة لأختلاف المعاينة، ولتوضيح التذبذبات في قيم نسب العينات من عينة إلى أخرى، فقد تم محاكاة 40 عينة عشوائية، حجم كل منها 50 من مجتمع طلبه إحدى الجامعات بالولايات المتحدة والذي فيه يفترض أن 20% من الطلبة مدخنين (π=.2). في كل عينة من 50 طالب، نسجل عدد المدخنين ثم نحسب نسبة المدخنين في العينة. تلك المعلومات عن 40 عينة معطاة في جدول (٥-٢). مرة أخرى، على الرغم من أن مؤشر المجتمع هو الثابت π=.2، إلا أن النسب في العينات P (الأحصاء) تتراوح بين 0.08 , 0.3

جـــدول (٥-٢)

Number of Smokers Among 50 Persons for Each of 40 Samples

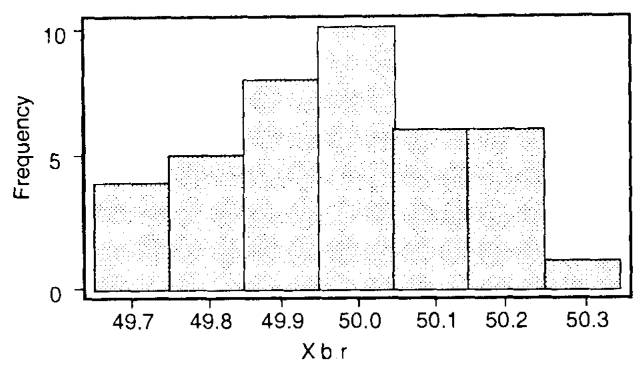
Sample Number	Number of Smakers	p	Sample Number	Number of Smakers	p
1	7	.14	21	7	.14
2	10	.20	22	7	.14
3	10	.20	23	7	.14
4	9	.18	24	9	.18
5	6	.12	25	8	.16
6	9	.18	26	8	.16
7	11	.22	27	8	.16
8	7	.14	28	8	.16
9	9	.18	29	10	.20
10	7	.14	30	4	.08
11	10	.20	31	9	.18
12	11	.22	32	10	.20
13	8	.16	33	9	.18
14	12	.24	34	13	.26
15	8	.16	35	14	.28
16	8	.16	36	14	.28
17	11	.22	37	10	.20
18	11	.22	38	8	.16
19	10	.20	39	9	.18
20	15	.30	40	15	.30

عودة إلى مثال عملية التعبئة، نفرض أننا علمنا بطريقة ما أن قيم $\bar{X}$ عبر كل العينات المكنه كل ذات الحجم 10 وحدات، تتراوح بين49.6 ,50.4 أوقيه. بمعنى أنه بأفتراض أن عملية التعبئة بقيت مستقرة، فإنه لن نجد عينة واحدة من العينات العشوائية المكنه ذات الحجم 10 وحدات، تعطي قيمة لـ $\bar{X}$ تختلف بـ 4. أوقية أعلى أو أدنى μ=50 . عندئذ يجب أن نعرف أن متوسط أي عينة ذات حجم 10 وحدات يتم إختيارها في أي وقت، لن يكون بها خطأ أكثر من 4. أوقية من المتوسط μ=50. أيضا، فيما يتعلق بالمثال الخاص بنسبة المدخنين، لنفرض أننا نعرف بطريقة ما أن قيم P خلال كل العينات العشوائية المكنة لن تكون أبداً بأكثر من 15. أدني أو أعلى μ=.2. عندئذ، وبأفتراض عدم وجود انحراف في نسبة المدخنين في المجتمع بعيداً عن π=.2، سنجد أن النسبة في أي عينة حجمها 50 مفرده يتم إختيارها سيكون بها خطأ لا يزيد عن 15. من μ=.2 ، هذين المثالين يوضحا أن مفتاح فهم فائدة إحصاء ما يكمن في فهم كيف أن هذا الإحصاء يمكن أن يتغير من عينه عشوائية إلى أخرى، بمعنى أخر نحن نحتاج إلى فهم توزيع القيم المكنة لهذا الأحصاء خلال كل العينات العشوائية المكن سحبها من المجتمع.

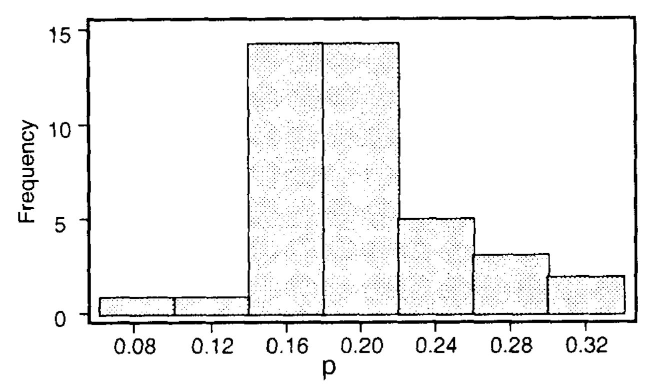
توزيع قيم إحصاء ما لكل العينات العشوائية المكنة يسمى بتوزيع المعاوينة **Sampling Distribution** . توزيع المعاينة لأحصاء ما له نفس الخصائص الأحصائية التي لأي توزيع إحتمالي، فمثلا له متوسط و إنحراف معياري وشكل بياني معين. لذا فتوزيع المعاينةببساطة هو توزيع إحتمالي يستخدم بصفة خاصة للنواتج المكنة لأحصاء ما لكل العينات العشوائية المكنه متساوية الحجم والمسحوبه من المجتمع موضوع الأهتمام.

بإستخدام برنامج Minitab حصلنا على المدرج التكراري عن 40 قيمة لـ $\bar{X}$ وذلك من جدول (٥-١) وهذا المدرج التكراري موضح بيانيا في شكل (٥-١). أيضا المدرج التكراري عن 40 قيمه لـ P (من جدول(٥-٢)) موضح في شكل(٥-٢). هذه المدرجات التكرارية تصور التذبذبات في كل من$\bar{X}$, P عبر 40 عينه تم محاكاتها وكذلك توزيعات المعاينة التقريبية لكل من$\bar{X}$, P عبر كل العينات العشوائية المكنه ذات الحجم n=10 و n=50 على التوالي.

من المعلوم أن إحصاءات العينة تصلح كمقدرات لمعالم المجتمع. في هذا السياق فإن الإنحراف المعياري لتوزيع معاينة ما (أي الانحراف المعياري لأحصاء ما) يقيس دقة هذا الأحصاء. بمعنى آخر، فالأنحراف المعياري لإحصاء ما يدل على الدرجة التي يمكن تبتعد بها قيم هذا الأحصاء عن قيمة المؤشر الحقيقية من عينة إلى أخرى. الأن، هل توصلت إلى معرفة ماذا نعني بأفضل إحصاء للمؤشر محل الأهتمام ؟ من المرغوب فيه أن يكون للأحصاء إنحراف معياري صغير بحيث أنه لأي عينة يكون من غير المحتمل أن يبتعد هذا الأحصاء كثيرا عن قيمة المؤشر. الإنحراف المعياري لإحصاء ما غالبا ما يسمى بالخطاء المعياري **Standard Error**.



شكل (٥-١): المدرج التكراري لعدد 40 قيمة لـ $\overline{X}$



شكل (٥-٢): المدرج التكراري لعدد 40 قيمة لـ P

توزيع المعاينة **Sampling Distribution** هو التوزيع الأحتمالي للقيم الممكنة (نواتج) لإحصاء ما لجميع العينات العشوائية الممكنة التي من نفس الحجم. الخطأ المعياري **Standard Error** هو الإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة، أي أن الخطاء المعياري هو الإنحراف المعياري لجميع القيم الممكنة لأحصاء ما في جميع العينات العشوائية التي من نفس الحجم.

الآن، نحدد المتوسطات، الأنحرافات المعيارية للأحصاءات $P, \overline{X}$ في الأمثلة المحاكاة. في مثال عينات أوزان المنظفات الصناعية الموضحة في جدول (٥-١)، أمكن أيجاد متوسط 40 قيمة من قيم $\overline{X}$ وهي (عمليا، تم إستخدام برنامج Minitab).

$$\frac{50.02 + 49.84 + \dots\dots\dots + 50.01}{40} = 49.98$$

أما متوسط 40 نسبة من النسب p (نسبةالمدخنين)، فهي:

$$\frac{.14 + .20 + \dots\dots\dots + .30}{40} = .188$$

ولتحديد الخطأ المعياري، يجب أولا حساب التباين. تباينات كل من $\overline{X}$,P اعتمادا على 40 قيمه في جدولي (٥-١)، (٥-٢) أمكن الحصول عليها كما يلي:

$$\text{Var}(\overline{X}) = \frac{(50.02 - 49.98)^2 + (49.48 - 49.98)^2 + \dots\dots\dots + (50.01 - 49.98)^2}{40 - 1}$$

$$= .023975$$

and

$$Var(P) = \frac{(.14 - .188)^2 + (.20 - .188)^2 + ... + (.30 - .188)^2}{40 - 1} = .0023535$$

الأخطاء المعيارية في كل من $\overline{X}$, P هي الجذر التربيعي للتباينات:

$$SE(\overline{X}) = \sqrt{.023975} = .15484$$

$$SE(P) = \sqrt{.0023535} = .018527$$

جدير بالذكر أن ما سبق هو تقديراً للأخطاء المعيارية لكل من $\overline{X}$,p أما لحساب الأخطاء المعيارية الفعلية أو الحقيقية، فالأمر يتطلب الأخذ في الأعتبار جميع العينات العشوائية الممكنة والتي من نفس الحجم. ومن الواضح أن هذا أمر مستحيلا . من المهم أن ندرك أنه عمليا، نختار عينة واحدة فقط في أي وقت ثم نسجل قيمة واحدة فقط من القيم الممكنه لأحصاء ما. لنفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من مجتمع ما متوسطة μغير معلوم ولنفرض أكثر أن متوسط هذه العينة كانت $\overline{X} = 30$ وهذه القيمة تعد أفضل تقدير لـ μ . والان، إلى أي مدى تبتعد هذه القيمة عن μ؟ بالطبع نحن لا نعرف ذلك بكل تأكيد، لأننا لا نعرف قيمة محددة لـ μ، ومع ذلك فتوزيع المعاينة لهذا الاحصاء $\overline{X}$ يخبرنا إلى اي مدى تنحرف قيمة $\overline{X}$ في العينة عن قيمة المؤشرμ، فمثلا إذا عرفنا أن قيمة $\overline{X}$ تقع في حدود 4 وحدات (زائد أو ناقص) من μ وذلك في 95% من جميع العينات العشوائية المتساوية الحجم، عندئذ نكون على ثقة بأنه مع هذه العينة سنجد أن القيمة الفعلية μ تقع بين 34,26 . وعلى ذلك فهذا المثال يوضح أن أول خطوة في تحديد منفعة أي إحصاء لعمل استنتاج حول المؤشر هو التعرف على توزيع المعاينة لهذا الإحصاء.

والان كيف يمكن تحديد توزيع المعاينة لأحصاء ما (أي توزيعه لجميع العينات المكنه) إذا كان لدينا عينة واحدة فقط ؟ بالطبع عينة واحدة بمفردها لا تعطي هذه المعلومات، ومع ذلك فبدمج المعلومات المستمدة من عينة عشوائية واحدة مع بعض النظريات الأحصائية، يمكنا على الأقل تحديد توزيع المعاينة بصور تقريبية. في الجزء المتبقي من هذا الفصل سنقدم مفاهيم إحصائية هامة تسمح لنا بتحديد توزيعات المعاينة لثلاث إحصاءات أساسية : متوسط العينة $\overline{X}$ ،النسبة في العينة p، تباين العينة S^2. أما توزيعات المعاينة لبعض الإحصاءات الاخرى فقد قدمت في الفصول التالية بالإضافة إلى دراسات تطبيقية تستخدم فيها تلك التوزيعات.

في إطار استخدام الإحصاءات لتقدير المعالم، فإننا يجب أن نؤكد على نقطة هامة: علينا أن ندرك أن المجتمعات (أو العمليات) تتغير بمرور الزمن، فمثلا، إذا كانت آلات التعبئة لم يحافظ عليها بطريقة سليمة وأن العاملين لم يعاد تدريبهم بطريقة صحيحة، فإن متوسط الوزن في عمليات التعبئة والإنحراف المعياري ربما ينحرفا كثيرا عن القيم المستهدفة. أيضا من خلال زيادة الجهود التعليمية والتثقيفية، فإن نسبة الطلبة الجامعيين اللذين يدخننون ربما تتناقص مع مرور الزمن. لذلك فمن المهم حقا أن ندرك وأن نتذكر دائما أن أي عينة تعكس خصائص المجتمع (أو العملية) فقط في الوقت الذي تسحب فيه العينة. الطريقة الفعاله لاكتشاف الإنحرافات الهامة في المعالم الرئيسية هو أن ننشيء نظاما للمعاينة المستمرة، بمقتضاه تسحب عينات على فترات منتظمة، وحيث أن كل عينة تعكس المجتمع في الوقت الذي سحبت فيه، فإن المقارنات بين العينات عبر الزمن ربما توضح التغيرات التي تطرا على مؤشرات المجتمع. وسوف تتضح هذه النقطة بالتفصيل كلما تابعنا الفصول التالية من خلال تطبيق الطرق الإحصائية.

أساسيات الإستنتاج الإحصائي: Fundamentals of Statistical Inference

نتذكر من الفصل الأول أن إستخدام بيانات العينة لفهم بعض الخصائص الهامة في المجتمع (أو العملية) محل الإهتمام يسمى بالإستنتاج الإحصائي Statistical Inference ونحن ندرس في هذا الكتاب نوعين من الإستنتاج الإحصائي، النوع الأول من الإستنتاج يسمى التقدير Estimation والذي يمكن تقسيمة إلى التقدير بنقطة Point estimation والتقدير بفترة Interval estimation. في التقدير بنقطة (أو التقدير وحيد القيمة) تكون النتيجة النهائية هي تقدير وحيد أي رقم يصلح كقيمة تخمينية جيدة للمعلمه. بمعنى أخر، التقدير بنقطة هو قيمة إحصاء ما تحددت من عينة معينة، وعلى ذلك فالإحصاء يعرف أيضاً على أنه مقدر Estimator فمثلاً، ربما نشاهد في عينة عشوائية من الفواتير أن 14% من الفواتير بها أخطاء، بالتالي من الممكن إستخدام 14% كتقدير وحيد القيمة لنسبة الفواتير الخطأ في مجتمع الفواتير ككل. وإلى أن نصل إلى الفقرة التالية والتي نحلل فيها عينة الفواتير، سنستمر في العمل تحت فرض أن معدل الخطأ في الفواتير في المجتمع هو 14%. في التقدير بفتره، يتكون التقدير من مدى من الأعداد. ففي مثال أخطاء الفواتير، نحن نعلم أن 14% هي المعدل المحتمل للخطأ في المجتمع وليس المعدل الدقيق. إذا امكنا أن نحدد بثقة أن معدل الخطأ في المجتمع بين 12%، 16% فإنه يمكن إستخدام هذه الفترة كمدى يعمل به لمعدل الخطأ في المجتمع، المدى من 12% إلى 16% يسمى التقدير بفترة Interval estimation.

النوع الثاني من الإستنتاج الإحصائي يسمى بإختبارات الفروض hypothesis testing والفروض الإحصائية Statistical hypothesis هي ادعاء أو إعتقاد يتعلق بقيمة المؤشر المجهول، وسوف يتضح في الفصول التالية، أن إختبارات الفروض ذات علاقة قريبة جداً من التقدير. في إختبارات الفروض بدلاً من تقدير قيم المعالم المجهولة، نختبر مدى صحة أو قانونية إدعاء أو تخمين يتعلق بقيمة للمعلمة، بمعنى أننا نبحث فيما إذا كانت بيانات العينة تفضي إلى تأييد أو مناقضة إدعاء أو تخمين معين يتعلق بقيمة للمعلمة فمثلاً، نفرض أن قسم الكمبيالات في شركة ما كان لديه قناعة كافية بأن نسبة الفواتير التي بها أخطاء لن تزيد عن 10%. يقوم القسم بصفة دورية بتحليل عينات عشوائية من الفواتير بواسطة طاقم من المراجعين المهره وذلك لاختبار الإدعاء بأن نسبة الفواتير الخطأ في مجتمع الفواتير ككل لن تزيد عن 10%. إعتماداً على نتائج العينات الدورية، إذا إتضح أن هذا الإدعاء غير صحيح، فإن الإدارة تفكر في إعداد مقاييس تصحيحية جديدة. لنفرض مثلاً أنه في عينة عشوائية معينة كان قد تحدد بفترة لمعدل الخطأ في المجتمع ليكون من 12% إلى 16% في هذه الحالة فإن نتائج هذه العينة تشير بوضوح إلى أن النسبة المستهدفة 10% قد تم تجاوزها.

من المناقشة السابقة، يمكن تلخيص أهم المصطلحات على النحو التالي:

تعريفات أساسية في الإستنتاج الأحصائي

1 -توزيع المعاينة Sampling Distribution هو توزيع إحتمالي لجميع القيم المكنة لإحصاء ما في كل العينات العشوائية المكنة والتي في نفس الحجم.

2 - الخطأ المعياري Standerd Error هو الإنحراف المعياري لقيم الإحصاء المكنة في كل العينات العشوائية المكنة التي من نفس الحجم.

3- المقدر **Estimator** هو أي إحصاء يستخدم لتقدير قيمة المؤشر المجهولة.
4- التقدير بنقطة **Point estimate** هو قيمة المقدر الذي ينتج من عينة محددة، وهو يعطي أفضل تخمين لقيمة المؤشر المجهولة.
5- التقدير بفترة **Interval estimate** هو مدى من الأعداد يعتقد أنها تحتوي بداخلها على قيمة المؤشر المجهولة.
6- الفروض الإحصائية **Statistical hypothesis** هي إدعاء أو إعتقاد أو تخمين يتعلق بقيمة المؤشر المجهولة.

(٥-٤) الخصائص المرغوبة في الإحصاءات (المقدرات):
Desirable Properties of Statistics (Estimators)

من الضروري أن ندرك أنه قبل عمل أي إستنتاج إحصائي، هناك قضيتين يجب أن نتوصل إلى حل لهم:

1- ما هو أفضل إحصاء يمكن أن يستخدم لعمل إستنتاج حول المؤشر الذي نهتم به؟

2- ما هو توزيع المعاينة لهذا الإحصاء الأفضل؟

لحل القضية الأولى، دعنا نتأمل السؤال التالي: ما هي الخصائص التي يجب ان نبحث عنها عند إختيار إحصاء ما ليصلح كمقدر للمؤشر ؟ على المستوى العام، الإجابة واضحة، نحن نريد مقدر يكون تقديره النهائي قريبا بقدر الإمكان من القيمة الفعلية للمؤشر. ومع ذلك فإن دقة مقدر معين تعتمد على العينة التي يتم إختيارها عشوائيا. في بعض العينات، ربما تكون التقديرات الناتجة دقيقة تماما ومع البعض الاخر ربما تكون أقل دقة، اي أن الدقة في مقدر ما تتفاوت من عينة إلى أخرى وبالتالي لا يوجد تأكيد على تواجد دقة معينة متحققة في العينة التي تم سحبها، لذلك يجب أن نصف أداء مقدر ما بالدقة التي يحققها في المتوسط عبر كل العينات العشوائية الممكنة. هذا هو المعيار العام الذي تستخدمه عند إختيار مقدر ما. ولتطبيق هذا المفهوم، نستخدم معيارين محددين: نفضل مقدرات غير متحيزة **Unbiased** ولها أصغر خطأ معياري **Minimum Standard Error**.

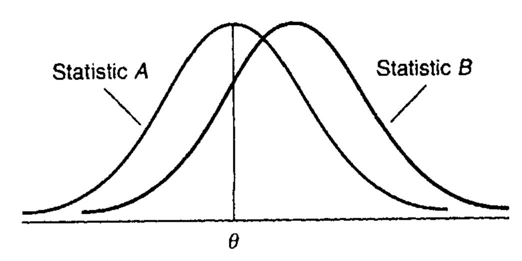
مقدرات غير متحيزة: Unbiased Estimators

التقدير الناتج من أي عينة محددة، من غير المحتمل ان يساوي قيمة المعلمه تماما، أكثر من ذلك، فمن المحتمل أن يكون أعلى أو أدنى من قيمة المعلمة المجهولة بكمية ما، ومن المرغوب فيه ان يكون متوسط التقديرات لجميع العينات العشوائية الممكنة يساوى قيمة المعلمه، بمعنى اننا نريد ان تكون القيمة المتوقعة للتقدير مساويا لقيمة المعلمه الفعلية. هذا يعني أنه يجب ألا يكون لقيم المقدر اتجاهاً منتظما عاليا أو منخفضاً عن قيمة المعلمه، فإذا كانت الحالة هكذا، نقول ان المقدر متحيز. بصفة عامة، المقدرات غير المتحيزة **Unbiased estimators** تفضل على المقدرات المتحيزة.

> يقال لمقدار ما أنه غير متحيز إذا كانت قيمته المتوقعة تساوى قيمة المعلمه

شكل (٥-٣) يوضح هذه النقطة بأظهار توزيعات المعاينة لأحصائين B وA والذي يمكن اعتبارهما تقديرات للمعلمة θ. (حرف يوناني: ثيتا). الأحصاء A أكثر ملائمة من الاحصاء B لأنه يعطي تقديرا

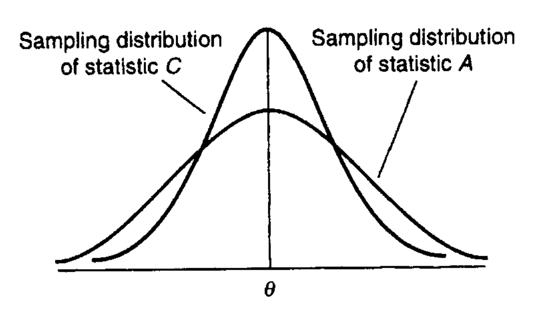
قريبا من θ، أي لأن القيمة المتوقعة لـA تساوي θ، $[E(A) = \theta]$ بينما القيمة المتوقعة لـB لا تكون كذلك $[E(B) \neq \theta]$.



شكل (٥-٣): توزيعات المعاينة لأحصائين، احدهما غير متحيز (A) الاخر متحيز(B)

مقدرات ذات أصغر خطأ معياري: Estimators With Minimum Standard Error

نفرض ان هناك مقدرين كلاهما غير متحيز، كيف لنا ان نختار بينهما؟ تأمل شكل (٥-٤) انه يظهر توزيعات المعاينة للأحصاءات C,A وهي تقديرات غير متحيزة للمعلمة θ ، أيهما يجب اختياره لتقدير θ: A أو C ؟ ولماذا؟ قبل متابعة القراءة، تمهل وفكر في إختيارك وخاصة السبب في هذا الإختيار.



شكل (٥-٤) توزيعات المعاينة لاحصائين غير متحيزين للمعلمه θ

الأحصاءC هو اكثر ملائمة من الاحصاءA ، لأنه يعطي تقديرا هو الأقرب إلىθ (وذلك لعينة محددة) أي لأن له أصغر خطأ معياري، بمعنى ان هناك إختلافا أقل في توزيع المعاينة لـ C. خلال عدد كبير من العينات العشوائية، التقديرات التي تنتج من استخدام الاحصاء C تكون أكثر إتساقا وقربا من θ عن تلك التقديرات من الأحصاء A. الأحصاء A يميل إلى إعطاء تقديرات ذات أخطاء كبيرة سواء أكانت هذه الأخطاء أعلى أو ادنى من θ. لذا فإن فرصة عينة معينة تعطي تقديرا قريبا من θ تكون أفضل مع استخدام المقدار C عن استخدام المقدار A.

والان أصبح واضحا ماذا قصدنا بـ"أفضل" إحصاء لتقدير مؤشر ما. في هذا الكتاب، عبارة "أفضل إحصاء لمؤشر ما" يقصد بها الاحصاء الذي يحقق المعيارين التاليين.

معايير أفضل إحصاء

١- ان يكون الاحصاء مقدرا غير متحيز للمؤشر محل الإهتمام.

٢- ان يكون للإحصاء أصغر خطأ معياري عن أي إحصاء أخر غير متحيز عند تقدير المؤشر محل الإهتمام.

أهم المعالم التي يتم تقديرها بكثرة وذات اهمية كبيرة هي: المتوسط μ ، التباين σ^2 (أو الإنحراف المعياري σ)، النسبة π. وتشير النظرية الاحصائية إلى أن إحصاءات العينة $\overline{X}$ ، P,S^2 تحقق المعيارين المشار إليهما سابقا، وهي تعتبر- من وجه نظرنا- أفضل إحصاءات لكل من π,σ^2,μ على التوالى. في الفصول الفرعية المتبقية من هذا الفصل، سوف نعتنى بإعادة حل القضية الأساسية الثانية أخذاً في الاعتبار الاستنتاج الاحصائي المتعلق بكل من π,σ^2,μ ، أي تعين هوية توزيعات المعاينة لكل من $P,S^2, \overline{X}$.

تمارين:

(٥-١) ما هو الغرض من التقدير ؟

(٥-٢) وضح لماذا يعد التقدير متغيرا عشوائيا ؟

(٥-٣) وضح بكلمات من عندك، ما هو توزيع المعاينة ؟

(٥-٤) ما هو الفرق الواضح بين توزيع المعاينة والتوزيع الإحتمالي ؟

(٥-٥) ما هو الفرق بين التوزيع التكراري النسبي لمشاهدات العينة وتوزيع المعاينة لمتوسط العينة؟

(٥-٦) ما هو الفرق بين الإنحراف المعياري والخطأ المعياري ؟

(٥-٧) بفرض إنك ترغب في استخدام متوسط العينة $\overline{X}$ لتقدير متوسط المجتمع μ، لماذا يكون من المفيد ان تعرف توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ ؟

(٥-٨) فيما يلي بيانات عن 25 عينة بكل عينة خمس مشاهدات مسحوبة من عمليات تنتج نوع معين من الغزل القطني، المشاهدات تمثل مقاومة الشد بالرطل لكل قطعة من ذلك الغزل. افترض أن تلك العملية الإنتاجية تعطي غزلا بمتوسط مقاومة للشد تساوي 47.5 رطل بانحراف معياري 2.5 رطل.

رقم العينة	قيم العينة				
1	44	46	48	52	49
2	44	47	49	46	44
3	47	47	49	46	44
4	45	47	51	46	48
5	44	41	50	46	50
6	49	46	45	46	49
7	47	48	50	46	47
8	49	46	51	48	46
9	47	42	48	44	46
10	46	48	45	51	50
11	45	47	51	48	46
12	52	51	48	48	45
13	45	45	47	49	44
14	46	47	43	48	45
15	48	49	52	46	51

16	44	46	45	47	52
17	48	50	47	46	49
18	48	52	51	47	46
19	47	51	50	46	49
20	45	46	48	47	49
21	45	48	46	45	49
22	46	49	50	46	48
23	49	48	46	52	45
24	47	49	45	46	50
25	44	51	50	48	46

(أ) لكل عينة، حدد قيمة متوسط العينة $\overline{X}$ وتباين العينة S^2.

(ب) من إجابتك عن (أ)، ماذا يتضح لك حول الأحصاءات $\overline{X}$,S^2؟ اشرح.

(جـ) مستخدما طرق الفصل الثانى، ارسم المدرج التكراري لقيم $\overline{X}$ البالغ عددها 25 قيمة، ما الذي يعبر عنه هذا المدرج التكراري؟ اشرح

(د) كرر المطلوب (جـ) لبيانات S^2 البالغ عددها 25.

(٥-٩) مستخدما القيم الـ25 لمتوسطات العينات $\overline{X}$ في التمرين(٥-٨)، ارسم خريطة التتبع البياني. هل اكتشفت نظاما غير متوقع في هذه القيم؟ وضح ذلك.

(٥-١٠) في عملية إنتاجية ما تسحب يوميا عينة عشوائية من 100 وحده وتفحص لاكتشاف الوحدات المعيبة. فيما يلي عدد الوحدات المعيبة التي ظهرت في العينات اليومية ولمدة 25 يوما، هذا بفرض ان نسبة المعيب في العملية الإنتاجية هذه هي 20%.

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
عدد المعيب	2	1	4	3	2	2	0	2	3	2	1	2	3
اليوم	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
عدد المعيب	2	1	2	3	3	4	3	5	5	6	5	7	

(أ) لكل عينة يومية، حدد نسبة الوحدات المعيبة P.

(ب) من إجابتك في (أ) ما الذي يتضح لك فيما يتعلق بالاحصاء P؟ وضح ذلك.

(جـ) استخدم طرق الفصل الثاني لرسم المدرج التكراري لقيم P وعددها 25. ما الذي يدل عليه المدرج التكراري؟ وضح ذلك.

(٥-١١) مستخدما قيم P الـ 25 في التمرين (٥-١٠) ارسم خريطة التتبع البياني. هل اكتشفت نظاما غير متوقع في هذه لقيم؟ وضح ذلك.

(٥-١٢) اشرح الفرق بين التقدير بنقطة والتقدير بفترة ثقة.

(٥-١٣) هل هناك فرق بين التقدير والمقدر؟ اشرح.

(٥-١٤) ما هو نوع الإستنتاج الذي تحتاجه إذا رغبت في تقييم مشروعية ادعاء ما يتعلق بقيمة معلمه ما؟

(٥-١٥) اذكر القضيتين الأساسيتين اللتين يجب ان تتوصل إلى حل لهم قبل عمل اي استنتاج احصائي.

(٥-١٦) اشرح معنى أفضل إحصاء.

(٥-١٧) اعتمادا على عينة عشوائية، قدر أحد المديرين في مؤسسة كبيرة لنشر الأخشاب ان العاملين بها تتردد على المستشفى في المتوسط 9.9 يوم في السنة.
(أ) هل العدد 9.9 تقدير أم مقدر ؟ وضح إجابتك.
(ب) ما هي المعلمه التي تم تقديرها ؟

(٥-١٨) اشرح ما يلي:
(أ) ماذا نعني عندما نقول أن المقدر متحيز.
(ب) المميزات من تقدير غير متحيز.
(جـ) السبب في الرغبة أن يكون المقدر له خطأ معياري صغير.

(٥-١٩) هناك سؤال وجهة طالب مشوش المعلومات، قال: تعلمنا ان $\overline{X}$ هو مقدر غير متحيز لـ μ. لكن إذا كان لدينا عينة ما، فإن $\overline{X}$ من المؤكد تقريبا إما أن تكون اكبر من μ او أقل من μ بكمية ما، فإذا كانت $\overline{X}$ أدنى من μ مثلا، فكيف يكون هذا الأحصاء غير متحيز ؟ وضح مفهوم عدم التحيز لهذا الطالب.

(٥-٢٠) الاحصاء R له المتوسط θ (حيث قيمة θ غير معلومه) وخطأ معياري 11.2، أما الاحصاء V له المتوسط θ وخطأ معياري 14.7:
(أ) ما هو الاحصاء الذي يفضل كمقدر للمعلمه θ ؟ لماذا ؟
(ب) لعينة معينة، هل المقدر المفضل في (أ) يعطي بالضرورة مقدرا قريبا من المعلمه θ ؟ اشرح ذلك.

(٥-٢١) افترض انك اجريت مقابله مع عينة عشوائية من المشترين غادروا احد المحلات التجارية، ما هو إحصاء العينة الذي يجب ان تستخدمه لتقدير:
(أ) متوسط كمية النقود التي ينفقها المشترين على البضائع من هذا المحل.
(ب) الإنحراف المعياري لاعمار المشترين.
(جـ) نسبة الأفراد الاكبر سنا بين هؤلاء المشترين.

(٥-٢٢) ما هو الفرق الأساسي من حيث الهدف بين تقدير المعالم وإختبار الفروض الإحصائية ؟

(٥-٥) توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\overline{X}$: The Sampling Distribution of The Sample Mean $\overline{X}$

بصفة عامة، توزيع المعاينة لمتوسط العينة $\overline{X}$ يعتمد على توزيع المجتمع والذي منه تتم المعاينة، بمعنى أنه إذا أمكن تحديد توزيع المجتمع، فإنه عادة يمكن للإحصائي تحديد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$. فمثلاً، إذا قمنا بالمعاينة من مجتمع له توزيع طبيعي، فإن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ يكون أيضاً هو التوزيع الطبيعي. بإختصار نحن نناقش نتيجة هامة تعرف بإسم نظرية النهاية المركزية **Central Limit Theorem**. هذه النظرية تؤكد أنه أيا كان توزيع المجتمع، فإن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ هو تقريباً توزيع

طبيعي بشرط أن يكون حجم العينة كبيراً بدرجة كافية. وترجع أهمية هذه النتيجة إلى أن الإستنتاجات المتعلقة بمتوسط المجتمع، أيا كان توزيعه، تعتمد على توزيع المعاينة الطبيعي وذلك إذا أخذنا عينة كبيرة بدرجة كافية.

(٥-٥-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ $\overline{X}$: The Mean and Standard Error of $\overline{X}$

من المكن تحديد المتوسط والخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ (أي المتوسط والخطأ المعياري لتوزيع المعاينة للأحصاء $\overline{X}$) بدون معرفة توزيع المجتمع (أو العملية). نفرض أنه تمت المعاينة من مجتمع كبير بمتوسط μ وإنحراف معياري(*) σ. من المكن أن نوضح رياضياً أنه لعينة ذات الحجم n، أن القيمة المتوقعة لـ $\overline{X}$ لجميع العينات العشوائية المكنة من المجتمع (أو العملية) هو:

$$E(\overline{X}) = \mu \tag{5-1}$$

والخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ لجميع العينات العشوائية متساوية الحجم هو:

$$SE(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.2}$$

وذلك بغض النظر عن شكل توزيع المجتمع (أو العملية).

الصيغة (5.2) تنص على أنه لكل $n>1$، فإن الأختلاف في قيم $\overline{X}$ يكون أقل من الأختلاف في قيم المجتمع (أو العملية). البيانات المحاكاة في جدول (٥-١) يمكن أن تساعد في تفهم هذه النتيجة الهامة. تذكر أن الأربعين قيمة لـ $\overline{X}$ تتفاوت ما بين 49.68، 50.26 أوقية بمدى قدرة 58. أوقية. الآن، تخير واحدة من الأربعين عينة ثم أوجد مدى الأوزان داخل هذه العينة. فمثلاً، الأوزان في أول عينة تتراوح من 49.47 إلى 50.80 أوقية والمدى هو 1.33 أوقية. الأوزان في ثاني عينة تتراوح من 49.30إلى50.42 أوقية والمدى هو 1.12 أوقية. الأوزان في ثالث عينة تتراوح بين 49.06 إلى 50.62 أوقية والمدى هو 1.56 أوقية وهكذا... وكما ترى الأختلافات في أوزان مفردات أي عينة أكبر من الأختلافات بين قيم $\overline{X}$.

لتوضيح كيفية تحديد الخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ نرجع مرة أخرى إلى مثال عملية التعبئة في الفصل (٥-٢) والذي فيه نسحب عشوائياً عينات كل ذات الحجم $n=10$ من العملية الأنتاجية ذات المتوسط $\mu=50$, $\sigma=.5$. بإستخدام الصيغ (5.1)، (5.2) نجد أن متوسط الأحصاء $\overline{X}$ في جميع العينات العشوائية المكنة ذات الحجم $n=10$ في عملية التعبئة هذه هو:

$$E(\overline{X}) = 50$$

والخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ في جميع العينات ذات الحجم $n=10$ هو:

$$SE(\overline{X}) = \frac{.5}{\sqrt{10}} = .1581$$

تذكر أنه في محاكاة 40 عينة والموضحة في جدول (٥-١) أن متوسط الأربعين قيمة من قيم $\overline{X}$ كانت 49.98 وأن الخطأ المعياري قد حسب ليكون: $SE(\overline{X})=.15484$.

من الواضح أن القيم 15484, 49.98 . الناتجة عن 40 عينة هي قيم قريبة من القيم النظرية المناظرة لها وهي: 50، 1581. على التوالي والناتجة- نظرياً- من جميع العينات العشوائية المكنة ذات الحجم

* خلال مناقشتنا للإستنتاج الأحصائي، نفترض أن حجم المجتمع هو على الأقل أكبر 20 مرة من حجم أى عينة عشوائية يتم سحبها. وهذا يؤكد الاستقلال الأحصائي بين نواتج المعاينة كما بينا في الجزء (٣-٤).

n=10، والسبب الوحيد للأختلاف الذي ظهر بينهما يرجع إلى أننا قد حاكينا 40عينة فقط بدلاً من محاكاة عدداً كبيراً جداً (لانهائى) من العينات.

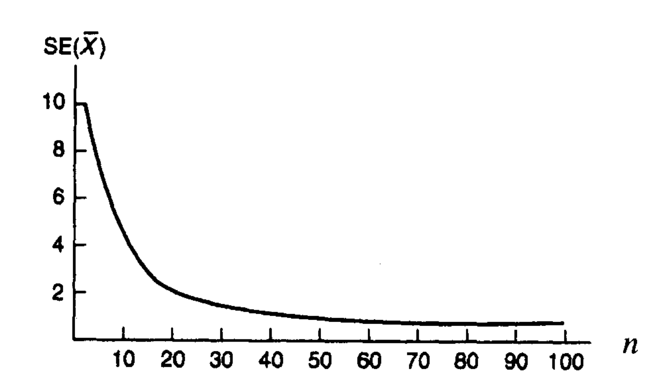
عموماً من المهم أن ندرك المعنى الهام للصيغ (5.1)و (5.2):

1- تفيد الصيغة (5.1) أنه إذا أمكنا تحديد جميع العينات الممكنة ذات الحجم n=10 والتي يمكن سحبها من المجتمع (أوالعملية) وتم حساب قيمة $\bar{X}$لكل منها، فإن متوسط قيم$\bar{X}$ يجب أن يكون مساوياً μ: متوسط المجتمع، وقيم $\bar{X}$ هذه تميل لأن تتجمع حول μ. وحيث أن متوسط القيم الممكنة لـ $\bar{X}$ هو μ، فإن الأحصاء $\bar{X}$ يصبح بالتقريب مقدراً غير متحيزاً لـμ.

2- تفيد الصيغة (5.2) أن الخطأ المعياري لـ $\bar{X}$ يعتمد على كل من σ (الأنحراف المعياري للمجتمع) وحجم العينة n وأنه كلما زادت n كلما تناقص الخطأ المعياري لـ$\bar{X}$، لذلك فإن قيم$\bar{X}$ للعينات الكبيرة تكون أكثر قرباً من μ عن العينات الصغيرة. بمعنى آخر، كلما زاد حجم العينة، كلما تحسنت دقة متوسط العينة كتقدير لمتوسط المجتمع. فمثلاً، إذا أختيرت عينة عشوائية حجمها n=25 مفرده فإن قيمة$\bar{X}$ ستكون أكثر دقة $\sqrt{25}=5$ مرات عند تقدير متوسط المجتمع μ عن إختيار عينة عشوائية مكونه من مفردة واحدة. وهذه خاصية هامة للأحصاء $\bar{X}$لأنها تؤكد أنه للعينات الكبيرة الحجم، يتوقع أن تكون قيمة $\bar{X}$ قريبة جداً من متوسط المجتمع μ.

إذا تأملنا الصيغ (5.1)و (5.2) ندرك أنها تحقق أمور بديهية فمثلاً، لماذا القيمة المتوقعة لـ $\bar{X}$ تساوي μ؟ حسناً؟ ما هو الشئ الأخر الذي يمكن أن تساويه؟ الذي نندهش له هو أن نجد أن متوسط قيم $\bar{X}$ لجميع العينات يمكن أن يكون أكبر من μ أو يكون أقل من μ، أما أن يكون متوسط $\bar{X}$ لجميع العينات مساوياً μ فهو في الحقيقة نتيجة منطقية ومعظمنا يتوقع ذلك. أيضاً لماذا توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ له إختلاف أقل (أي خطأ معياري أقل) من توزيع المفردات في المجتمع؟ لماذا الأختلاف في$\bar{X}$ يتناقص كلما زاد حجم العينة؟ التفسير بسيط، عادة ما تشتمل العينة العشوائية على مشاهدات بعضها أكبر من متوسط المجتمع والباقي أقل من متوسط المجتمع، لذلك فإن متوسط المشاهدات في العينة الكبيرة يضمن أن أيه مشاهدات أكبر في القيمة من متوسط المجتمع هي مكافئة إلى حد ما للمشاهدات التي تقل في القيمة عن متوسط المجتمع. وعملية المتوسط هذه تتجه لأن تعطي قيماً لـ$\bar{X}$ تكون قريبة من متوسط المجتمع μ. بالتالي فإن إختلاف قيم$\bar{X}$ (في جميع العينات العشوائية التي من نفس الحجم) عن μ تكون أقل من إختلاف المشاهدات الأصلية في المجتمع، ومع زيادة حجم العينة يزداد توقعنا بأن العينة تمثل توزيع المجتمع ويزداد توقعنا أيضاً بأقتراب متوسط العينة من μ، لذا يجب ألا نندهش بأن الأختلاف في$\bar{X}$ (معبراً عنه بالخطأ المعياري) يتناقص كلما تزايد حجم العينة n.

ولكي نوضح طبيعة الخطأ المعياري لـ$\bar{X}$ كدالة في n، دعنا نفترض أنه تمت المعاينة من مجتمع له إنحراف معياري $\sigma=10$ وأنه تم حساب $SE(\bar{X})$ بالصيغة (5.2) عند قيم مختلفة من n، ورسمت النتائج بيانياً كما في شكل (٥-٥). يلاحظ في هذا الشكل أن التناقص في الخطأ المعياري لـ$\bar{X}$ هو أمر واقعي إلى حد ما كلما أخذت n قيماً أكبر، ولكن كلما زادت n عن 30 فإن الأنخفاض يتناقص تدريجياً إلى حد بعيد. هذا يعني أن زيادة حجم العينة بصورة كبيرة جداً ليس ضروريا لعمل إستنتاجات عن μ إعتماداً على$\bar{X}$. في الحقيقة، العينة كبيرة الحجم عادة ما تكون ذات تكلفة مؤثرة، كما أن العمل في سبيل الحصول على عينات أكبر غالباً مايؤدي إلى أنواع آخرى من الأخطاء، كما وضح ذلك في الفصل الأول.



شكل (٥-٥) : تأثير حجم العينة على الخطأ المعياري لمتوسط العينة

مثال (٥-٢)

بفرض أنه تمت المعاينة من مجتمع فيه $\mu=100$، $\sigma=20$ وذلك عند أحجام العينات التالية، حدد المتوسط والخطأ المعياري لـ $\bar{X}$: (أ) $n=4$، (ب) $n=16$، (جـ) $n=64$.

الحل

لأي حجم عينة، القيمة المتوقعة لـ $\bar{X}$ هي نفسها متوسط المجتمع (أو العملية) وهكذا، نجد أنه في هذا المثال:

$$E(\bar{X}) = 100$$

(أ) عند $n=4$، فإن الخطأ المعياري لـ $\bar{X}$ يكون:

$$SE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{4}} = 10$$

(ب) عند $n=16$

$$SE(\bar{X}) = \frac{20}{\sqrt{16}} = 5$$

(جـ) عند $n=64$

$$SE(\bar{X}) = \frac{20}{\sqrt{64}} = 2.5$$

من مثال (٥-٢)، يلاحظ أنه للحصول على نصف الخطأ المعياري ($\bar{X}$) فإنه يجب زيادة حجم العينة بالضرب في المعامل 4 ، بصفة عامة، التناقص في الخطأ المعياري لـ $\bar{X}$ يتناسب مباشرة مع زيادة الجذر التربيعي لـ n. لذلك فإنه لتخفيض SE($\bar{X}$) بالمعامل K، يكون من الضروري زيادة n بالمعامل K^2.

إستخدم الحاسب الآلي: Using the Computer

رأينا في الفصل الثاني أنه يمكن إستخدام الحاسب الآلي لتحديد متوسطات العينات، الإنحرافات المعيارية وكميات أخرى. الآن، نريد إستخدام الحاسب الآلي لمقارنة خصائص $\bar{X}$ مع إحصاءات أخرى يمكن إستخدامها كتقدير لمتوسط المجتمع μ.

مثال (٥-٣)

بالرجوع إلى الأربعين عينة الموضحة في جدول (٥-١)، كون إحصاء آخر لتقدير متوسط المجتمع وذلك بحساب متوسط أصغر وأكبر قيمة في كل عينة. بعد ذلك، إستخدم الأربعين قيمة لهذا الأحصاء الجديد لتحديد المتوسط والخطأ المعياري لهم. أخيراً، قارن ما توصلت إليه مع متوسط العينة $\bar{X}$ ثم حدد أي إحصاء له خطأ معياري أقل.

الحــل

في البداية، من الممكن أن نبرهن رياضياً أن الأحصاء الناتج من متوسط أقل وأكبر قيمة في أي عينة هو أيضاً مقدر غير متحيز لـμ. الأربعين قيمة لهذا الأحصاء هي على التوالي:

Sample Number:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(Min+Max)/2:	50.14	49.86	49.84	49.94	49.88	50.14	50.02	49.76	50.16	50.07
Sample Number:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(Min+Max)/2:	49.70	50.02	50.36	49.95	50.31	50.06	50.46	50.04	50.02	49.77
Sample Number:	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(Min+Max)/2:	50.26	49.74	50.05	50.04	49.85	50.19	49.97	50.05	50.14	49.93
Sample Number:	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
(Min+Max)/2:	50.03	50.25	49.67	49.95	49.96	50.07	49.96	49.69	49.89	49.80

بإستخدام برنامج Minitab للقيم الأربعين السابقة لهذا الأحصاء، نحصل على:

```
MEAN = 49.99
STDEV= .18388
```

حيث أن الأحصاء الجديد هو تقدير غير متحيز لـμ، فيجب ألا نندهش عندما نجد أن متوسط الأربعين قيمة الجديدة قريباً جداً من $\mu=50$ ولكن الخطأ المعياري لهذا الأحصاء الجديد (.18388) هو تقريباً أزيد 20%عن الخطأ المعياري لـ $\bar{X}$ $[SE(\bar{X})=.15484]$. توحي هذه الملاحظة بأن قيم الأحصاء الجديد تتجه إلى أن تنحرف عن قيمة $\mu=50$ أكثر مما تنحرف به قيم$\bar{X}$عن μ وذلك للعديد من العينات العشوائية. هذه المقارنة تصل بنا إلى أن $\bar{X}$ هو أفضل إحصاء لـμ عن أي إحصاء آخر.

(٥-٥-٢) توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ عندما يكون للمجتمع توزيع طبيعي:

The Sampling Distribution of $\bar{X}$ when the Population or process Has a Normal Distribution

علمنا من البند السابق أنه أيا كان توزيع المجتمع، فإن متوسط $\bar{X}$ لجميع العينات المتساوية الحجم n هوμ وأن الخطأ المعياري لـ$\bar{X}$ هو $\sigma/\sqrt{n}$. فإذا فرضنا أن المجتمع الذي تتم منه المعاينة له توزيع طبيعي بمتوسط μ وإنحراف معياري σ، فإنه يمكن أن نبرهن رياضياً أن توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$ هو أيضاً توزيع طبيعي بمتوسط μ وخطأ معياري $\sigma/\sqrt{n}$. هذه النتيجة الهامة ترجع إلى أن أي توليفة خطية من متغيرات عشوائية طبيعية هي أيضاً متغير عشوائي طبيعي. حيث أن $\bar{X}$ يمكن التعبير عنها في

صورة توليفة خطية من قيم عينة عشوائية(*) مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي، فإن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ يكون له توزيع طبيعي.

يلاحظ أنه إذا كان توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ هو توزيع طبيعي بمتوسط μ وخطأ معياري $\sigma/\sqrt{n}$ ، فإن توزيع الأحصاء المعياري Z، حيث:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \tag{5.3}$$

هو التوزيع الطبيعي (انظر الفصل (٤-٣)). كما وضحنا في الفصل الرابع، يمدنا التوزيع الطبيعي المعياري بوسيلة ملائمة لتحديد الأحتمالات لأي متغير عشوائي طبيعي. ويؤدي المتغيرZ وبدقة نفس الغرض لـ $\overline{X}$ عندما يكون توزيع المعاينه لـ $\overline{X}$ هو التوزيع الطبيعي.

مثـــال (٥-٤)

مصنع ينتج كراسي ترتكز على قاعدة دائرية، اعتماداً على التجارب السابقة فإن مفتش الرقابة على العملية الأنتاجية مقتنع بما يلي:

(1) متوسط قطر القاعدة الدائرية 5 سم. (2) الانحراف المعياري لها 005. سم. (3) توزيع العملية الأنتاجية هو التوزيع الطبيعي. يهتم الفاحص بالمحافظة على متوسط قطر العملية الأنتاجية عند 5 سم، ولتحقيق ذلك، تسحب عينات عشوائية بصفة دورية، حجم كل منها 9 كراسي وذلك في محاولة الاكتشاف أيه إنحرافات عن الأرقام الطبيعية المشار إليها.

(أ) حدد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$.

(ب) بفرض أن الفاحص سحب عينة عشوائية من 9 كراسي, وقيست أقطار قاعدتها ووجد أن: $\overline{X} = 5.004$ سم. ما هي إمكانية (إحتمال) أن متوسط القطر في تلك العينة العشوائية سيكون على الأقل 5.004 سم على فرض أن متوسط العملية باقيا عند 5 سم والإنحراف المعياري للعملية استمر ليكون 005. سم ؟

(جـ) ما هو حجم العينة التي يجب سحبها لتحقيق خطأ معياري لـ $\overline{X}$ يساوي 0.001 .

(د) في الجزء (جـ)، لماذا يفضل الفاحص أن يكون الخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ يساوي 001. عن أن يكون الخطأ المعياري كما حصلت عليه في الجزء (أ) ؟

الحل

(أ) حيث أن توزيع الأنتاجية مفترض أنه طبيعي له $\mu=5$، $\sigma=.005$، فإن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ يكون أيضا طبيعي بمتوسط $\mu = 5$ وخطأ معياري (عند n=9):

$$SE(\overline{X}) = .005 / \sqrt{9} = .001667$$

(ب) هذا السؤال يقع في صميم الأستنتاج الأحصائي. نتيجة العينة التي حصلنا عليها هي:

---

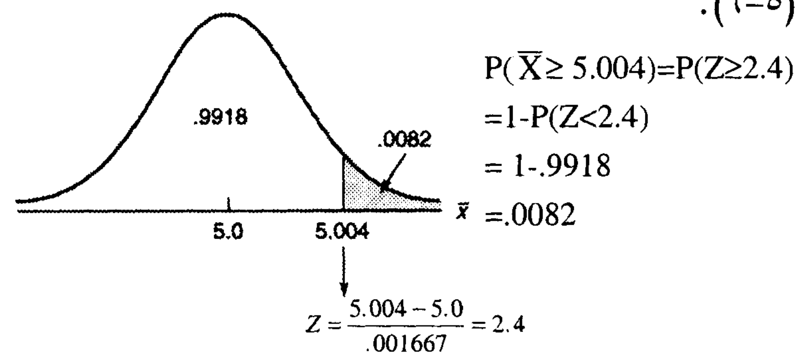
* يمكن التعبير عن متوسط العينة كما يلي:

$$\overline{X} = \left(\frac{1}{n}\right)X_1 + \left(\frac{1}{n}\right)X_2 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{1}{n}\right)X_n$$

حيث X_1, X_2 ...... , X_n هى قيم العينة التي تسحب عشوائياً من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

$\overline{X}$ =5.004 . ما هي فرصة (إحتمال) وقوع مثل هذا الناتج اذا افترضنا الحفاظ على معالم العملية الأنتاجية، (أي μ=5 سم، σ=.005 سم) ؟ اذا كان هذا الاحتمال كبير، فهذا يعني أن هناك سببا ضعيفاً لكي نشك في وقوع إنحراف عن متوسط العملية الأنتاجية، وبالتالي فإن أي تغيير في النظام الحالي للعملية الأنتاجية يعد عبئا على المصنع. من ناحية أخرى، اذا كان هذا الأحتمال صغيراً فمن الممكن أن يكون هناك سببا مقنعا للتصديق بوقوع إنحراف عن متوسط العملية الأنتاجية.

حيث أن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ هو الطبيعي بمتوسط μ=5 وخطأ معياري SE($\overline{X}$) =.001667، فإنه يمكن تحديد الأحتمال المطلوب بأن قيمة $\overline{X}$ هي على الأقل 5.004 وذلك بتحويل القيمة5.004 إلى قيمة Z المناظرة بنفس الطريقة التي وضحت في الفصل الرابع. التناظر بين$\overline{X}$,Z موضح في شكل(٥-٦).



شكل (٥-٦) : التناظر بين $\overline{X}$,Z لمثال (٥-٤)

من الواضح أن احتمال قدره أقل من 1% يعتبر صغيرا جدا، لذا فهناك سبب مقنع للتصديق بأن الأنحراف عن μ=5 قد حدث، ولكن يجب أن نكون حذرين قبل أن نقرر بأن هناك حاجة لإجراء عملا تصحيحيا على العملية الأنتاجية.

(جـ) حجم العينة المطلوب يتحدد ببساطة بمساواة الخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ بالقيمة المطلوبة له والحل بالنسبة إلى n، أي:

$$SE(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=.001$$

$$\frac{.005}{\sqrt{n}}=.001 \quad , \quad \sqrt{n}=\frac{.005}{.001}=5 \quad , \quad n=25$$

(د) الخطأ المعياري 001. هو أصغر من 001667. وهو الخطأ المعياري الموجود في الجزء (أ). فإذا كان الخطأ المعياري هو 001. فإن الإستنتاج إعتمادا على $\overline{X}$ يكون أكثر موثوقية، فمثلا يمكن اعادة العمل في الجزء (ب) باستخدام SE($\overline{X}$)=.001، نجد ان إحتمال أن يكون متوسط العينة العشوائية من العملية الإنتاجية الطبيعية، يكون أكبر من5.004 هو:

$$P(\overline{X}\geq 5.004)=P\left(Z\geq\frac{5.004-5}{.001}\right)$$
$$= P(Z\geq 4.0)= 1-P(Z<4.0)$$
$$= 1-.9999= .0001$$

وهو احتمال ضئيل جداً عن الذي حصلنا عليه من قبل، وبالتالي فإن القرار بأن متوسط العملية الأنتاجية قد انحرف عن المعالم المحددة لها أصبح الآن أكثر قناعة.

(٥-٥-٣) توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ عندما يكون المجتمع له توزيع غير طبيعي:

The Sampling Distribution of $\overline{X}$ When the Population Has a Nonnormal Distribution

في كثير من الحالات، لا نستطيع تعين هويه توزيع المجتمع وبالتالي لا يمكن تحديد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$، ومع ذلك فقد تمكن علماء الأحصاء من اثبات أن توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$ هو تقريبا التوزيع الطبيعي في حالة العينات ذات الأحجام الكبيرة أيا كان توزيع المجتمع. هذه النتيجة الحاسمة في الأستنتاج الأحصائي تعرف بأسم "نظرية النهاية المركزية" **Central Limit Theorem** ويمكن تلخيصها على النحو التالي:

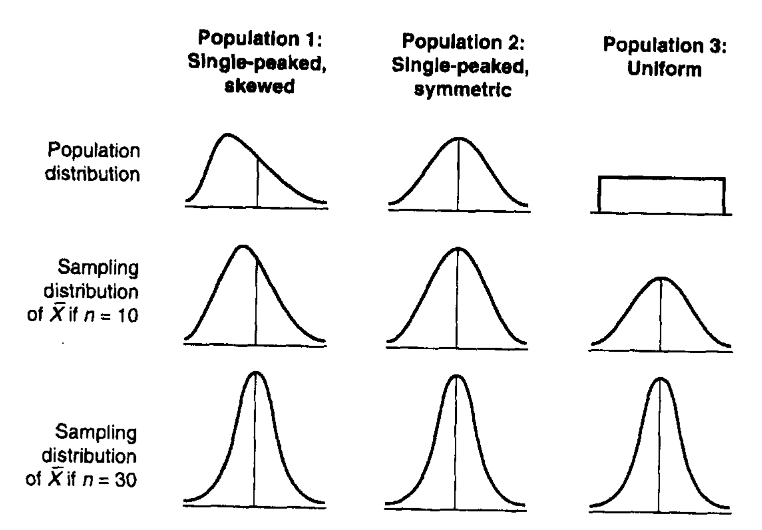
> **نظرية النهاية المركزية**
>
> كلما زاد حجم العينة، كلما اقترب توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ من التوزيع الطبيعي بغض النظر عن توزيع المجتمع.

الحقيقة الجديرة بالملاحظة حول توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$ أنه يميل تجاه التوزيع الطبيعي للعينات كبيرة الحجم بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمع، وهكذا فتوزيع المعاينة لـ$\overline{X}$ في جميع العينات الممكنة كبيرة الحجم هو تقريبا توزيع طبيعي بمتوسطμ وخطأ معياري $\sigma/\sqrt{n}$ حيثσ,μ هما متوسط المجتمع وانحرافه المعياري على التوالي، لذلك نجد أن توزيع Z، حيث:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

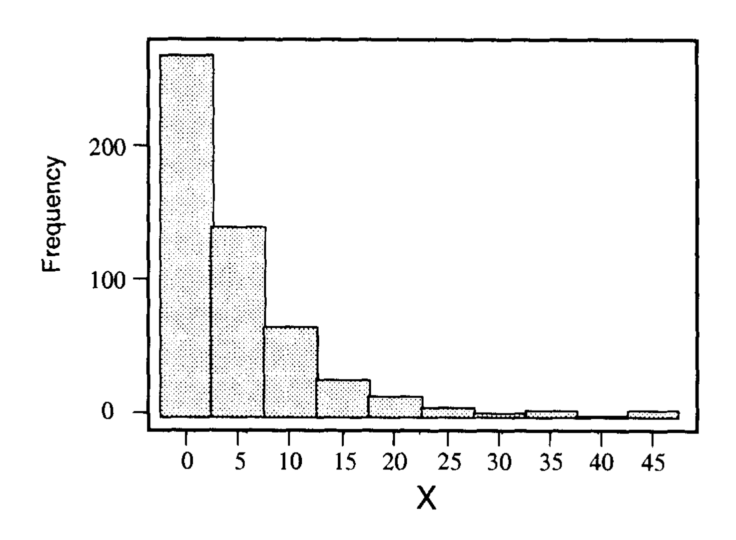
هو تقريبا توزيع طبيعي معياري طالما أنn كبيرة بدرجة كافية.

الآن إلى أي درجة يجب أن تكون n كبيرة حتى يكون لـ$\overline{X}$ توزيع طبيعي؟ الأجابة تعتمد على درجة اقتراب توزيع المجتمع من التوزيع الطبيعي. شكل (٥-٧) يوضح بعض الأمثلة لتوزيعات المعاينة لـ $\overline{X}$عند أحجام عينات مختلفة عندما تتم المعاينة من مجتمعات ذات توزيعات مختلفة. يلاحظ أن الأقتراب تجاه الأعتدالية (الطبيعي) هو اسرع في المجتمع (2) عن المجتمع (1). يحدث هذا لأن توزيع المجتمع (1) ملتوي إلى حد بعيد بينما توزيع المجتمع (2) تقريبا طبيعي (معتدل). يلاحظ أيضا أن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ بالنسبة للمجتمع(3) يميل إلى الاعتدالية بسرعة حتى ولو كان توزيع المجتمع ليس له الشكل الاعتدالي (الطبيعي). وعلى ذلك، أيا كان توزيع المجتمع، فإن توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$هو تقريبا توزيع طبيعي عند أحجام العينات $n \geq 30$. أما اذا كان توزيع المجتمع ذو قمة وحيدة ومتماثل أو ملتوي ألتواء خفيف، فإن توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$هو تقريبا توزيع طبيعي حتى ولو كانت العينات ذات أحجام صغيرة (10 أو أقل في بعض الحالات). من الشائع عمليا استخدام $n=30$ كمقياس لتحديد ما اذا كان من الأمان افتراض أن توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$هو تقريبا طبيعي أم لا. هذا المقياس متحفظ عليه إلى حد ما لكي يشمل بوضوح توزيعات المجتمعات غير الطبيعية.

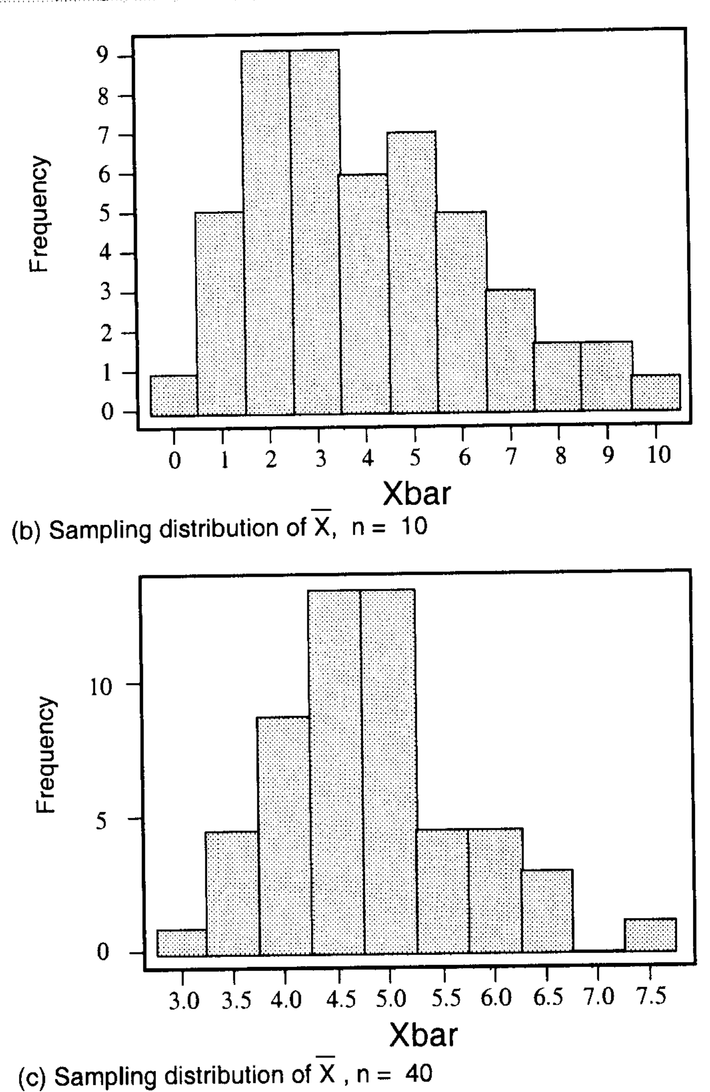


شكل(٥-٧) : تأثير حجم العينة على شكل توزيع متوسط العينة عندما تتم المعاينة من مجتمعات ذات توزيعات مختلفة

نتناول الأن وبتوضيح أكثر نظرية النهاية المركزية. بمساعدة الحاسب الآلي حاكينا 50 عينة كل ذات الحجم n=10 من مجتمع توزيعه ملتوي بشدة. بعد ذلك اعيدت محاكاة 50 عينة كل عينة ذات الحجم n=40 . في الجزء (أ) من الشكل (٥-٨) ثم توضيح توزيع المجتمع، حيث يلاحظ بشدة الألتواء. في الأجزاء (ب)،(جـ) عرضت توزيعات المعاينة لـ $\bar{X}$ لجميع العينات الخمسين عندما تكون n=10 ، ثم n=40 على التوالي. في الجزء (ب) يلاحظ أنه عندما تكون n=10 فإن توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ يبقى ملتويا بعض الشئ ولكن في الجزء (جـ) حيث n=40 فإن توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ يصبح في واقع الأمر متماثل وله شكل ربوة.



(a) Population distribution



شكل(٥-٨): تأثير حجم العينة على شكل توزيع متوسط العينة عندما تتم المعاينه من مجتمع ملتوي

تفسير بديهي لنظرية النهاية المركزية:

هل نظرية النهاية المركزية خلقت لديك إحساساً بتخمين معين؟ تأمل هذا السؤال: بالرجوع إلى شكل (٥-٨)، لماذا يجب أن يكون توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$ قريباً من التماثل وله شكل ربوه عند n=40 حتى ولو كان توزيع المجتمع ملتوياً بشدة؟ في العينات الكبيرة نكون أكثر قناعة بأننا نحصل على عينة بيانات نموذجية تحتوي على كلا القيم التي هي أعلى وأدنى من متوسط المجتمع. فمثلاً، في عينة من مجتمع توزيعه موضح في شكل (٥-٨ أ) نجد أن معظم المشاهدات بها تبدو أنها تقع أدنى المتوسط ولكن تلك التي تقع أعلى المتوسط μ، فمن المحتمل أن تكون أكثر تطرفاً وتعكس إلتواء توزيع المجتمع، وبالتالي المشاهدات المتكررة بكثرة أدنى μ تتجه لأن تتعادل تقريباً في متوسطها مع المشاهدات الأقل تكراراً لكن الأكثر تطرفاً أعلى μ. النتيجة أنه لأي عينة عشوائية كبيرة، تكون فرصة وقوع $\overline{X}$ أعلى قليلاً من μ مساوية لفرصة وقوعها أدنى قليلاً من μ، وبالتالي إذا كانت العينة ذات حجم كبير بدرجة كافية، فإن توزيع النواتج الممكنة لـ $\overline{X}$ سيكون متماثلاً وله قمه وحيدة.

مثال (٥-٥)

سحبت عينة عشوائية n=36 مفرده من مجتمع متوسطة μ=30 وإنحرافه المعياري σ=24 وله توزيع ذو قمة وحيدة وملتوي إلى اليمين.

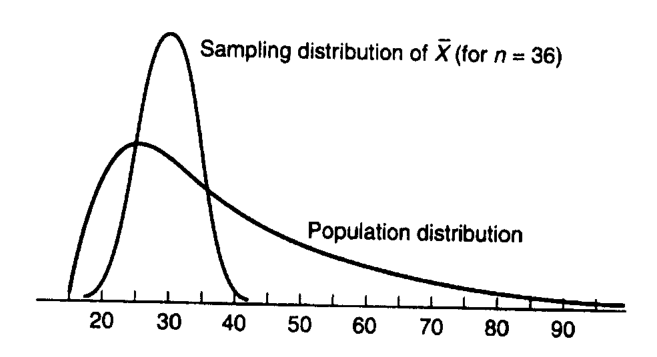
(أ) حدد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$.

(ب) ماذا يمكن أن نقول عن الكمية التي يمكن أن تبتعد بها متوسط عينة واحدة عن متوسط المجتمع 30؟

الحـل:

(أ) حيث أن حجم العينة كبيراً (n=36 وتتعدى القيمة الفاصلة 30)، فإن نظرية النهاية المركزية تؤكد على أن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي حيث:

$E(\overline{X}) = 30,\ SE(\overline{X}) = 24/\sqrt{36} = 4$. شكل (٥-٩) يظهر مقابله بين توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ مع توزيع المجتمع الأصلي، حيث يلاحظ أن القيم المكنة لـ $\overline{X}$ هي أساساً موزعة طبيعياً حول μ=30 وأنها لاتتباعد فيما بينها إلى الدرجة التي تتباعد به قيم المجتمع.



شكل (٥-٩): مقارنة بين توزيع المجتمع وتوزيع المعاينة لـ $\overline{X}$

(ب) حيث أن المتغير العشوائي الطبيعي نادراً ما يختلف بأكثر من ثلاث وحدات إنحراف معيارية بعيداً عن المتوسط، فإننا في واقع الأمر نكون متأكدين بأن المتوسط لأي عينة (أي قيمة $\overline{X}$) لن يبتعد عن μ(μ=30) بأكثر من: 3(4)=12 وحدة في أي من الأتجاهين.

مثال (٥-٦)

نعلم من دراسات سابقة، أنه في أحد إختبارات الذكاء كان متوسط الدرجات μ=1000 والإنحراف المعياري σ=125. فإذا أعطى الأختبار لعينة عشوائية من 100شخص، ما هو إحتمال أن قيمة $\overline{X}$ في هذه العينة سوف يقع في الفترة من 970 إلى 1030؟ إفترض أن توزيع المجتمع الحالي يتطابق مع توزيع المجتمع السابق.

الحـل

على الرغم من عدم وجود تنويه أو إشارة عن شكل توزيع المجتمع، إلا أن هذا غير ضروري حيث أن حجم العينة n=100 وهو أكبر مما يكفي لتطبيق نظرية النهاية المركزية. بأفتراض أن μ=1000، σ=125 ظلت باقية ومتحققة للأفراد اللذين أدوا هذا الأختبار، نجد أن متوسط العينة $\overline{X}$ هو متغير عشوائي طبيعي له:

$$E(\overline{X})=1000,\quad SE(\overline{X}) = 125/\sqrt{100}=12.5$$

أما تحديد إحتمال وقوع $\overline{X}$ بين 970، 1030 فهو موضح في شكل(٥-١٠).

$$Z=\frac{970-1000}{12.5}=-2.4 \qquad Z=\frac{1030-1000}{12.5}=2.4$$

$P(970<\overline{X}<1030)=P(-2.4<Z<2.4)$
$=P(Z<2.4)-P(Z<-2.4)$
$= .9918 - .0082$
$= .9836$

شكل (٥-١٠): التوزيع الإحتمالي لمثال (٥-٦)

(٥-٥-٤) توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ عندما يكون الإنحراف المعياري للمجتمع σ غير معلوم: مقدمة لتوزيع T:

The Sampling Distribution of $\overline{X}$ When The Population Standard Deviation σ is Unknown: An Introduction to the T Distribution

عند مناقشة توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ في البندين الأخيرين، إفترضنا أن الإنحراف المعياري للمجتمع σ معلوماً. والآن نتذكر من الصيغة (5.3) أنه إذا كان متوسط العينة $\overline{X}$ له توزيع طبيعي، فإن:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

يكون له توزيع طبيعي معياري. هذه النتيجة تفترض مسبقاً أن σ هي ثابت معلوم. ولكن إذا كانت σ غير معلومه، فإن Z تكون دالة في مؤشر غير معلوم ومن ثم لا يمكن تحديد قيمة Z لعينة محددة. ويبدو أن هذا يخلق مشكلة، حيث أنه من الناحية العملية، نادراً ما تكون قيمة الإنحراف المعياري في المجتمع معلومة. من المتوقع أن يكون ردك الطبيعي على هذه النقطة أن تقول: لماذا لا يتم إستبدال σ بمقدرها أي بالإنحراف المعياري في العينة S؟ حسناً، هذا هو بالضبط ما فعلناه. إستبدال σ بالتقدير S في الصيغة (5.3) يؤدي إلى الكمية T (وتسمى بالأحصاء T)، حيث:

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \tag{5.4}$$

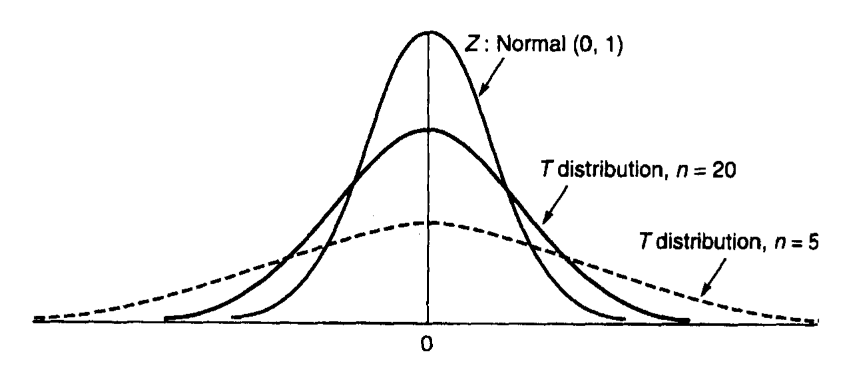
ومما يؤسف له أن توزيع المعاينة للأحصاء T ليس توزيع طبيعي معياري، حتى ولو كان توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي، ولكي نفهم السبب في ذلك قارن الكميتين:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{and} \quad T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

الآن كم عدد الأحصاءات (متغيرات عشوائية) التي تراها في هذه الكميات؟ الأجابة: بالنسبة إلى Z، هناك متغير عشوائي واحد يسمى $\overline{X}$ (تذكر أن μ، σ كلها ثوابت) أما الأحصاء T فيعتمد على متغيرين عشوائيين: $\overline{X}$ ، S. إدخال إحصاء إضافي S يزيد من إختلاف قيمة T من عينة إلى أخرى مقارنة مع Z، لذا يجب ألا نتوقع أن تكون توزيعات Z، T هما نفس الشئ. في الحقيقة فإن توزيع الأحصاء T لجميع العينات العشوائية كل ذات الحجم n والمسحوبة من مجتمع توزيعه طبيعي يسمى توزيعات الطالب **Student's T distribution :T** والذي يختصر غالباً إلى توزيع T (*).

(*) قدم توزيع T في عام ١٩٠٨ بواسطة W.S.Gosset والذي نشر ابحاثه تحت اسم مستعار «طالب». كثير من المؤلفين يستخدم الحرف الصغير t للإشارة إلى هذا التوزيع. هنا نستخدم الحرف الكبير T لنحافظ على الاتساق العملي في إستخدام الحروف الكبيرة لتدل على المتغيرات العشوائية والحروف الصغيرة للإشارة إلى قيم المتغيرات العشوائية.

وتوزيع T يشبه التوزيع الطبيعي المعياري من حيث أنه متماثل ومركزة حول الصفر ولكنه أكثر تشتتاً وإختلافاً. إلى أي مدى يزيد التشتت عندما تستبدل σ بـ S؟ هذا التشتت يعتمد على حجم العينة، فإذا كانت n كبيرة بدرجة كافية، فإن S تصبح تقديراً دقيقاً جداً لـ σ ويكون التشتت في T قليل جداً. وإذا كان حجم العينة n صغيراً إلى حد بعيد، فإن S تكون تقدير غير دقيق لـσ وتظهر T تبايناً أكثر. لذا التشتت في توزيع T يعتمد على حجم العينة n وهذا ما يوضحه شكل (٥-١١).



شكل (٥-١١): مقارنة بين توزيع T والتوزيع الطبيعي المعياري عند أحجام عينات مختلفة

يلاحظ من شكل (٥-١١) أنه كلما زادت n، فإن توزيع Tيظهر تشتتاً أقل وأقل ويصبح مشابهاً أكثر فأكثر للتوزيع الطبيعي المعياري. في الحقيقة، أنهما يصبحا متطابقين من الناحية النظرية كلما إقتربت n من مالا نهاية. وهذا يعني أنه إذا كانت n كبيرة بدرجة كافية، فإن التوزيع الطبيعي المعياري يعد تقريباً جيداً لتوزيع T ويمكن أن يستخدم بدلاً منه إذا شئنا ذلك. والقاعدة المقبوله على نطاق واسع أن التقريب يعد مقبولاً إذا كانت $n \geq 30$. يلاحظ أن هذه القاعدة الإرشادية تتطابق بصورة ملائمة مع القاعدة الإرشادية لتطبيق نظرية النهاية المركزية.

درجات الحرية لتوزيع T:

في الواقع فإن المؤشر الرئيسي في توزيع T ليس حجم العينة n، بل أنها كمية أخرى قدمت في الفصل الثاني عرفت بإسم درجات الحرية **Degrees of freedom**. هذه الكمية عادة يرمز لها بالحرف اللاتيني الصغيرγ (نيو). وتتحدد درجات الحرية بحجم العينة: γ=n-1 وكلما زاد حجم العينة، كلما زادت درجات الحرية. يلاحظ أن درجات الحرية لتوزيع T هي نفسها تماماً درجات الحرية المقترنه بتباين العينة S^2، حيث S^2 لها (n-1) من درجات الحرية(*)، وتوزيع T له أيضاً γ=n-1 درجات حرية.

جدول T وإستخدامه:

يتواجد توزيع T الأن في معظم البرامج الأحصائية الجاهزة، شأنه في ذلك شأن التوزيع الطبيعي المعياري، بالأضافة إلى كونه معروضاً في صورة جداول مفصلة. جدول C في ملحق الكتاب يعطي قيم جزئية لتوزيع T مقترنه بإحتمالات محددة تمثل مساحات على يسار تلك القيم الجزئية. ولإستخدام هذا الجدول، نحدد أولاً العدد المناسب من درجات الحرية، هذا العدد موضح في العمود

(*) نتذكر من الفصل الثاني، ان الكمية التي في مقام S^2 حيث: $S^2 = [\Sigma(X_i - \overline{X})^2] / (n-1)$ هي درجات الحرية

الأول من الجدول تحت عنوان γ . ثانياً، نختار الإحتمال المرغوب فيه من بين القيم الموجودة في رؤس الأعمدة. هذا الإحتمال عبارة عن مساحات تراكمية تحت دالة كثافة إحتمال T والمحددة من اليمين بالقيمة الجزيئية. عند عدد معلوم من درجات الحرية وعند الأحتمال المفضل، فإن الجدول يعطي القيمة الجزيئية المناظرة.

مثلاً ، بفرض أن n=16 ونرغب في إيجاد القيمة الجزيئية T والتي لها الإحتمالات .95 و .025 على التوالي. عند درجات الحرية 15= γ وتحت الأعمدة .95 و .025 نجد أن القيم الجزيئية هي (-2.131, 1.753) على التوالي. ويعني هذا أن إحتمال أن المتغير العشوائي Tبدرجات الحرية 15 يأخذ قيماً لا تزيد عن -2.131 أو 1.753 هي (.95, .025) على التوالي وبالرموز يمكن أن نكتب:

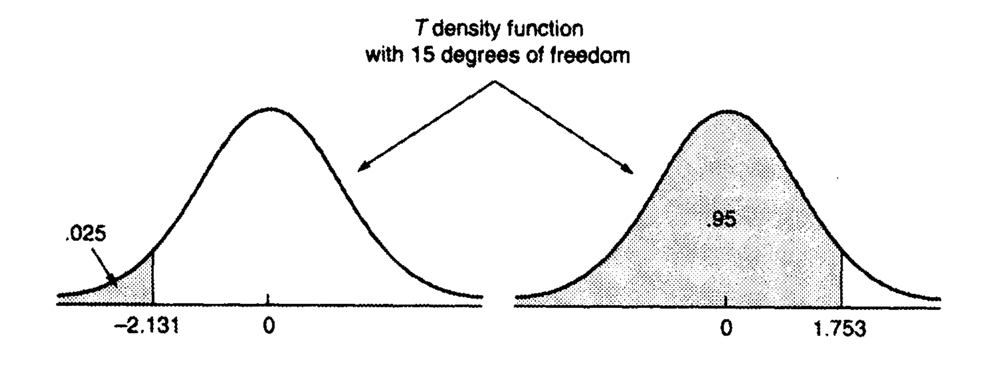
$$P(T_{15} \leq -2.131) = .025$$

$$\text{and} \quad P(T_{15} \leq 1.753) = .95$$

هذه القيم الجزيئية موضحة في شكل (٥-١٢). يلاحظ أنه ينتج من قاعدة الإحتمال للحوادث المكملة أن:

$$P(T_{15} > -2.131) = .975$$

$$P(T_{15} > 1.753) = .05$$



شكل(٥-١٢): توضيح القيم الجزيئية T عند درجات الحرية 15

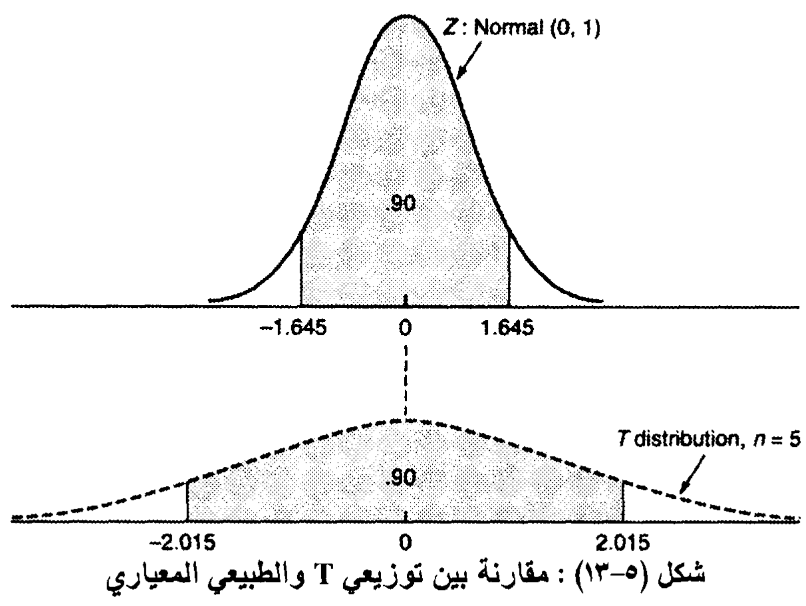
إستخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

ذكرنا في الفصل الرابع أننا لا نفضل إستخدام الجداول الإحصائية طالما كان لدينا برامج إحصائية جاهزة مثل Minitab أو غيرها. وينطبق هذا أيضاً بالنسبة لتوزيع T، فمثلاً بإستخدام الأمر INVCDF مقروناً بالمساحة الإحتمالية التي على يسار القيمة الجزيئية المطلوبة ثم استخدام الأمر الفرعي T مع الاشارة إلى درجات الحرية، يمكن الحصول على القيمة الجزيئية المطلوبة. القيم الجزيئية الموضحة في شكل (٥-١٢) حصلنا عليها بإستخدام برنامج Minitab على النحو التالي:

```
MTB > Invcdf    .025;
SUBC> t  15.
      0.025    -2.1315
MTB > Invcdf    .95;
SUBC> t  15.
      0.9500       1.7531
```

مقارنة التوزيع الطبيعي المعياري مع توزيع T:

بسبب التباعد الكبير بين التوزيع الطبيعي المعياري وتوزيع T في حالة العينات صغيرة الحجم، ينشأ تباعد كبير بين قيم T وقيم Z المناظرة لها عند نفس الإحتمال. شكل (٥-١٣) يوضح هذه النقطة لتوزيع T بدرجة حرية= 5. هذا الشكل يظهر تباين واضح بين قيم Z، T المناظرة للإحتمالات 05. و 95.



شكل (٥-١٣) : مقارنة بين توزيعي T والطبيعي المعياري

لاحظ أن قيم Z هي: $Z_{.05}$= -1.645, $Z_{.95}$ =1.645, بينما قيم T هي: $t_{.05,5}$= -2.015, $t_{.95,5}$ =2.015
وحيث أن توزيع T بدرجات حرية 5 هو أكثر تشتتا من التوزيع الطبيعي المعياري، فإننا يجب أن نتجه بعيداً إلى اليمين وإلى اليسار من الصفر (وهو مركز كلا التوزيعين) حتى نغطي 90% من المساحة الكلية (الفرق بين 95.و 05.).

استمراراً في المقارنة بين التوزيع الطبيعي المعياري وتوزيع T، يعرض جدول (٥-٣) قيم T,Z والتي تناظر بعض الإحتمالات وعند درجات حرية مختلفة تتراوح بين 5 إلى مالا نهاية. من هذا الجدول، يمكنك أن ترى أن قيم T تقترب أكثر فأكثر من قيم Z كلما زادت درجات الحرية إلى أن تتطابق تماماً قيم T,Z عند درجات الحرية مالا نهاية.

جدول (٥-٣): قيم T,Z (عند درجات حرية مختلفة)

Distribution	Probability					
	.005	.025	.05	.95	.975	.995
T_5	-4.032	-2.571	-2.015	2.015	2.571	4.032
T_{15}	-2.947	-2.131	-1.753	1.753	2.131	2.947
T_{30}	-2.750	-2.042	-1.697	1.697	2.042	2.750
T_{100}	-2.626	-1.984	-1.660	1.660	1.984	2.626
T_{∞}	-2.575	-1.960	-1.645	1.645	1.960	2.575
Z	-2.575	-1.960	-1.645	1.645	1.960	2.575

فرض الأعتدالية وتوزيع T:

ذكرنا أن توزيع الأحصاء $T = (\overline{X} - \mu) / (S / \sqrt{n})$ هو توزيع T بدرجات حرية (n-1) تحت فرض أن توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي (أو المعتدل). هذا الفرض ربما يبدو أنه مقيد إلى حد ما، فمن غير المحتمل معرفة توزيع المجتمع دائما. بالطبع إذا كان إفتراض أن توزيع المجتمع بأنه طبيعي هو إفتراض غير صحيح، فإن إحتمالات T ربما لا تكون دقيقة، ومع ذلك فكثير من الدراسات خلال عدة سنوات أظهرت أن توزيع Tيمكنه أن يسقط هذا الفرض. بمعنى آخر توزيع T هو تقريباً التوزيع الحقيقي للأحصاء T للعينات قريبة الحجم من 15 أو أكثر طالما أن الأختلاف عن التوزيع الطبيعي في المجتمع ليس شديداً، أما العينات كبيرة الحجم بدرجة كافية ($n \geq 30$)، فإنه في واقع الأمر لا يوجد إهتمام بالنقص المحتمل لافتراض الأعتدالية في المجتمع حتى يمكننا إستخدام توزيع T.

(٥-٥-٥) توزيع المعاينة للأحصاء $\overline{X}$: ملخص: The Sampling Distribution of $\overline{X}$: A Summary

من مناقشة هذا الفصل، يمكن أن نلخص الوضعين اللذين يحددان أي توزيعات المعاينة لـ $\overline{X}$ يمكن أن تستخدم لعمل إستنتاجات إحصائية حول μ:

١. عندما يكون الإنحراف المعياري للمجتمع σ معلوماً: هذا يؤدي إلى الأحصاء Z، ومع ذلك فإنه من النادر أن نعرف σ.

٢. عندما يكون الإنحراف المعياري للمجتمعσ غير معلوماً: هذا يؤدي إلى الأحصاء T، وهذا هو الوضع العادي في التطبيقات الأحصائية الحقيقية. وحيث أن أغلب التطبيقات تنتمي إلى ثاني هذه الأوضاع، فإن التوزيع المناسب في أغلب التحليلات المتعلقة بمتوسط المجتمع هو توزيع T أكثر من التوزيع الطبيعي المعياري. وفيما يلي ملخصاً لهذين الوضعين:

ملخص

توزيع المعاينة الذي يستخدم في عمل إستنتاجات حول μ إعتماداً على $\overline{X}$

1- إذا كانت قيمة الإنحراف المعياري في المجتمع معلومة، وكان:

(أ) توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي.

(ب) توزيع المجتمع ليس الطبيعي، ولكن حجم العينة n كبيراً بدرجة كافية ($n \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للأحصاء Z، حيث: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ هو تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري.

2- إذا كانت قيمة الإنحراف المعياري في المجتمع غير معلومة، وكان:

(أ) توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي.

(ب) حجم العينة كبيراً بدرجة كافية ($n \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للأحصاء T، حيث:

$T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$ هو تقريباً توزيع T بدرجات حرية (n-1).

مثال (٥-٧)

وكالة لحماية البيئة (EPA) حددت متوسطاً لمعدل الأميال/جالون على الطرق السريعة قدرة 45 وذلك لنوع معين من السيارات. أشترت منظمة مستقلة للمستهلكين إحدى هذه السيارات وأختبرتها لتتحقق من معدل EPA وتم ذلك بقيادة السيارة لمسافة 100 ميل في 25 رحلة مختلفة وسجلت القيم الفعلية للأميال المقطوعة لكل جالون في كل رحلة. من خلال 25 رحلة، حسب المتوسط والإنحراف المعياري فكانا 43.5، 2.5 ميل/جالون على التوالي. هناك إعتقاد بأن التوزيع الفعلي للأميال/جالون على الطريق السريع لهذا النوع من السيارات يقترب من التوزيع الطبيعي.

(أ) مفترضاً ولو للحظة أن معدل EPA (45ميل/جالون) متحققاًلهذه السيارة، أوجد إحتمال أن متوسط الأميال/جالون في العينة العشوائية المكونة من 25 رحلة يجب أن يكون 43.5 أو أقل.

(ب) إعتماداً على بيانات العينة الحالية، هل هناك سبباً مقنعاً للمنظمة لكي تشك في أن معدل EPA متحققاً لهذه السيارة؟

الحل

(أ) حجم العينة n=25 محاولة أعطت النتائج: $\overline{X}=43.5$ ، S=2.5 ميل/جالون. لتحديد ما إذا كانت معلومات العينة هذه تعضد المعدل الذي تدعيه EPA، يجب أن نعتمد على الإحتمال، بمعنى أننا نرغب في الأجابة على السؤال التالي: إذا كانت μ حقيقة تساوي 45 ميل/جالون، ما هو إحتمال أنه بالصدفة وحدها مشاهدة قيمة لـ $\overline{X}$ تساوي 43.5 ميل/جالون أو أقل؟ وحيث أن الإنحراف المعياري في المجتمع غير معلوم، يكون من البديهي أن نتجه إلى حساب قيمة T والتي تناظر $\overline{X}=43.5$ ، بمعنى أخر:

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{43.5-45}{2.5/\sqrt{25}}=-3.0$$

وهي قيمة توزيع T عند درجات حرية 24=1-25. من جدول C بالملحق نجد أن:

$P(T_{24}\le -3)<.005$، بمعنى أنه إذا كانت μ=45، فإن إحتمال أن تكون قيمة Tأقل من (3-) وحدات هو أقل من 005. وهكذا كلما كان متوسط العينة صغيراً، وهو ما حدث فعلاً ($\overline{X}=43.5$ أو ما يعادلها T=-3)، كلما كان له فرصة صغيرة جداً في الحدوث إذا كانت μ هي 45.

(ب) إعتماداً على الإجابة في الجزء (أ) فإنه من البديهي أن نشك في معدل EPA، ومع ذلك وقبل أن نلوم EPA لمعدلها المرتفع وغير المناسب، فإن فكرة إجراء أبحاث إضافية هو أمر جيد، فالتعارض المشاهد ربما يكون ببساطة نتيجة للفروق بين طريقتي القياس للأميال في المنظمتين (حماية البيئة والمستهلكين).

تمارين:

(٥-٢٣) هل الإنحراف المعياري للأحصاء$\overline{X}$ (الخطأ) هو نفسه الإنحراف المعياري للمجتمع؟ إشرح.

(٥-٢٤) أخذاً في الأعتبار متوسط العينة$\overline{X}$ ، إشرح الفرق بين التوزيع الطبيعي المعياري وتوزيع T.

(٥-٢٥) عند عمل إستنتاج حول μ إعتماداً على$\overline{X}$ ، ما هو الموقف العملي بالنسبة للإنحراف المعياري للمجتمع σ؟

(٥-٢٦) في التمرين (٥-٨)، حدد المتوسط والخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ للعينات الـ25. كيف يمكن مقارنة

هذه القيم مع نظائرهم المتوسط والخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ عبر كل العينات الممكنة ذات الحجم $n=5$؟

(٥-٢٧) إفترض أن عينة عشوائية سحبت من مجتمع توزيعه هو الطبيعي مؤشراته: $\mu=1400$, $\sigma=480$. عند أحجام معلومه للعينات، حدد المتوسط والخطأ المعياري للأحصاء $\overline{X}$:

(a) $n=10$ (b) $n=40$ (c) $n=160$

(٥-٢٨) في التمرين (٥-٢٧)، هل $\overline{X}$ لها توزيع معاينة طبيعي في الأجزاء (a)، (b)، (c)؟ برر إجابتك لكل جزء على حدة.

(٥-٢٩) في تمرين (٥-٢٧) ماهو حجم العينة المطلوب لتحقيق $SE(\overline{X})=12.0$.

(٥-٣٠) بفرض أنه قد سحبت عينة عشوائية. في الحالات التالية حدد توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$. (في بعض الحالات ربما لا يكون من المكن تحديد ذلك، أذكر لماذا، وإذا كان من المكن تحديد ذلك، إذكر لماذا أيضاً)

(أ) عينه $n=50$ وحدة سحبت من مجتمع ملتوي له $\mu=40$، $\sigma=6$.

(ب) عينة $n=12$ وحدة سحبت من مجتمع ملتوي له $\mu=40$، $\sigma=6$.

(جـ) عينة $n=50$ وحدة سحبت من مجتمع توزيعة طبيعي له $\mu=40$، $\sigma=6$.

(د) عينة $n=12$ وحدة سحبت من مجتمع توزيعة طبيعي له $\mu=40$، $\sigma=6$.

(٥-٣١) في تمرين (٥-٣٠)، إفترض أن متوسط العينة $\overline{X}$ سوف يستخدم لتقدير متوسط المجتمع μ.

(أ) في الأجزاء من (أ): (د) في تمرين (٥-٣٠)، أوجد إحتمال (إذا كان ممكنا) أن التقدير به خطأ لا يزيد عن 1.5 وحدة زائد أو ناقص.

(ب) إعتمادا على إجابتك في (أ) من هذا التمرين، هل معرفة توزيع المعاينة للمقدر ضرورية لكي تحدد دقته؟ لماذا نعم أو لماذا لا؟

(جـ) في الجزء (أ) من هذا التمرين، كيف يؤثر حجم العينة في دقة التقدير $\overline{X}$؟

(٥-٣٢) إفترض إننا سحبنا عينة عشوائية $n=40$ مفردة من مجتمع توزيعه ملتوي إلى اليسار. هل يكون أكثر إحتمالاً أن يقع متوسط العينة أدنى أم أعلى μ، أم أن الإحتمالات متساوية في الحالتين؟ برر إجابتك.

(٥-٣٣) حدد إحصائي الخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ في بحث تسويق مقترح لعينة $n=100$ مستهلك. لسؤ الحظ، هذا الخطأ المعياري كان ضعف المستوى الذي تعتبرة إدارة التسويق مقبولاً. ما الذي يمكن أن نفعله لتحقيق مستوى الخطأ المعياري المقبول لـ$\overline{X}$؟ كن أكثر تحديداً كلما أمكن ذلك.

(٥-٣٤) تحت أي الحالات يكون من الخطأ ان نستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع المعاينة لـ$\overline{X}$؟ افترض أن قيمة الانحراف المعياري في المجتمع σ معلومة.

(٥-٣٥) إفترض أنك تخطط لإختيار عينة عشوائية بهدف تقدير μ. المجتمع (غير معلوم لك) له متوسط وإنحراف معياري $\mu=7.44$، $\sigma=2.88$ على التوالي. أوجد إحتمال (إذا كان ممكناً، وإذا لم يكن، اشرح ذلك) أن يكون تقديرك (قيمة $\overline{X}$) مختلفاً عن μ بأكثر من 0.5 زائد أو ناقص، لكل من الحالات التالية:

(أ) $n=48$ وتوزيع المجتمع هو الطبيعي.

(ب) n=4 (المعاينة ذات تكلفة عالية)، وتوزيع المجتمع هو الطبيعي.

(جـ) n=4 (المعاينة ذات تكلفة عالية) وتوزيع المجتمع ملتوي إلى اليمين.

(د) إشرح لماذا الإحتمال الذي حصلت عليه في (ب) كان أكبر من الأحتمال الذي حصلت عليه في (أ).

(٥-٣٦) الصيغة (5.2) $[SE(\overline{X}) = \sigma / \sqrt{n}]$ توضح أن الخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ يعتمد على كل من σ (الإنحراف المعياري للمجتمع) وحجم العينة n.

(أ) اشرح لماذا يكون معقولاً أن يعتمد الخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ على حجم العينة.

(ب) اشرح لماذا يكون معقولاً أن يعتمد الخطأ المعياري لـ$\overline{X}$ على الإنحراف المعياري للمجتمع.

(٥-٣٧) مقاول بنايات كبيرة قرر شراء كميات كبيرة من مصابيح الأضاءة عالية القوة من صاحب مصنع معين. صاحب المصنع أكد للمقاول أن هذه المصابيح لها متوسط عمر 1000 ساعة بإنحراف معياري 80 ساعة. المقاول كونه متبصراً بعواقب الأمور، قرر شراء المصابيح من صاحب المصنع إذا كان متوسط العمر لعينة عشوائية من 64 من المصابيح هو 1010 ساعة على الأقل. في ظل هذا الشرط، ما هو إحتمال أن المقاول سوف يشتري هذه المصابيح من هذا المصنع؟

(٥-٣٨) مفتش حكومي للأوزان والقياسات يزور مصنعاً لتعبئة اللحوم ليتأكد من أن الوزن الصافي للعبوة كما هو مدون على العبوة. مدير المصنع أكد للمفتش بأن نواتج عملية التعبئة تعطي في المتوسط الوزن 750 جرام بإنحراف معياري 14 جرام. أختار المفتش عشوائياً 100 عبوة ووجد أن متوسط الوزن فيها 748.5جرام.

(أ) عند n=100 (حجم العينة التي سحبها المفتش)، حدد توزيع المعاينة لـ$\overline{X}$ (مفترضاً أن مقوله مدير المصنع صحيحة).

(ب) إذا كانت مقوله مدير المصنع صحيحة، ما هو إحتمال أن يكون متوسط العينة 748.5 جرام أو أقل؟

(جـ) إعتماداً على إجابتك في (ب)، هل يكون لدى المفتش دليل مقنع على أن العملية في المتوسط هي تعبئة أقل في العبوة. أشرح لماذا يكون هذا الدليل إما مقنعاً أو غير مقنعاً تماماً.

(٥-٣٩) أخذاً في الأعتبار توزيع T والتوزيع الطبيعي المعياري.

(أ) قارن متوسطاتهم. هل هما متساويان أم مختلفان؟ أشرح السبب.

(ب) قارن إنحرافاتهم المعيارية. هل هما متساويان أم مختلفان؟ أشرح.

(٥-٤٠) عند الحالات التالية، حدد ما إذا كان الأحصاء $T = (\overline{X} - \mu) / (S / \sqrt{n})$ له توزيع T أم لا، مع تبرير إجابتك:

(أ) n=9، توزيع المجتمع هو الطبيعي. (ب) n=9، توزيع المجتمع ملتوي.

(جـ) n=44، توزيع المجتمع هو الطبيعي. (د) n=44، توزيع المجتمع ملتوي.

(٥-٤١) لكل من الحالات التالية، أختار ما بين الإحصاءات:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{and} \quad T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

كإحصاء مناسب يستخدم للأستدلال حول μ ثم إشرح سبب إختيارك:

(أ) توزيع المجتمع هو الطبيعي وله إنحراف معياري معلوم $\sigma=10$.

(ب) عينة من $n=15$ مشاهدة مسحوبه من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وغير معلوم له كل من المتوسط والإنحراف المعياري، حيث: $\overline{X}=48.2$ ، $S=8.3$.

(جـ) توزيع المجتمع ملتوي وله $\sigma=10$، حيث حجم العينة 40 مشاهدة، $\overline{X}=48.2$.

(د) توزيع المجتمع ملتوي، حيث حجم العينة 40 مشاهدة، $\overline{X}=48.2$، $S=8.3$.

(٥-٤٢) بالرجوع إلى التمرين (٥-٤١)، هل يمكنك تسمية توزيع المعاينة المناسب في كل من (أ)، (ب)؟ هذا إذا كان توزيع المجتمع معلوم أنه ملتوي؟ وضح ذلك.

(٥-٤٣) متوسط الزمن اللازم لإكمال الطلاب عملية قيدهم بالجامعة هو 40 دقيقة. اقترح مدير الجامعة إجراءات جديدة لعملية التسجيل أو القيد، بمقتضاها سجلت أزمنة القيد لعدد 20 طالب أختيروا عشوائياً وكانت النتيجة أن متوسط زمن القيد في العينة 37.2 دقيقة بإنحراف معياري 4.5 دقيقة. من المكن أن نفترض بأطمئنان أن توزيع أزمنة القيد أو التسجيل قريبة من التوزيع الطبيعي.

(أ) مفترضاً أنه لا يوجد تحسن في متوسط زمن الإجراءات الجديدة، حدد إحتمال أن يكون متوسط الزمن لـ20 طالب هو 37.2 دقيقة أو أقل.

(ب) في ضوء إجابتك عن (أ)، هل يوجد سبب قوي لدى مدير الجامعة للأعتقاد بأن اجراءات القيد الجديدة قد تحسنت؟ إشرح.

(٥-٦) توزيع المعاينة للنسبة P في العينة:

The Sampling Distribution of The Sample Proportion P

هناك كثير من الحالات التي تكون فيها المعلمه الأساسية هي النسبة، ومن أمثلة ذلك: نسبة الفواتير التي بها أخطاء، نسبة المكالمات التليفونية التي تتجاوز حداً قياسياً (4 ساعات مثلاً)، نسبة شيكات العملاء التي بدون رصيد، نسبة الوحدات المرتجعة من العملاء. تذكرأننا أوضحنا سابقاً في هذا الفصل أن النسبة P في العينة هي أفضل إحصاء يمكن إستخدامه للإستدلال عن النسبة في المجتمع π. في هذا الفصل، سوف نحدد المتوسط والخطأ المعياري وتوزيع المعاينة للنسبة P.

(٥-٦-١) المتوسط والخطأ المعياري للنسبة في العينة:

The Mean and Standard Error of the Sample Proportion

ظهر توزيع المعاينة للنسبة في العينة في سياق الحديث عن توزيع ذو الحدين. تأمل وضعاً يكون فيه توزيع ذو الحدين مناسباً، كأن نلاحظ عدد حالات النجاح X من بين n من المحاولات المستقلة، أو أن X هي عدد الإستجابات التي تمثل نجاحات في عينة عشوائية حجمها n من مجتمع كبير. من الممكن أن نثبت أن النسبة في العينة P هي:

$$P = \frac{x}{n} \quad (5.5)$$

ولكل العينات الممكنة ذات الحجم n، يكون

$$E(P) = \pi \quad (5.6)$$

وأن الخطأ المعياري للنسبة P لجميع العينات الممكنة ذات الحجم n هي:

$$SE(P) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \quad (5.7)$$

بفرض أن عدد حالات النجاح X هي متغير عشوائي ذو حدين. نعلم أن المتوسط والتباين للمتغير X هما على التوالي:

$$E(X) = n\pi \quad (5.8)$$

$$Var(X) = n\pi(1-\pi) \quad (5.9)$$

(انظر البند (٤-٢) لمراجعة هذه النتائج). من البند (٣-٩)، يمكن أن نحدد المتوسط والتباين لمتغير عشوائي والذي هو توليفه خطية في متغير عشوائي آخر. على نحو خاص، إعتبر المتغيرين X، Y، بحيث أن: $Y=bX$ حيث b مقدار ثابت، بالتالي ومن خلال الصيغ (3.12) ,(3.13)، (حيث $a=0$) نجد أن:

$$E(Y) = bE(X) \quad (5.10)$$

$$Var(Y) = b^2 \, Var(X) \quad (5.11)$$

الآن، لاحظ أن: $P=X/n$ يمكن التعبير عنها وكأنها: $P=(1/n)X$ وبالتالي، بوضع $Y=P$ وبالتعويض عن $b=(1/n)$ في الصيغ (5.10) ,(5.11) نجد أن :

$$E(P) = \left(\frac{1}{n}\right)E(x) = \left(\frac{1}{n}\right)n\pi = \pi$$

$$Var(P) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\pi(1-\pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

وكنتيجة لذلك:

$$SE(P) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

هذا القدر البسيط من العمليات الجبرية يوضح أن المتوسط والخطأ المعياري للنسبة P في العينة هما نفس الصيغ (5.6) ,(5.7) التي وضحت من قبل.

للتوضيح، تذكر المثال الذي ورد في البند (٥-٢) حيث تمت محاكاة 40 عينة عشوائية، كل منها مكونة من 50 طالب مسحوبة من مجتمع طلاب أحدى الجامعات الكبيرة حيث نسبة المدخنين بها 20%. هذا الوضع يعادل توزيع ذو الحدين به: $n=50, \pi=.2$. بإستخدام الصيغ (5.6) ,(5.7) نجد أن المتوسط والخطأ المعياري للنسبة P لجميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم 50 والمسحوبة من هذا المجتمع هما على التوالي:

$$E(P) = .2$$

$$SE(P) = \sqrt{\frac{(.2)(.8)}{50}} = .056569$$

تذكر أن متوسط قيم P للأربعين عينة الموضحة في جدول(٥-٢) كان 188. بينما كان الخطأ

المعيـاري (البند ٥-٢) هو: SE(P)=.048527 . كمـا هو متـوقع فإن القيم 188. و 048527.. الناتجة عن إستخدام 40 عينة، هي قيم قريبة من القيم النظرية المناظرة لها: 2.و 056569. لجميع العينات العشوائية الممكنة والتي حجم كل منها: n=50.

المعنى المتـضمن في الصـيغ (5.6)و (5.7) مشـابهة لمعنى كل من المتـوسط والخطأ المعيـاري لـ $\bar{X}$ على التوالي، بمعنى أن النسبـة P في العينة هي مقدر غير متحيـز للنسبة π والخطأ المعياري لـلنسبة P يعتمد على كل من π, n (π عادة مـجهـولة). من ناحيـة أخرى، تزايد حجم الـعينة n يؤدي إلى تناقص الخطأ المعياري لـP. وهكذا، إذا رغبنا في تقدير P بدقة عالية، علينا بزيادة حجم العينة n. والنقطة الهامة هنا أن طبيعة SE(P) كدالة في n هي نفسها طبيعة $SE(\bar{X})$، أي: SE(P) تتناسب عكسياً مع الجذر التربيعي لحجم العينة n. فمثلاً للحصول على نصف الخطأ المعياري لـP، فإنه يجب زيادة حجم العينة بالضرب في المعامل 4.

والآن: إلى أي مدى تؤثر قيمة π في الخطأ المعـياري لـP؟ للإجابة على هذا السـؤال، دعنا نفرض أن n=100ثم نقارن الخطأ المعياري لـ p عندما تكون: $\pi=.2, \pi=.5$.

عند $\pi=.2$, n=100، نجد أن: $SE(P) = \sqrt{\frac{.2\times.8}{100}} = .040$ ،

عند $\pi=.5$, n=100، نجد أن: $SE(P) = \sqrt{\frac{.5\times.5}{100}} = .050$

وحيث أن الخطأ المعـياري عند $\pi=.5$ أكبـر منه عند $\pi=.2$ ، فإن الدقـة في P كمـقدر لـ π تكون أسوا عند $\pi=.5$، في الحقيقة فإن الخطأ المعياري لـP يكون أقصى ما يكون عند $\pi=.5$ ويتحسن كلما أخذنا بعين الإعتبار قيما لـ π قريبة من الصفر أو الواحد الصحيح، هذه النتـيجة ليست مفاجئة لنا، حيث ان توزيع ذو الحدين يظهر تبايـن أكبر عندما تكون $\pi=.5$ ويمكنك ايضاح ذلك لنفسك بسهولة باستخدام الصيغة (5.9) والتي تعطي تباين متغير عشوائي ذوالحدين.

مثال (٥-٨)

مـفتـرضا أكبر اخـتلاف ممكن لتوزيع ذوالحـدين (أي عند $\pi=.5$)، مـا هو حجم العـينة n الواجب سحبها من هذا التوزيع بحيث يكون الخطأ المعياري للنسبة في العينة هو 0.01.

الحـــل

أكبر اختلاف (تبـاين) لتوزيع ذو الحدين يحدث عندما تكون $\pi=.5$، وكما كان الحـال من قبل عندما كنا نتعامل مع$\bar{X}$ ، فإن حـجم العينة المطلوب لتحقيق خطأ معياري مرغوب فيه، يتحدد بمساواة صيغة الخطأ المعياري مع القيمة المرغوب فيها له. ثم الحل بالنسبة إلى n:

$$SE(P)=\sqrt{\frac{.5\times.5}{n}} = .01 \qquad \frac{.25}{n}=(.01)^2 \qquad n=\frac{.25}{(.01)^2}=2500$$

لذا، فإن حجم العينة المطلوب هو : n= 2500

(٥-٦-٢) نوع توزيع المعاينة للنسبة P في العينة:

The Type of Sampling Distribution for the Sample Proportion P

على الرغم من أن توزيع المعاينة الدقـيق للنسبة P قد حدده علماء الاحـصاء، إلا أنه ربما يكون غير عملي في التعامـل معه في معظم التطبيقات العـملية. وهذا التوزيع يخدم هدفنا تماما عند إختـيار تقريب

لتوزيع المعاينة للنسبة P يمكن أن يستخدم عندما يكون حجم العينة كبيرا إلى حد ما. نتذكر من البند(٤-٤)سؤالا كان على النحو التالي: ماذا يحدث لدالة إحتمال ذو الحدين عندما تقترب n من مالا نهاية ؟ الأجابة هي تحولها إلى دالة كثافة إحتمال التوزيع الطبيعي. وعلى ذلك وجدنا أن توزيع ذو الحدين يمكن تقريبه إلى التوزيع الطبيعي للعينات كبيرة الحجم. وحيث أن: $P=\left(\frac{1}{n}\right)X$ هي داله خطية في متغير عشوائي ذو حدين X، ينتج عن ذلك أن توزيع المعاينة لـP يمكن تقريبه أيضا إلى التوزيع الطبيعي للعينات كبيرة الحجم. بصفة خاصة، نتذكر أن توزيع ذو الحدين يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي عندما تكون $n\pi \geq 5,\ n(1-\pi) \geq 5$. في ظل تلك الخطوط العامة، فإن توزيع المعاينة لـP يكون قريبا من التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu= E(P)=\pi$ وإنحراف معياري $\sigma=SE(P) = \sqrt{\pi(1-\pi)/n}$

في التطبيقات العملية، عادة تكون π مجهولة، لذا كيف لنا أن نطبق الخطوط العامة السابقة اذا كنا لا نعلم قيمة π ؟ هنا يمكن أن نستخدم قيمة P من عينة عشوائية كمقدر لـ π وعندما نفعل ذلك، يجب أن يكون حاضرا في الذهن الخطوط العامة السابقة. توزيع المعاينة للنسبة P يكون متماثلا فقط عندما تكون $\pi=.5$ ، لذا عندما تقترب π من الصفر أو من الواحد يكون توزيع المعاينة للنسبة P ملتويا (تماما مثل توزيع ذو الحدين). لذا، عندما تقترب π من القيم المتطرفة لمدى π ، فإن التقريب الطبيعي لتوزيع المعاينة للنسبة P يكون مناسبا فقط في حالة العينات الكبيرة جداً في حجمها. الوضع التالي يلخص توزيع المعاينة للنسبة P .

ملخص : توزيع المعاينة الذي يستخدم في عمل استنتاج حول π اعتمادا على P

توزيع المعاينة للنسبة P يقترب بدرجة كافية من التوزيع الطبيعي، وله:

المتوسط: $\mu =\pi$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$

اذا كان: $n\pi \geq 5$ and $n(1-\pi) \geq 5$.

لذلك، اذا ما تم معايرة P ، فإن توزيع المعاينة للأحصاء Z ، حيث $Z = \frac{P-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$

يكون له تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (٥-٩)

شركة لتأجير الفيديو المنزلي لها سياسة تتطلب أن يكون 65% على الأقل من سكان المنطقة لديهم نظام VCR على أجهزة التليفزيون وذلك حتى يمكنها مد شبكة توصيلات كهربائية لتغذية أجهزة الفيديو. يدعى مدير التسويق بالشركة أن هذه المتطلبات متحققة في منطقة فارم فيل ويقترح مد شبكة كهربائية هناك. أظهرت دراسة تسويقية على عينة عشوائية من 100 من مواطني فارم فيل أن هناك 54 مواطن فقط لديهم نظامVCR .

(أ) بفرض أن$\pi=.65$ (أي ادعاء مدير التسويق صحيحا)، حدد احتمال أن قيمة P لن تزيد عن $54/100=.54$ في عينة من 100 مواطن.

(ب) هل بيانات هذه العينة تناقض ادعاء مدير التسويق ؟

الحل

(أ) اذا كانت π=.65 ، فإن .

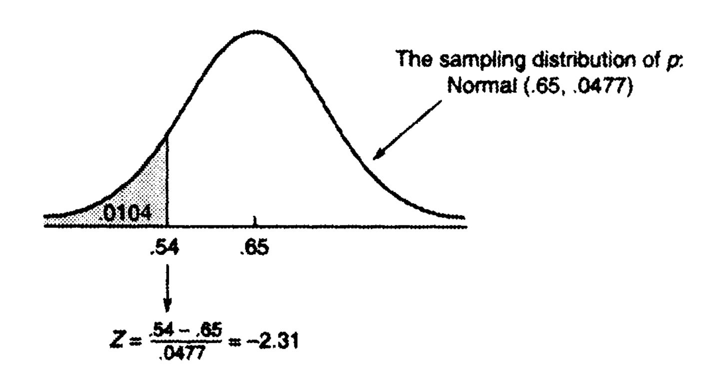
$$n\pi = (100)(.65) = 65 \text{ and } n(1-\pi) = 100(.35) = 35$$

لذا فإن P يكون لها تقريباً التوزيع الطبيعي بمتوسط π=.65 وخطأ معياري:

$$\sqrt{\pi(1-\pi)/n} = \sqrt{.65 \times .35/100} = .0477$$

وللإجابة على السؤال: نحول قيمة P=.54 إلى قيمة معيارية Z كما هي موضحة في شكل (٥-١٤).

$$P(p \le .54) = P(Z \le 02.31) = .0104$$



شكل (٥-١٤) : التناظر بين قيم P,Z

(ب) حيث أن احتمال أن يكون النسبة في العينة لا تزيد عن .54 هو .0104 فإن نتيجة الدراسة التسويقية (أي P=.54) تؤكد أنه من غير المحتمل أن تتحقق تلك النسبة بفرض أن ادعاء مدير التسويق كان صحيحاً. وحيث أن هذا قد حدث، فإن ادعاء مدير التسويق يبدو غير قابل للتصديق، على الأقل في الوقت الذي أجريت فيه الدراسة في منطقة فارم فيل، ولكن ضع في ذهنك، أن الكثير والكثير من الناس يشتروا أجهزة بها VCR وبالتالي فإن دراسة تسويقية أخرى تنفذ بعد سنة من الدراسة السابقة ربما تكشف عن نتيجة قد تكون قريبة من ادعاء مدير التسويق.

تمــاريــــن:

(٥-٤٥) حدد كل من المتوسط والخطأ المعياري لنسبة العينة P في كل من الحالات التالية:

(أ) n=100 قد سحبت من مجتمع له π =.5

(ب) n= 20 قد سحبت من مجتمع له π =.5

(جـ) n=100 قد سحبت من مجتمع له π =.05

(د) n= 20 قد سحبت من مجتمع له π =.05

(٥-٤٦) بالرجوع إلى التمرين(٥-٤٥):

(أ) اعتمادا على اجابتك في (أ) ، (ب)، كيف يؤثر حجم العينة على المتوسط والخطأ المعياري للنسبه P (مفترضا π =.5) ؟

(ب) اعتمادا على اجابتك في (أ) ، (ب)، كيف تؤثر π على المتوسط والخطأ المعياري للنسبه P (مفترضاً أن حجم العينة يساوي 100) ؟

(٥-٤٧) بالرجوع إلى التمرين(٥-٤٥) وفي الأجزاء من (أ)-(ب)، حدد ما اذا كان توزيع المعاينة للنسبة في العينة يلائمه تقريباً التوزيع الطبيعي. برر إجابتك في كل حالة.

(٥-٤٨) إن نتائج الإنتخابات السياسية المبدئية تترك تأثيراً كبيراً على إستراتيجيات الحملات الإنتاخبية للمرشحين. أحد مرشحي الكونجرس يخشى خصمه فيقوم بتقديم خطط دعائية مضادة لكن مدير حملته الإنتاخبية يعتقد بأنه على الأقل سوف يتعادل مع خصمه. لإلقاء الضوء على الموقف الإنتخابي فقد سحبت عينة من 250 ممن لهم حق الإنتخاب، مفترضا بصورة مؤقته بأن مدير الحملة الإنتخابية صائبا في رأيه، أي 50% من الناخبين يفضلوا المرشح السياسي و50%تفضل المنافس له.

(أ) حدد توزيع المعاينة للنسبة في العينة.

(ب) اوجد إحتمال أن نسبة المؤيدين لهذا المرشح لن تتعدى 48%، $(P < 0.48)$.

(جـ) بفرض أن نتيجة الإقتراع هي P=0.48، إعتماداً على إجابتك في (أ) هل يمكن أن نستنتج وبثقة أن مدير الحملة الإعلانية كان مخطئاً ؟

(٥-٤٩) بالرجوع إلى التمرين (٥-٤٨)، مدير الحملة الأنتخابية كان مهتما بنتيجة الأنتخاب غير الحاسمة P=.48 .

(أ) حدد حجم العينة اللازم لتخفيض الخطأ المعياري لـP ليكون $SE(P) = .01$ (مفترضا π =.50 كما في تمرين (٥-٤٨)).

(ب) مستخدما حجم العينة الذي حسب في (أ)، كرر تمرين (٥-٤٨) : الأجزاء (ب). (جـ) هل تفكيرك كما هو في (جـ) من تمرين (٥-٤٨) ؟ اشرح.

(٥-٥٠) الشركات التي تشترى قطع غيار من الموردين غالبا ما تحدد أقصى نسبة معيب مسموح بها في هذه القطع. تستخدم المعاينة العشوائية لتقرير ما اذا كان هذا الحد قد تم تجاوزه أم لا. بفرض أن أقصى نسبة معيب مسموح بها عند شراء شرائح معدنية لأجهزة الكمبيوتر هي 03.، طبقا لخطة الفحص المعمول بها واعتماداً على عينة عشوائية من 300 شريحة معدنية، اذا وجد بها 3% أو أكثر من الشرائح معيبة (أي: $P \geq .03$) فإن الكمية بالكامل تعتبر غير مقبولة ويتم فحصها بالكامل على حساب المورد. بفرض أن دفعه كبيرة تحتوي فعلا على 1.9% رقائق معيبة (لاحظ أنها نسبة معيب مقبولة).

(أ) عين توزيع المعاينة لـP.

(ب) أوجد احتمال ان تزيد نسبة المعيب بالعينة عن 03. ومن ثم تصبح الكمية غير مقبوله.

(٥-٥١) بالرجوع إلى التمرين (٥-٥٠) . افترض أن دفعة كبيرة تحتوي على 4% رقائق معيبة وهو مستوى غير مقبول من المعيب. حدد إحتمال أن قيمة نسبة المعيب في العينة تقل عن 03. وبالتالي نفشل في اكتشاف مستوى مفرط من المعيب.

(٥-٥٢) خلال العام الماضي وجد أن 40% من المتلكات المسجلة مع إحدى شركات العقارات ERI قد تم بيعها في خلال شهرين.

(أ) بفرض أن شركة العقارات تسلمت خلال الأسابيع القليلة التالية لذلك 50 طلباً، ما هو إحتمال أن 60% على الأقل من هذه الطلبات سيتم بيعها خلال شهرين مفترضاً أن النسبة π (0.40) مازالت سارية.

(ب) بفرض أن 30 من 50 طلبا قد تم بيعها فعلا خلال شهرين. إعتماداً على إجابتك في (أ) هل يمكن أن نستنتج أن π الآن تزيد عن 0.4 ؟

(٥-٥٣) استاذ إدارة استخدم في الأمتحان النهائي نفس الأمتحان لعدة سنوات. تاريخيا، 28% من طلبته حصلوا على العلامات B,A في الأختبار.

(أ) الفصل الدراسي الحالي به 50 طالبا. مفترضا أن π=.28 كما كانت في الأعوام السابقة، أوجد إحتمال أنه لن يزيد عن 14% من الطلبة يحصلوا على العلامات B أو أفضل.

(ب) افترض أن 14% فقط من طلبة الفصل الدراسي الحالي حصلوا على العلامة B أو أفضل. اعتماداً على أجابتك في (أ)، ما هي النتيجة التي يمكن تبريرها ؟

(٥-٧) توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

The Sampling Distribution of The Sample Variance S^2

تباين العينة S^2 هو أفضل إحصاء يمكن إستخدامه للإستدلال عن تباين المجتمع σ^2، تماما مثلما كانت $\overline{X}$ هي الأفضل لـ μ, P هي الأفضل لـ π. نعلم أن S^2 تقيس الأختلافات ومن ثم فهي تدل على التشتت أو الإنتشار بين القيم في عينة عشوائية. وحيث أن التباين من المقاييس الهامة مثله في ذلك مثل مقاييس النزعة المركزية، فإن أهمية S^2 للإستدلال عن σ^2 تضاهي أهمية $\overline{X}$ عند الإستدلال عن μ. في معظم التطبيقات العملية خاصة في مجال بيئة الإنتاج يكون تخفيض الإختلافات بين وحدات المنتج النهائي من الأهمية بمكان بالنسبة للأدارة. فمثلا لنأخذ عملية تصنيع القضبان الحديدية، إذا كان طول القضيب يختلف كثيراً عن الطول النمطي فإنه لن يستخدم وبالتالي يكون من المهم التأكد ليس فقط أن تكون القضبان المنتجة ذات أطوال صحيحة في المتوسط ولكن أيضا تكون الإختلافات في الأطوال صغيرة بدرجة كافية حتى تكون القضبان كلها ذات أطوال مطابقة للموصفات.

بإتباع نفس الخطوات التي وضحت في الفصلين الأخيرين، سوف نحدد المتوسط والخطأ المعياري للتباين S^2 ثم نبحث في توزيع المعاينة لـ S^2.

(٥-٧-١) المتوسط والخطأ المعياري لتباين العينة:

The Mean and Standard Error of the Sample Variance

نعلم من الفصل الثانى أن تباين العينة S^2 والتي حجمها n يمكن صياغته على النحو التالي:

$$S^2 = \frac{SST}{n-1} \qquad (5.12)$$

حيث :

$$SST = \Sigma(X_i - \overline{X})^2 \qquad (5.13)$$

القيمة المتوقعة لتباين العينة (متوسط القيم لجميع العينات المكنة ذات الحجم n) هو:

$$E(S^2) = \sigma^2 \qquad (5.14)$$

والخطأ المعياري هو (*)

$$SE(S^2) = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{5.15}$$

للتوضيح، تذكر مثال عملية التعبئة في الفصل (٥-٢) والذي فيه 50 = μ أوقية، σ =.5 أوقية. بإستخدام الصيغ (5.14) و(5.15) نجد أن المتوسط والخطأ المعياري للتباين S^2 لجميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n=10 هما:

$$E(S^2) = (.5)^2 = .25$$

$$SE(S^2) = .25 \sqrt{\frac{2}{10-1}} = .117851$$

أما فيما يتعلق بقيم S^2 الأربعين الموضحة في جدول(٥-١) فإن متوسط تلك القيم هو:

$$\frac{.1978+.1109+.........+.1899}{40} = .21845$$

أما تباين قيمS^2 فهو:

$$Var(S^2) = \frac{1}{40-1}[(.1978-.21845)^2 + (.1109-.21845)^2 + ...+(.1899-.21845)^2] = .0071506$$

وهكذا يكون الخطأ المعياري (الانحراف المعياري) لتباين الأربعين عينه هو:

$$SE(S^2) = \sqrt{.0071506} = .084561$$

ومثلما وجدنا في الحالات التي تشتمل على$P, \overline{X}$ ، نجد أن القيم 21845.,084561. الناتجة من 40 عينة هي قيم قريبة من القيم النظرية المناظرة لها وهي:25.,117851. لجميع العينات ذات الحجم n=10 والأختلاف الظاهر بينها يرجع إلى أننا قد حاكينا 40 عينة فقط بدلا من محاكاة عدداً أكبر بكثير من هذا.

يلاحظ من الصيغة (5.14) أن S^2 هو مقدار غير متحيز لـ σ^2 ، أما من الصيغة (5.15) ، فيلاحظ أنه كلما زاد حجم العينة كلما تناقص الخطأ المعياري للتباين S^2، لذا فإن طبيعة $SE(S^2)$ مماثلة تماما لطبيعة $SE(\overline{X})$ وطبيعة $SE(P)$ وبصفة خاصة: اذا زيد حجم العينة n بالمعامل 4، فإن النقص في $SE(S^2)$ يكون أكثر من النصف قليلا وليس النصف تماما بسبب أن المقام هنا هو(n-1) وليس n.

(٥-٧-٢) توزيع المعاينة لـS^2 :مقدمة لتوزيع كاي تربيع:

The Sampling Distribution of S^2: An Introduction to the Chi-Square Distribution

بفرض أنه سحبت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي. ولعمل استنتاجات حول تباين المجتمع σ^2 اعتمادا علىS^2 فإننا نحتاج إلى معرفة توزيع المعاينة لـ S^2، ومن الممكن اشتقاقه رياضيا، لكن ذلك قد يسبب إرتباكا وعدم متابعة في فهم الموضوع. عموماً كثيرا ما نهتم بإستخدام الأحصاء:$(n-1) S^2 / \sigma^2$ وهو-كما ترى- دالة في S^2. يطلق علي هذا الأحصاء أسم إحصاء كاي تربيع **Chi- Square Statistic** . وقد أثبت علماء الإحصاء أنه اذا كان توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي، فإن توزيع المعاينة لأحصاء كاي تربيع:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \tag{5.16}$$

(*) الأشتقاق الرياضي للصيغ (5.14)، (5.15) هو خارج نطاق هذا الكتاب.

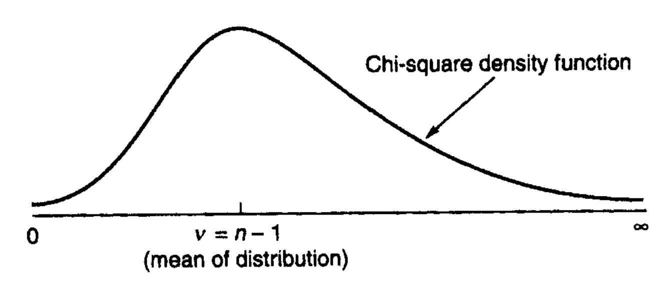
هو توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n-1). الرمز χ هو حرف يوناني كاي. درجات الحرية (n-1) المقترنة بالأحصاء كاي تربيع تعكس حقيقة أن هناك (n-1) من درجات الحرية مقترنه بتباين العينة S^2.

حتى هذه النقطة، ربما تسأل نفسك: لماذا هذا الأحصاء يسمى كاي تربيع ؟حسنا، أنه توزيع آخر من التوزيعات الأحصائية وله استخدمات كثيرة في الأحصاء التطبيقي (شأنه في ذلك شأن توزيع T) ولكي نتعرف بصورة أوضح على توزيع كاي تربيع، دعنا ننظر بأمعان للصيغة (5.16):

1- في البداية، تأمل فيما اذا كانت هذه الكمية يمكن أن تأخذ قيما أقل من الصفر. الأجابة بالطبع هي: لا، لأن كل σ^2 ,S^2 هي كميات مربعة وحجم العينة n هو عدد صحيح موجب ومن ثم فإن مدى المتغير العشوائي الذي يتبع كاي تربيع يبدأ من الصفر إلى (نظريا) مالانهاية.

2- متوسط توزيع كاي تربيع هو ببساطة (n-1) أي عدد درجات الحرية وهذا لا يدهشنا كثيراً، لأن القيمة المتوقعة لـ S^2 هو σ^2 وبالتالي فالقيمة المتوقعة (المتوسط) للأحصاء كاي تربيع $(n-1)\ S^2/\sigma^2$ يساوي (n-1).

3- ماذا بشأن شكل توزيع كاي تربيع؟ الشكل بكل تأكيد غير متماثل، لأن مداه محدود من اليسار بالصفر وغير محدود من اليمين، وبالتالي فشكله البياني ملتوي إلى اليمين، كما هو موضح في شكل (٥-١٥) ويكون الألتواء كبيراً عندما تكون درجات الحرية صغيرة ولكن يتضائل الألتواء كلما ازداد عدد درجات الحرية.



شكل(٥-١٥) : توزيع كاي تربيع

جدول كاي تربيع واستخدامه:

يتواجد توزيع كاي تربيع في معظم البرامج الأحصائية الجاهزة، بالإضافة إلى جدولته بصورة موسعة، وجدول D في الملحق يعطي قيما جزئية مقترنه بأحتمالات محددة تمثل مساحات تقع على يسار تلك القيم الجزئية، وتنظيم جدولD يماثل تنظيم جدول توزيعT، بمعني أننا في البداية نحدد عدد درجات الحرية، وهذا العدد مبين في أول عمود من الجدول تحت العنوان γ . بعد ذلك نختار الاحتمال المطلوب من بين الأحتمالات المبينه في عناوين الأعمدة. وعند الصف الذي يشير إلي درجات الحرية المناسبة والعمود ذو الاحتمال المطلوب، يعطي الجدول القيمة المناظرة. فمثلا، بفرض أن n=20 ونرغب في إيجاد القيم الجزئية التي تقابل الأحتمالات 01.و95.على التوالي. بالبحث في جدول D وعند درجات الحرية γ =19 وتحت الأعمدة 01. و95. نجد أن القيم الجزئية هي :7.63، 30.15 على التوالي، هذه البيانات تعنى أن إحتمال أن المتغير العشوائي كاي تربيع بدرجات حرية 19، إحتمال أن يأخذ قيما لا تزيد عن 7.63، 30.15 هي 01. و 95. على التوالي. بالرموز يمكن أن نكتب:

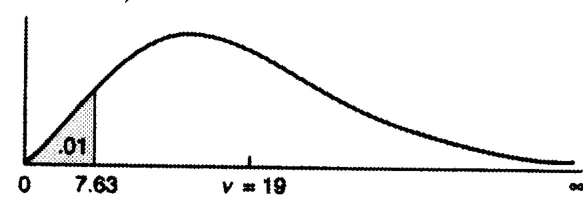
$$P\left(\chi^2_{19} \le 7.63\right) = .01$$

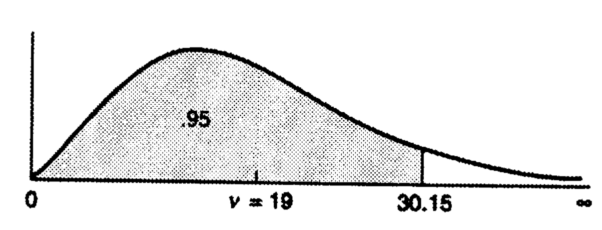
$$P\left(\chi^2_{19} \le 30.15\right) = .95$$

هذه القيم الجزئية واحتمالاتها المقترنه بها موضحة في شكل (٥-١٦) وينتج من قاعدة الأحتمال للحوادث المكملة أن :

$$P\left(\chi^2_{19} > 7.63\right) = .99$$

$$P\left(\chi^2_{19} > 30.15\right) = .05$$





شكل(٥-١٦): توضيح قيم كاي عند درجة الحرية 19

أستخدام الحاسب الألي:

مثلما فعلنا مع توزيعT، يمكن تجنب إستخدام جدول D واستخدام برنامج Minitab لتحديد قيم كاي تربيع الجزئية المطلوبة . وبخطوات مماثلة لتوزيع T ، يستخدم الأمرINVCDF حيث نحدد معه المساحة التي على يسار القيمة الجزئية المطلوبه ثم إستخدام الأمر الفرعيChisquare مقترنا بدرجات الحرية. القيم الجزئية الموضحة في شكل (٥-١٦) حصلنا عليها ببرنامج ميني تاب على النحو التالي:

```
MTB > invcdf          .01 ;
SUBC> chisquare       19.
    0.0100             7.6327
MTB > invcdf          .95;
SUBC> chisquare       19.
0.9500                30.1435
```

فرض الأعتدالية وتوزيع كاي تربيع:

ذكرنا أن الأحصاء $(n-1)S^2/\sigma^2$ له توزيع كاي تربيع بشرط أن يكون توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي (الأعتدالي)، ويقف هذا الشرط عائقا أمام هذا الأحصاء، فإذا كان التوزيع الفعلي للمجتمع يختلف كثيرا عن التوزيع الطبيعي، فإن توزيع كاي تربيع لا يمكن إستخدامه. وبعكس توزيع T، فتوزيع كاي تربيع شديد الحساسية لفرض الأعتدالية في هذا الشأن. وحيث أن هناك الكثير من الحالات التي يكون فيها توزيع المجتمع واضحا أنه توزيع غير طبيعي، فإن إستخدام توزيع كاي تربيع لعمل استدلال حول σ^2 يكون غيرمناسبا، وكنتيجة لذلك، فإن مقدرتنا في عمل استنتاجات إحصائية حول تباين المجتمع تصبح محدودة للغاية.

ولكن كيف لنا أن نحدد ما اذا كان استخدام هذا الأحصاء مناسباً أم لا ؟ أنها فكرة جيدة أن نعمل على تكوين مدرج تكراري للعينة، هذا اذا كانت العينة كبيرة بدرجة كافية حتى يكون هناك معنى أو فائدة للمدرج التكراري، فإذا كان واضحا أن المدرج التكراري غير طبيعي (أي اذا كان ملتويا بوضوح تام) فإن طريقة كاي تربيع هذه يجب تجنبها. أما اذا كانت العينة صغيرة جدا للدرجة التي لا يكون للمدرج التكراري فيها أي معنى، فإنه يمكن استخدام خطوات ليليفورس Lilliefors والتي سنتناولها في البند (١٤-٢) من الفصل الرابع عشر وذلك لأختبار فرض الأعتدالية. وفيما يلي ملخصاً لتوزيع المعاينة لـS^2:

ملخص :توزيع المعاينة الذي يسخدم لعمل استنتاجات عن σ^2 اعتماداً على S^2 إذا كان توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي، فإن توزيع المعاينة للإحصاء كاي تربيع، حيث: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ هو توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n-1)

مثال (٥-١٠)

في ظل شرط الأعتدالية (الطبيعية)، فإن متوسط زمن أداء عملية معينة في إحدى المحطات هو μ =7.5 دقيقة بإنحراف معياري σ=.5 دقيقة. وبهدف اكتشاف الإنحراف عن الأعتدالية، يقوم مدير المحطة بسحب عينات عشوائية بصفة دورية، كل عينة حجمها 16 عملية.

(أ) بفرض أن الإنحراف المعياري وهو 5. دقيقة هو فرض صحيح (بالتالي تباين المجتمع يكون 25.)وبفرض أن توزيع المجتمع لأزمنه اداء تلك العمليات هو التوزيع الطبيعي، أوجد إحتمال أن تباين العينة S^2 يتعدى 0.64.

(ب) ماذا يحدث لو أن تباين العينة فعلا تحول وأصبح S^2=.64 ؟ وإلى أي درجة يكون مقبولا الأدعاء بأن الإنحراف المعياري في المجتمع مازال 5.؟

الحل

(أ) إحتمال أن القيمة S^2 تزيد عن 64. هو نفسه كإحتمال أن إحصاء كاي تربيع يزيد عن 38.4 لأن:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1)(.64)}{.25} = 38.4$$

فإذا كان σ^2=.25 ، فإن المتغير العشوائيχ^2 يكون له توزيع كاي تربيع بدرجات حرية n-1 =15 . من جدول D بالملحق، احتمال أن : χ^2 يأخذ قيما لا تزيد عن 32.86 هو 0,995 (أختيرت القيمة الجدولية 32.86 لأنها القيمة التي تقع أمام الصف 15 والأقرب إلى 38.4 في نفس الوقت ما زالت هي أقل من 38.4) ومن ثم فإن احتمال أن يزيد الإحصاء كاي تربيع عن 32.86 هو : 1-0.995=0.005 وبالتالي فإن احتمال أنχ^2 يتعدى القيمة المشاهدة 38.4 هو أقل من 0,005 .

(ب) في ضوء الإجابة عن الجزء (أ)، يجب أن نعتبر أن حدوث S^2= 0.64 وكأنه حدث من غير المحتمل وقوعه، هذا اذا كان حقا σ^2=0.25 ، وكنتيجة لذلك فإن الادعاء بأن الانحراف المعياري في المجتمع ما زال باقيا كما هو، σ=0.5 ، يعد ادعاء غير مقبول.

تمـاريـــن:

(٥-٥٤) هل افتراض أن توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي متساوي الاهمية في استخدام إحصاءات T وكاي تربيع عند الإستدلال عن μ، σ^2 علي التوالي ؟ اشرح

(٥-٥٥) بفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع كاي تربيع وله 22 من درجات الحرية.

(أ) ما هي القيمة المتوقعة لـX ؟

(ب) أوجد إحتمال ان قيمته تتعدى 33.93 .

(جـ) اوجد قيمة X بحيث تقع 90% من المساحة على يمينها.

(د) اوجد قيمة X بحيث تقع 90% من المساحة على يسارها.

(٥-٥٦) بفرض أن X متغير عشوائي يتبع توزيع كاي تربيع وله 6 درجات حرية.

(أ) هل من الممكن أن X تأخذ قيمة سالبة ؟ أشرح.

(ب) أوجد إحتمال أن قيمة X تكون أقل من 1.24.

(جـ) أوجد إحتمال أن قيمة X تتعدى 14.46 .

(د) أوجد قيمة X بحيث تقع 95% من المساحة على يمينها.

(هـ) أوجد قيمة X بحيث تقع 95% من المساحة على يسارها.

(٥-٥٧) عند تقييم خطة تخفيضات الأسعار الجارية، يكون من المهم معرفة إلى أي مدى يتغير المكسب تبعا للقوة الشرائية. خطة التخفيضات تفترض ان متوسط المكسب الشهري 2200 دولار وإنحراف معياري 600 دولار شهرياً.

(أ) أختيرت عينة من 36 مندوب مبيعات لاختبار فروض هذه الخطة. بفرض ان المكاسب تتبع توزيع طبيعي وأن فروض الخطة صحيحة، أوجد إحتمال ان يتعدى تباين العينة القيمة $(768.11)^2$.

(ب) بفرض أن العينة العشوائية المكونة من 36 مندوب مبيعات أعطت متوسط 2200 دولار وإنحراف معياري768.11 دولار. إعتمادا على إجابتك في (أ) هل مازلت تجد ان المكاسب الكلية تتغير بإنحراف معياري 600 = σ دولار ؟ إشرح ذلك.

(٥-٥٨) صاحب مصنع للأدوات الرياضية يشتري مقابض اليد لمضارب التنس من أحد الموردين، تختلف المقابض نوعا ما في مقاومتها للكسر . إذا كانت قوة الكسر ضعيفة جدا، فإن المقبض لن يبقى طويلا، واذا كانت قوة الكسر كبيرة جدا، فإن هذا النوع من المقابض يعرف عنه أنه يفقد جودة اللعبة. بناء على إختبار قياسي لقوة الكسر، اشترط صاحب المصنع ان يكون متوسط قوة الكسر80 وحدة وان يكون الإنحراف المعياري لقوة الكسر لا يزيد عن2.05 وحدة. في عينة عشوائية من 28 من هذه المقابض، سجلت لها قوى الكسر التالية:

78.1	79.9	84.1	80.7	78.6	86.1	83.3	84.2	82.0	77.8
80.4	78.8	81.3	80.5	76.6	78.8	81.1	79.3	77.3	76.7
79.4	82.2	80.9	80.1	79.8	77.4	80.9	83.2		

(أ) حدد تباين قوة الكسر لهذه العينة.

(ب) افترض ان تباين قوة الكسر هو نفس القيمة التي يطلبها صاحب المصنع وان توزيع قوى الكسر هو الطبيعي. اوجد إحتمال ان تعطي العينة العشوائية $n = 28$ السابقة قيمة تباين اكبر من القيمة التي حصلت عليها في(أ).

(ج) اعتمادا على اجابتك في (ب) هل مازلت تجد ان إختلافات قوى الكسر للكمية كلها تقع داخل الإشتراطات الموضوعة ؟ اشرح إجابتك.

(٥-٥٩) ضبط الإختلافات في سمك مادة بلاستيكية هو من الامور الهامة لدى مدير مصنع ما. عندما تؤدى العملية الإنتاجية وظيفتها بصورة سليمة، فإن السمك يختلف طبقا لتوزيع طبيعي بإنحراف معياري 0.01 سم.

(أ) اختيرت عينة عشوائية من 25 قطعة من هذه المادة فاعطت إنحراف معياري 01176.سم. إذا كان الإنحراف المعياري للعملية الإنتاجية هو حقيقة01. سم، ما هو إحتمال ان يكون تباين العينة اكبر من $(.01176)^2$ ؟

(ب) اعتمادا على إجابتك في (أ) ما الذي يمكنك أن تستنتجه حول اختلافات السمك للعملية الإنتاجية الحالية ؟ اشرح إجابتك.

(٥-٨) ملخص SUMMARY

في هذا الفصل نوقشت المبادئ الأساسية في الإستنتاج الاحصائي بإستخدام بيانات العينة، وذلك لفهم الملامح الهامة في المجتمع (أو العملية)، وبصفة خاصة نوقشت ثلاث إحصاءات هامة $S^2, P, \bar{X}$ وقدم المنهج الأساسي الذي يستخدم لعمل استنتاجات عن معالم المجتمع المناظرة (σ^2, π, μ).

أحد أنواع الإستنتاج الأحصائي هو التقدير. النتيجة النهائية للتقدير اما التقدير بنقطة أو التقدير بفترة للمؤشر موضوع الدراسة. النوع الاخر من الإستنتاج هو إختبارات الفروض وفيها نختبر مشروعية أو فاعلية إدعاء ما يتعلق بقيمة للمؤشر. من المعلوم أن كل إحصاء يتذبذب في قيمته عشوائيا من عينة إلى أخرى، لذا فالخطوة الأساسية لتحديد فائدة أي إحصاء يستخدم في الإستنتاج هو التعرف على توزيع المعاينة لهذا الأحصاء وتوزيع المعاينة لأي إحصاء هو امر هام لأنه يكشف عن نظام الإختلاف في قيم هذا الاحصاء خلال العديد من العينات. بصفة عامة يعتبر الاحصاء أفضل إحصاء إذا كانت دقته المتوسطة خلال العينات العشوائية المتكررة جيدة بقدر الإمكان وإذا كان تباينه لكل العينات العشوائية المتكررة اصغر ما يمكن. بهذا المعنى، الأحصاءات $P, S^2, \bar{X}$ هي أفضل إحصاءات للمعالم π, σ^2, μ على التوالي.

توزيع المعاينة الذي يستخدم للأستدلال عن μ اعتمادا على $\bar{X}$ إما ان يكون التوزيع الطبيعي المعياري (إذا كان الانحراف المعياري في المجتمع σ معلوما) أو توزيع T (إذا كانت σ^2 مجهولة). توزيع T يشبه التوزيع الطبيعي المعياري عدا أنه يظهر تباينا أكثر. توزيع المعاينة الذي يستخدم للإستدلال حول π اعتمادا على P هو التوزيع الطبيعي وهو تقريب جيد في حالة العينات الكبيرة الحجم. توزيع المعاينة الذي يستخدم للإستدلال عن σ^2 إعتمادا على S^2 هو توزيع كاي تربيع. وتوزيع كاي تربيع هو توزيع ملتوي إلى اليمين ومداه من الصفر إلى ما لا نهاية(نظريا).

المراجـــــــع: REFERENCES

1- G. Canavos. *Applied probability and statistical Methods*, Boston: Little, Brown, 1984.

2- W.G. Cochran. *Sampling Techniques*,New York: John wiley& Sons, 1963.

3- B.W. Lindgren. *Statistical Theory*, 3rd ed. New york:Macmillan, 1976.

تمارين إضافية :

(٥-٦٠) خبير في التأمين على السيارات يعلم أن متوسط مطالبة الأصلاح 1140$ بإنحراف معياري 880$. في بداية العام الحالي وصلت مطالبات اصلاح السيارات إلي العدد 45 مطالبه.

(أ) هل من الضروري معرفة توزيع مطالبات الإصلاح في المجتمع لكي نحدد الإحتمالات المتعلقة بمتوسط العينة ؟ برر إجابتك.

(ب) حدد توزيع المعاينة لمتوسط العينة مفترضا أن المطالبات الـ 45 تمثل عينة عشوائية.

(جـ) مستخدما توزيع المعاينة من (ب)، أوجد إحتمال أن يقل متوسط المطالبات في العينة عن 980 دولار.

(٥-٦١) إذا كان العائد الشهري للياناصيب يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 260400$ وانحراف معياري 18500$. ما هو احتمال ان يقل متوسط العائد الشهري للعام القادم عن 250000$.

(٥-٦٢) زمن التجميع لاحدى الوحدات الإنتاجية هو في المتوسط 2.25 دقيقة بإنحراف معياري 0.55 دقيقة. خطة الإنتاج تقتضي إنتاج 50 وحدة يوميا.

(أ) حدد توزيع المعاينة لمتوسط زمن التجميع.

(ب) ما هو إحتمال أنه في يوم معين يكون متوسط زمن التجميع اكبر من 2.35دقيقة ؟

(٥-٦٣) مصنع لانتاج السجائر يدعى أن أحد الماركات التي ينتجها تحتوي على نيكوتين في المتوسط 0.6 ميلجرام لكل سيجارة. قامت احدى المنظمات المستقلة بقياس محتوى النيكوتين في عينة من 16 سيجارة وحددت بها متوسط كمية النيكوتين في السيجارة وكذلك الإنحراف المعياري ليكونا: 0.175,0.75 مليجرام على التوالي. مفترضا أن محتوى النيكوتين في هذه السجائر يناسبه توزيع طبيعي.

(أ) مفترضا أن ادعاء المصنع صحيحا، أوجد إحتمال أن يكون متوسط النيكوتين في العينة التي حجمها 16 سيجارة هو 0.75 مليجرام أو أكثر.

(ب) في ضوء إجابتك عن (أ) هل يمكن القول بأن إدعاء المصنع مقبولا ؟ وضح إجابتك.

(٥-٦٤) تاريخيا متوسط المبيعات اليومية في أحد مطاعم الوجبات السريعة هو 2000 $. ولكن منذ أن أفتتح محل منافس له منذ 25 يوم، أصبح متوسط المبيعات اليومية 1945 دولار بأنحراف معياري 300 دولار.

(أ) مفترضا أن الـ 25 يوما وكأنها عينة عشوائية، أوجد إحتمال أن يكون متوسط المبيعات في العينة أقل من أو يساوي 1945$.

(ب) معتمدا على اجابتك في (أ) هل من المقبول أن نستنتج أن متوسط المبيعات اليومية قد إنخفض؟

(جـ) في اجابتك عن (أ)، (ب) هل من الضروري أن يكون توزيع المبيعات اليومية هو التوزيع الطبيعي ؟ وضح ذلك.

(٥-٦٥) بالرجوع إلى التمرين (٥-٦٢) . تاريخيا وجد أن 12% من الوحدات المجمعة تحتاج إلى اعادة تجميع مرة أخرى.

(أ) اوجد احتمال أنه في يوم معين نجد أكثر من 18% من الوحدات تحتاج إلى اعادة تجميع.

(ب) بفرض أن 18% من الوحدات المجمعة هذا اليوم تحتاج فعلا إلى اعادة تجميع. في ضوء اجابتك عن (أ) هل هذا يشير إلى وجود مشكلة في عملية التجميع أم ان هذا العدد الكبير من الوحدات المعاد تجميعها يرجع إلى عامل الصدفة ؟ وضح إجابتك.

(٥-٦٦) ماكينة تنتج مفاتيح كهربائية وعندما تؤدى الماكينة وظيفتها بصورة سليمة فإن نسبة الإنتاج المعيب منها يصل إلى 0.8% .

(أ) اوجد إحتمال أن دفعة بها 1200 مفتاح تحتوي على 15 أو إكثر من المفاتيح المعيبة.

(ب) أفترض أن دفعة بها 1200 مفتاح فحصت كاملا ووجد بها فعلا 15 مفتاح معيب. معتمدا على اجابتك في (أ)، هل هذه النتيجة ترجع إلى الإختلافات العشوائية في عملية الإنتاج ؟ وإذا لم يكن كذلك ، فهل هذا يعني أن العملية الإنتاجية تحتاج إلى تعديل ؟ أشرح الأسباب التي تستند إليها.

(جـ) هل التوزيع الطبيعي الذي استخدمته في (أ) مناسبا ؟ اشرح ذلك.

(٥-٦٧) بعد سماع العديد من الشكاوي التي قدمت مؤخرا، قام مدير الحسابات بفحص مدى وقوع الاخطاء في الفواتير. تاريخيا، يعتقد أن الاخطاء تقع بمعدل 8% من الفواتير. قام المدير بفحص عينة عشوائية من أحدث الفواتير وعددها 144 فاتورة.

(أ) إذا كان معدل الخطأ التاريخي مازال ساريا، أوجد إحتمال أن نسبة المعيب في العينة هو 10% أو أكثر.

(ب) مفترضا أنه وجد فعلا 10% معيب في العينة، هل ترى انه من المقبول القول بأن هذه النسبة العالية من المعيب ناتجة من إختلافات المعاينة العشوائية لوحدها، وأنه لا يوجد تغير منتظم يؤدي إلى معدل خطأ مرتفع ؟ اشرح ذلك معتمدا على اجابتك في (أ).

(٥-٦٨) ماكينة تعبأ علب صفيح سعتها 12 اوقية من سائل زيت الفرامل. من المهم ان تتم التعبئة بصورة سليمة، فالتعبئة الزائدة تعنى سائل مفقود والتعبئة الناقصة تسبب شكاوي. عندما تعمل الآله على نحو لائق، فإن التعبئة تتغاير طبقا لتوزيع طبيعي بمتوسط 12.00 اوقية وإنحراف معياري 0.15 أوقية.

(أ) أوجد احتمال ان عينة من 20 علبة سوف تعطي تباين $(0.18)^2$ أو اكثر.

(ب) اذا لم يكن توزيع التعبئة هو التوزيع الطبيعي (ولكن المتوسط والانحراف المعياري باقيان كما هما)، فهل إجابتك في (أ) تتأثر ؟ اشرح لماذا تتأثر أو لماذا لا تتأثر.

(٥-٦٩) احد المشرفين يراقب مدى اتساق أو انتظام مهمة يقوم بها أحد الموظفين. هذه المهمه يفترض انها تستغرق في المتوسط 90 ثانية بانحراف معياري10 ثوان. فحص المشرف عينة عشوائية من 36 من الأزمنه التي سجلت لهذا الموظف عندما قام بهذه المهمة.

(أ) اوجد إحتمال أن قيمة التباين في العينة يتعدى163.89 ثانية تربيع، إذا كان اداء الموظف لهذه العملية في المدى الطويل يتفق مع الخطوط العامة الأساسية.

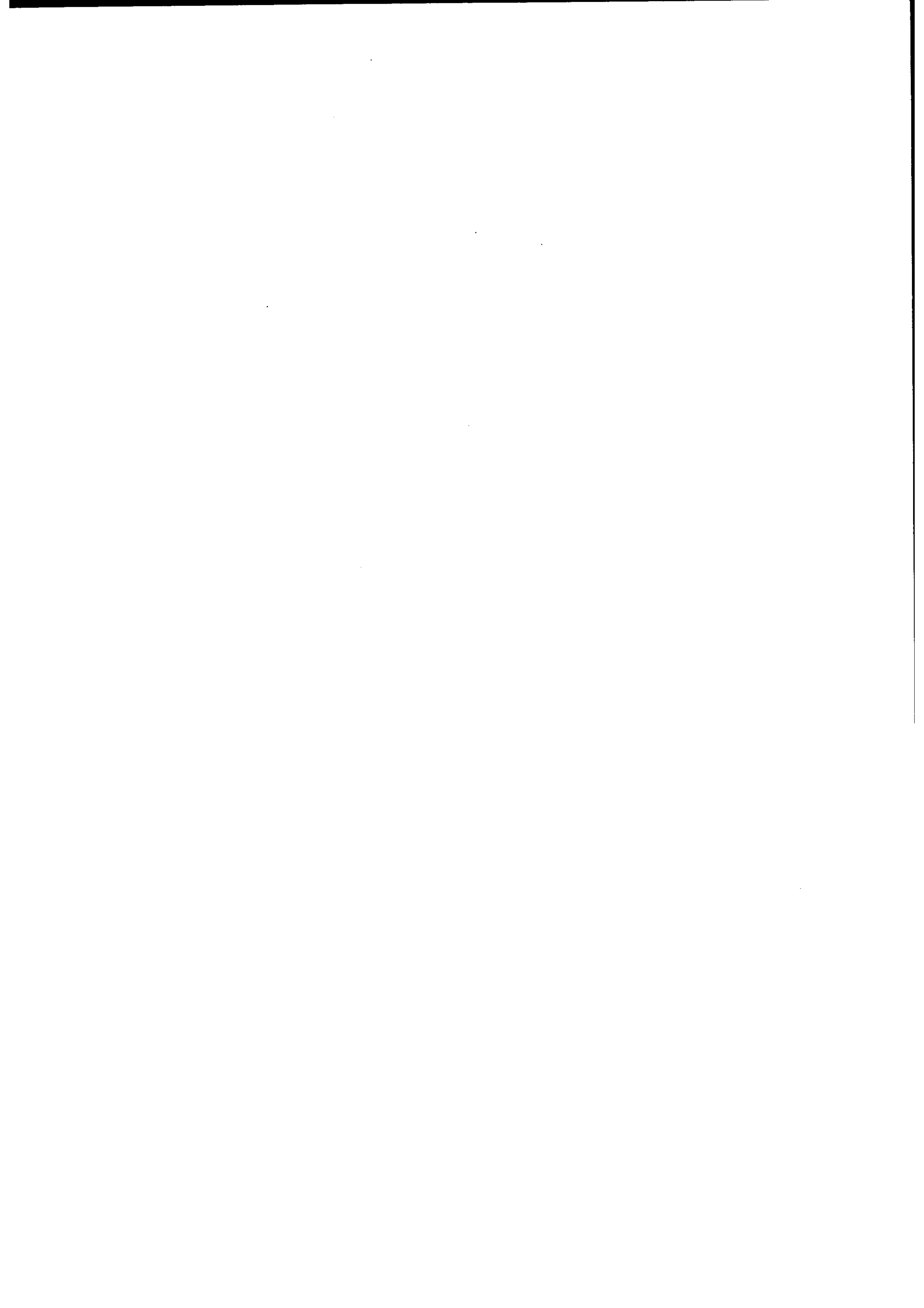
(ب) لكل تكون إجابتك في (أ) سليمة، هل من الضروري أن تضع افتراضات تتعلق بتوزيع ازمنة أداء هذه المهمة ؟ وإذا كان كذلك ما هي هذه الفروض ؟ وإذا لم يكن كذلك اشرح اسبابك.

الفصل السادس

الإستنتاجات الإحصائية المتعلقة بمجتمع واحد

STATISTICAL INFERENCES FOR A SINGLE POPULATION OR PROCESS

محتويات الفصل



الفصل السادس

الإستنتاجات الإحصائية المتعلقة بمجتمع واحد

STATISTICAL INFERENCES FOR A SINGLE POPULATION OR PROCESS

(٦-١) نظرة عامة على محتويات الفصل: Bridging to New Topics

في هذا الفصل، نبدأ في تطبيق المبادئ الأساسية للإستنتاج الإحصائى، تلك التي قدمناها في الفصل (٣-٥)، وبصفة خاصة، سنوضح كيف نتكشف التقدير بفترة للمعالم الهامة μ,π,σ^2 إعتماداً على مشاهدات عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع. مثل تلك التقديرات بفترة تسمى فترات الثقة **Confidence interval**. يضاف إلى ذلك، إستعراض خطوات إختبار إدعاء أو مقولة تتعلق بقيم عن هذه المعالم. هذا النوع من الإستدلال يسمى إختبارات الفروض **Hypothesis testing**. وهناك إقتران قوي بين فترات الثقة وإختبارات الفروض. وكما سنرى فيما بعد، سنوضح كيف نستفيد مما قدم سابقاً في تنفيذ مما هو آت. أيضاً، سنقدم منهجاً آخر في إختبارات الفروض الإحصائية يعرف باسم **P-value**، وهو ذو فائدة خاصة عند إستخدام برنامج الحاسب الآلي. وكما أشرنا في الفصول السابقة، يجب أن تضع في ذهنك أنه إذا كانت بيانات العينة هي نواتج عن عملية غير مستقرة، فإن مثل هذه البيانات من غير المحتمل أن تكون كافية لعمل إستنتاج له معنى، حتى ولو كانت البيانات تكون عينة عشوائية.

وكما هو معلوم، فإن الأحصاءت $S^2, P, \overline{X}$ وتوزيعات المعاينة لها هي الأساس في عمل إستنتاج إحصائي حول المعالم المناظرة لها σ^2, π, μ، ويمكنك مراجعة محتويات الفصل الخامس قبل مواصلة الفصل الحالي.

(٦-٢) دقة التقدير بنقطة: مقدمة لفترات الثقة:

The Precision of Point Estimators: An Introduction to Confidence Intervals

في المشاكل العملية المتضمنة عملية تقدير المعالم، فإنه ليس كافياً فقط الإعتماد على التقدير بنقطة. سنتناول المثال التالي. إفترض أنك كنت مديراً في قسم الإصلاح في شركة لتصنيع معالج الكلمات **(Word Processors)** بأجهزة الحاسب الآلي. العامل الأساسي في رضى المستهلك هو "زمن الإستجابة"، أي الزمن الذي يستغرق للحصول على خدمة الإصلاح الذي يحتاجه المستهلك. أنت مسئول عن المحافظة على متوسط زمن الإستجابة عند المستوى 4 ساعات أو أقل. لأختبار متوسط زمن الإستجابة الحالي، قام أحد زملائك في القسم بدراسة عينة عشوائية من أحدث 20 زمن إستجابة، وعن طريق تحديد متوسط العينة، قدر زميلك متوسط زمن الإستجابة μ لكل الأصلاحات الحديثة ليكون 3.6 ساعة. هل يمكنك أن تستنج وبثقة أن متوسط زمن الإستجابة هذا يعد مرضياً أو مقنعاً؟

الإجابة الصحيحة أن المعلومات المعطاه غير كافية لتخبرنا بذلك. فالتقدير 3.6 ساعة قد أشتق من عينة وبالتالي فهو عرضة لخطأ المعاينة، بمعنى، أن متوسط زمن الإستجابة لإصلاح عملية ما يمكن أن يكون أكبر أو أقل من 3.6 ساعة بكمية ما. للإجابة على السؤال السابق، فأنت تحتاج إلى معرفة دقة المقدر Precision ($\overline{X}$ في هذه الحالة). لا يمكن لأحد أن يستنتج وبثقة أن متوسط زمن الإستجابة لعملية الإصلاح هو قيمة مرضية أو مقنعة بدون أن يعرف أولاً توزيع المعاينة لهذا المقدر. الآن، ماذا لو كنت متأكداً من أن التقدير 3.6 ساعة به خطأ بما لا يتعدى 0.4 ساعة؟ عندئذ μ يجب ألا تقل عن 3.2 ساعة ولا تزيد عن 4 ساعات، ومن ثم يمكنك أن تفترض أن متوسط زمن الإستجابة الحالي هو قيمة مرضية أو مقنعة. من ناحية أخرى، إفترض أنك علمت أن التقدير 3.6 ساعة يمكن أن يكون به خطأ 1.6ساعة. عندئذ μ إما أن تنقص إلى 2ساعة أو تزيد إلى 5.2 ساعة، وهنا فأنت لا يمكنك أن تكون واثقاً بأن متوسط زمن الإستجابة الحالي هو حقاً أقل من 4 ساعات، وفي هذه الحالة فإن القرار إعتماداً على التقدير بنقطة وهو 3.6 ساعة يكون محفوفاً بالمخاطر. وكما ترى، فإنه من المهم أن تفهم دقة المقدر قبل الإعتماد عليه في عملية إتخاذ القرارات.

في كثير من الحالات العملية تكون التقديرات بنقطة غير كافية لإتخاذ قرارات مالم تصطحب بعبارة عن الخطأ المحتمل المعتمد على توزيع المعاينة لمقدر. في هذا المثال يكون من المهم أن تكون عبارة "نحن نقدر أن 3.6=μ ساعة" مصحوبة بعبارة مثل "نحن نعتقد أن هذا التقدير له خطأ لا يزيد عن 0.4 ساعة". لاحظ أن تلك العبارتان معاً تعنيان أن لدينا سبباً للإعتقاد بأن μ تقع داخل الفترة 3.6±.4 أي بين 3.2 ساعة 4 ساعات. الفترة من 3.2 إلى 4 ساعات هي فترة تقدير لـμ.

من المهم أيضاً أن نعرف كيف نثق بأن الفترة المحددة هي فعلاً تضم القيمة μ. العبارة "نحن نعتقد..." هي عبارة غامضة جداً وغير دقيقة. فمثلاً، عندما نقول نحن نعتقد أن μ تقع في الفترة من 3.2 ساعة إلى 4 ساعات، هل نحن نثق في صحة ذلك بـ72%؟ أم نثق بـ95%؟ أم نثق بـ99% ؟من المهم أن تكون درجة الثقة محدده في العبارة وأن يكون مستوى الثقة مقبولاً لمتخذ القرار. في هذا المثال، عبارة مثل "نحن نثق بـ90% أن μ تقع بين 3.2 ساعة، 4 ساعات" تعطي متخذ القرار معلومات كافية إما لإتخاذ قراراً ما أو أن يؤجل هذا القرار حتى يتم تجميع معلومات أكثر.

وهكذا، عندما نكون مهتمين بتقدير معلمه ما، يكون من المهم أن يتوفر لدينا: (1) تقدير بنقطة (2) حجم الخطأ المحتمل في التقدير بنقطة، أو بمعنى مماثل مدى من القيم يعتقد أنه من المحتمل أن يضم القيمة الفعلية للمعلمه. (3) درجة الثقة التي تلحق أو تصاحب عبارة أن قيمة المعلمه تقع داخل مدى محدد. ولكن كيف لنا أن نحدد حجم الخطأ المحتمل ودرجة الثقة؟ الواقع أن كلاهما يعتمد على توزيع المعاينة للمقدر. النقاط التي شملت المعلومات الثلاث السابقة تسمى فترة الثقة. لذا فإن فترة الثقة **Confidence interval** تتكون من فترة تقدير للمعلمة مصحوبة بعبارة ثقة بأن تلك الفترة تحتوي على قيمة المعلمه. في البند (٦-٤) سنوضح كيف تتكون فترة الثقة.

تمارين:

(٦-١) وضح لماذا يعد غير كافياً إستخدام التقديرات بنقطة في عملية إتخاذ القرارات.

(٦-٢) ناقش الدور الذي يلعبه مستوى الثقة في فترة الثقة.

(٦-٣) حدد بإختصار أهمية الإستعدادات المسبقة عند تقدير معلمه ما.

(٦-٤) عند تحديد دقة مقدر ما، ما الذي يجب أن نعرفه ولماذا يعد ذلك مهماً؟

(٦-٥) إفترض أن فترة التقدير للمعلمه θ على الصورة: 10 ± 2.

أ) ماذا يكون التقدير بنقطة لـθ؟

ب) ما هو حجم الخطأ في التقدير بنقطة؟

جـ) ما هو مدى القيم الذي يعتقد أن يضم داخله θ؟

(٦-٣) إختبارات الفروض الإحصائية: مقدمة

The Testing of Statistical Hypotheses: An Introduction

الفرض الإحصائي **Statistical Hypothesis** هو إدعاء أو إعتقاد أو تخمين يتعلق بقيمة غير معلومة للمؤشر، فمثلاً: ربما يخطط السياسي حملته الإنتخابية على أساس إعتقاده بأن 60% من كل دافعي الضرائب يفضلوا فرض ضرائب أعلى، بهدف خفض العجز في الميزانية الإتحادية (بمعنى: الإدعاء هنا أن: π=.6). في مثال عملية التعبئة في الفصل (٥-٣)، ربما ندعي أن متوسط كمية المنظف المعبأ في العلبة هو 50 أوقية (أي أننا ندعي أن: μ=50). يلاحظ أنه في كلا المثالين، لم نهتم بتقدير π أو μ إعتماداً على عينات عشوائية مناسبة، بل أننا نرغب في معرفة ما إذا كانت هذه الإدعاءات (μ=50, π=.6)، صحيحة وأن بيانات العينة تدعم هذه الإدعاءات أم لا.

على الرغم من أنه في إختبارات الفروض لا نهتم بعملية تقدير العالم، إلا أن هناك علاقة قوية بين منهجية إختبارات الفروض وفترات الثقة. لنفرض أنه إعتماداً على عينة عشوائية من المشاهدات مسحوبة من مجتمع محل الدراسة، كانت القيمة التخمينية لمؤشر المجتمع تقع داخل فترة الثقة لهذا المؤشر، عندئذ يمكن قبول ذلك الإدعاء أو التخمين المتعلق بقيمة المؤشر، أما بخلاف ذلك تصبح القيمة التخمينية لمؤشر المجتمع غير مقبوله. فمثلاً، تذكر العبارة الموضحة في نهاية البند السابق "نحن نثق 90% أن μ تقع بين 3.2 ساعة ، 4 ساعات"، في سياق الحديث عن إختبارات الفروض، هذه العبارة تعني أن أي قيمة يدعى بها عن μ تقع داخل الفترة 3.2 إلى 4 ساعات يعتبر إدعاء مقبول بينما أي قيمة يدعى بها خارج تلك الفترة لا يمكن تصديقها أو قبولها.

في تطبيقات إختبارات الفروض، يتواجد عملياً فرضين متقابلين: الفرض العدمي **Null hypothesis** والفرض البديل **Alternative hypothesis**. وسوف نميز بينهما حالاً. تستند فلسفة إختبارات الفروض على فكرة الأثبات عن طريق المقابلة بين المتناقضات. دعنا نفترض مؤقتاً أن ادعاء الفرض العدمي صحيحاً. هنا نسحب عينة عشوائية من المشاهدات من المجتمع محل الدراسة، هذه المشاهدات تكون دليل العينة، فإذا كان دليل العينة لا يبدو أنه يناقض الفرض المتعلق بذلك الادعاء، فإننا نقبل بعبارة أن الفرض العدمي صحيحاً. أما إذا كان دليل العينة واضحاً أنه يناقض الفرض العدمي، فإننا نرفضه، وبالتالي نقبل بعبارة الفرض البديل.

في عملية تشبيه أو مناظرة يمكن أن نجدها في قاعة المحكمة. أحد الفروض أن المدعي عليه "مذنب" والفرض الأخر أنه "غير مذنب". هيئة المحلفين تفترض أن المدعى عليه "غير مذنب" ما لم يكن هناك دليلاً واضحاًوبدون أدنى شك على أنه "مذنب". هل يمكنك تحديد الفرض العدمي والبديل في هذه المناظرة؟ المقدرة على تحديد الفرض العدمي والبديل من الأمور الهامة. الآن أمامك دقيقة للتعرف على كل من الفرض العدمي والفرض البديل من خلال المناظرة في قاعة المحكمة وذلك قبل متابعة القراءة.

حيث انه يفترض أن المتهم "غير مذنب" مالم يكن هناك دليل مناقض ومقنع يمكن تقديمه، فإن تلك العبارة هي الفرض العدمي. وحيث أن إتهامه بأنه "مذنب" يجب أن يؤثث على أسباب منطقية بدون أدنى شك، فإن تلك العبارة هي الفرض البديل. لاحظ أن الفرض العدمي قد صيغ على شكل "غير مذنب" مفضلة عن "برئ". هذه الصياغة تؤكد أن البراءة لم يكن لها ما يثبتها بقناعة واضحة. وهذا هو واجب جهة الادعاء لتقدم دليل واضح ومقنع لإدانه المتهم. وبدون مثل هذا الدليل فليس أمام هيئة المحلفين إلا أن تبقى مع الفرض العدمي بأنه "غير مذنب". وهكذا، الفرض المؤقت "غير مذنب" هو فرض هيئة المحلفين وبدون دليل قوي واضح يناقض "غير مذنب"، ستظل هيئة المحلفين عند هذا الفرض.

الفرض العدمي والفرض البديل:

الفرض العدمي **Null hypothesis** يرمز له بالرمز H_0. أنه صفة مميزة لا تحتاج إلى أثبات، فنحن نفترض أنه صحيحاً مالم يظهر بوضوح أنه غير صحيح. في مثال عملية التعبئة، عادة ما تكون عملية تعبئة المنظف في العلب بمتوسط 50 أوقية. في أي وقت من عملية التعبئة، نفترض أن هذا هو المتوسط مالم يكن دليل العينة يشير بوضوح إلى أن هذا المتوسط قد إنحرف. بالتالي، يوضع الفرض العدمي على النحو التالي:

$H_0 : \mu = 50.$

وفيما يتعلق بمثال نسبة دافعي الضرائب اللذين يفضلوا ضرائب أعلى، يكتب الفرض العدمي على الصورة.

$H_0 : \pi = .6$

هذا هو الفرض العدمي، لأن إستراتيجية الحملة الإنتخابية لذلك السياسي قائمة على أساس هذا الأعتقاد، مالم يكن دليل العينة (أي الأقتراع) يشير بوضوح إلى خلاف ذلك.

بصفة عامة، يتصف الفرض العدمي بحقيقة أننا نعامله وكأنه صحيح مالم يكن إدعائه يتناقض بوضوح مع بيانات العينة. لذا، إذا كان الفرض العدمي غير مناقض بوضوح، فإنه لا يوجد سببا كافياً لرفضه. وغالباً ما ننظر إلى الفرض العدمي على أنه نقطة البداية في عملية التحليل. مرة أخرى نعود إلى مثال عملية التعبئة، حيث أن عملية التعبئة مصممه على أن يكون متوسط العبوة هو 50 أوقية فإن نقطة البداية المنطقية للتحليل هي: $\mu=50$.

الفرض البديل **Alternative hypothesis** يرمز له بالرمز H_a. وهو بديل لحالة الفرض العدمي، ففي مثال عملية التعبئة، يكون الفرض البديل هو أن متوسط العملية الحالي ليس 50 أوقية، ويعبر عن ذلك بالصيغة:

$H_a : \mu \neq 50$

وفي المثال الذي يتعلق بنسبة دافعي الضرائب اللذين يفضلوا رفع الضرائب لتخفيض العجز في الميزانية، يكون الفرض البديل هو أن النسبة أقل من 0.6 ويعبر عنها بالصورة:

$H_a : \pi < .6$

لماذا لم يشمل هذا الفرض على إمكانية أن النسبة يمكن أن تتعدى 0.6؟ من الواضح أن استراتيجية ذلك السياسي يجب أن تتغير فقط إذا كانت نتائج العينة أقنعته بأن نسبة الناخبين اللذين يفضلوا رفع

الضرائب هي أقل مما يعتقد (أي 0.6). أما إذا أشارت بيانات العينة إلى أن النسبة كانت أعلى من ذلك، فإنه لن يغير من استراتيجية حملته الإنتخابية.

ويتم قبول الفرض البديل متى كان الفرض العدمي يتناقض بقوة مع بيانات العينة. ففي مثال عملية التعبئة، يجب أن نقبل إدعاء H_a بأن متوسط التعبئة ليس 50 أوقية إذا كانت بيانات العينة (دليل العينة) يتناقض بقوة مع الإدعاء بأن $\mu=50$. رفض الفرض العدمي (ومن ثم قبول الفرض البديل) غالباً ما يعطي الأساس الأحصائي لأتخاذ قراراً أو تغيراً في خطة العملية الإنتاجية، ففي مثال عملية التعبئة، قد يكون هناك ما يدعو إلى إتخاذ إجراءات تصحيحية.

الفرض البديل: طرف واحد وطرفين:

الفرض البديل إما أن يكون طرف واحد أو طرفين، ويتحدد هذا من خلال إتجاه الإنحراف في قيمة المعلمه المدعى بها بالفرض العدمي. ففي مثال عملية التعبئة، الفرض البديل: $H_a: \mu \neq 50$ هو إختبار طرفين لأن المشكلة المحتملة (وهي انحراف المتوسط عن 50) ربما تحدث اذا كان دليل العينة يشير إلى أن متوسط التعبئة μ إما أن يكون أقل من 50 أوقية أو أكبر من 50 أوقية. وفي مثال النسبة، الفرض البديل: $H_a: \pi < .6$ هو إختبار طرف واحد، لأن السياسي يكون مهتما فقط بالوضع الذي تكون فيه النسبة في المجتمع أقل من 0,6. وبمعنى أخر، اذا كان ادعاء الفرض العدمي غير صحيح، فإن استراتيجية الحملة الأنتخابية يجب تغيرها فقط اذا كان $\pi < .6$ ولا يجب تغيرها اذا كان $\pi > .6$.

يلاحظ أن الفرض البديل من طرف واحد يعطي اتجاه محدد لأنحراف قيمه المعلمه التي يدعيها الفرض العدمي، ولكن الفرض البديل من طرفين لايكون كذلك. بصفة عامة، المنطق المعقول هو صياغة الفرض من جانب واحد فقط اذا كانت قيمه المعلمه التي تبتعد عن قيمه الفرض العدمي في اتجاه آخر للفرض البديل لن تؤدي إلى إجراء ما أو تغير من إعتقاد معين.

استعراض طريقة إختبارات الفروض:

في الفصول التالية، نتناول إختبارات الفروض للمعالم الأساسية μ, π, σ^2 وهناك خيط مشترك في الطريقة التي تستخدمها أيا كانت المعلمه وهذا هو ما نتناوله الآن.

إفترض أن θ تمثل أي معلمه مجهولة وأن θ_o هي القيمة المدعى بها لـ θ في الفرض العدمي. في إختبارات الفروض المتعلقة بـ θ، نركز على أفضل إحصاء للمعلمه θ. نفرض أن A هو أفضل إحصاء للإستدلال حول θ. يعتمد الأختبار على مقارنة A التي نحصل عليها من العينة العشوائية مع القيمة المدعى بها θ_o، فإذا كانت قيمة A تختلف عن θ_o، فهناك تفسيران محتملان:

(١) θ_o هي فعلا قيمة θ وأن قيمة الأحصاء A تختلف عن θ_o بسبب خطأ المعاينة لـ A (إختلاف المعاينة العشوائية).

(٢) θ_o ليست هي قيمة θ، (لذلك يصبح الفرض البديل صحيحاً).

تذكر أن الفرض العدمي يتم رفضه فقط اذا كان واضحاً أن دليل العينة يناقض ذلك، فإذا كانت قيمة A الناتجة من بيانات العينة العشوائية قريبة (بصورة معقولة) من θ_o، فإن التفسير الأول يبدو منطقيا ولا يوجد لدينا سببا لرفض الفرض العدمي. ومع هذا كله، فإن بعض الأنحرافات في A عن θ_o كان متوقعا بسبب إختلاف المعاينة. ولكن إذا كان الإختلاف بين قيمة A ، θ_o كبيراً، فإنه من غير المعقول أو المقبول أن تصبح تلك الإختلافات ناشئة عن اختلاف المعاينة العشوائية فقط. وعلى ذلك،

اذا كانت قيمة أفضل إحصاء A تختلف بدرجة كافية عن القيمة المدعى بها θ_0، فإننا نرفض الفرض العدمي ونعود إلى الفرض البديل. هذه هي الفلسفة الأساسية لأختبارات الفروض.

تمارين:

(٦-٦) ناقش الفروق الأساسية بين تقدير المعالم وإختبارات الفروض الأحصائية.

(٦-٧) افترض أن فترة الثقة 95% لمتوسط المجتمع μ كانت من 110 إلى 160 وحدة. افترض أيضا أن شخص ما ادعى أن μ تساوي 120 وحدة. مستخدما فترة الثقة هذه، ما هي النتيجة المتوقعة لهذا الأدعاء ؟ اشرح.

(٦-٨) وضح طبيعة الفرض العدمي والفرض البديل.

(٦-٩) متى يجب إستخدام الفرض البديل من طرف واحد بدلا من الفرض البديل من طرفين ؟

(٦-١٠) تاريخيا، نموذج خدمة ما له المتوسط 1.5 خدمه لكل سنه. في عينه عشوائية حديثه أظهرت المتوسط 2.3 خدمه كل سنه. هناك اعتقاد بأن جودة الخدمة في حالة تناقص.

(أ) ضع الفرض العدمي والفرض البديل وبرر هذا الأختيار.

(ب) حدد ما الذي يقارن في إختبار ادعاء الفرض العدمي.

(٦-١١) تاريخيا، نسبة المواطنين البالغين الذين يلعبون بانتظام لعبه الحظ هي.4، في عينه عشوائية حديثه تبين أن 37% من المواطنين البالغين يلعبوا بإنتظام تلك اللعبه. هناك إعتقادا ما بأن تلك النسبة قد تغيرت عن قيمتها التاريخية. أجب عن الأجزاء (أ)،(ب) في التمرين (٦-١٠)

(٦-١٢) تاريخيا، كان التباين في عدد الوحدات المنتجة بواسطة عامل ما هي 4 وحدات مربعه كل يوم. قرر صاحب المصنع تنفيذ برنامج تدريبي مكثف لعمال المصنع بهدف خفض الأختلافات في عدد الوحدات المنتجة في اليوم لكل عامل. بعد الأنتهاء من البرنامج التدريبي، أظهرت عينه عشوائية أن التباين أصبح 3.6 وحدة مربعة. أجب عن الأجزاء(أ) ،(ب) في التمرين (٦-١٠).

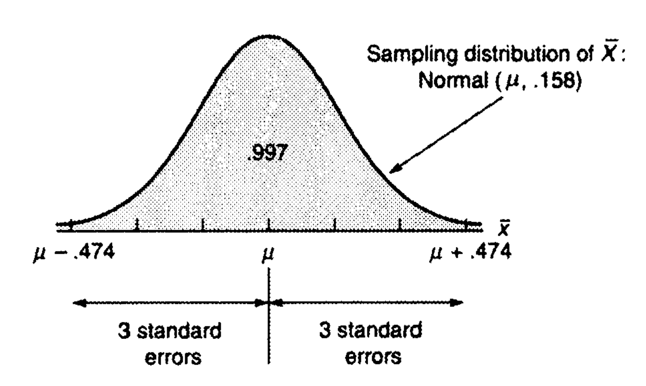
(٦-٤) الأستنتاج الأحصائي حول μ اعتمادا على $\overline{X}$: Statistical Inferences on μ Based on $\overline{X}$

بفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من المشاهدات من مجتمع (أو عملية) متوسطة μ غير معلوم. في هذا الفصل، نناقش إجراءات تحديد فترات الثقة وإختبارات الفروض المتعلقة بالقيمة المجهولة μ، وهذه الإجراءات تعتمد على $\overline{X}$ وهو أفضل إحصاء للاستدلال المتعلق بـ μ. نتذكر من الفصل(٥-٥-٥) أن هناك حالتين قد ظهرتا عند الحديث عن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$: (1)قيمة الإنحراف المعياري في المجتمع σ هي قيمة معلومة، وهي حالة نجد فيها أن الأحصاء: $Z=(\overline{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ يكون له توزيع طبيعي معياري. (2) قيمه σ غير معلومة، وهي حالة تؤدي إلى توزيع T للأحصاء T حيث : $T=(\overline{X}-\mu)/(S/\sqrt{n})$ وكما هو متوقع، فإن الأحصاءات T,Z هما في غاية الأهمية خلال مناقشة هذا الفصل. في التطبيقات الأحصائية الفعلية، نادراً ما نعرف قيمة σ ، لذلك فإنه في واقع الأمر سنجد أنفسنا مهتمين بالحالة الثانية في جميع الحالات. ولكن قبل أن نتطرق لهذه الحالة، يكون من المفيد مناقشة الحالة الأولى والتي فيها σ معلومة، بعدها نركز على الحالة الثانية.

(٦-٤-١) فترات الثقة لـ μ عندما تكون σ معلومه: Confidence Intervals for μ when σ is Known

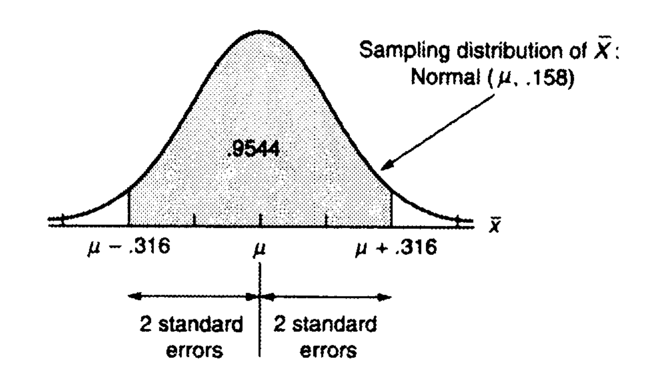
لكي نرى كيف تنشأ فترة الثقة، دعنا نستمر مع مثال عملية التعبئة، ذلك الذي قدم في الفصل (٥-٣). ينتج عن عملية التعبئة صناديق منظفات صناعية أوزانها تتبع توزيع طبيعي بإنحراف معياري معلوم $\sigma = .5$ أوقية. أننا نرغب في تحديد فترة ثقة 95% لـ μ اعتماداً على أوزان عينه عشوائية من 10 صناديق.

توزيع المعاينة هو البداية في تحديد فترة الثقة. نعلم من الفصل الخامس أن توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ هو الطبيعي طالما أن توزيع العملية الأنتاجية هو التوزيع الطبيعي. الخطأ المعياري لـ $\bar{X}$ هو: $SE(\bar{X}) = .5/\sqrt{10} = .158$. وهكذا نجد أن توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي بمتوسط μ غير معلوم وخطأ معياري= 0.158. الآن، إعتماداً علي توزيع المعاينة هذا، إلى أي مدى يمكن أن تنحرف $\bar{X}$ عن μ كنتيجة للخطأ المعياري ؟ حيث أن توزيع المعاينة لـ $\bar{X}$ هو الطبيعي، فإن قيمة $\bar{X}$ يجب أن تقع داخل ثلاث أخطاء معيارية بعداً عن المتوسط μ في 100% تقريبا (في عدد كبير) من العينات العشوائية، لذلك فنحن تقريبا نكون متأكدين بأن قيمة $\bar{X}$ لعينة معينة سوف تقع داخل 0.474 أوقيه بعداً عن μ (حيث 0.474=.158x3) وهذه النتيجة موضحة في شكل (٦-١)



شكل (٦-١): إحتمال وقوع $\bar{X}$ داخل ثلاث وحدات خطأ معياري بعداً عن المتوسط

بالمثل يمكن تحديد إحتمال أن متوسط العينة يأخذ قيما داخل2 وحدة خطأ معياري بعداً عن μ(داخل 0.316 أوقية) ليكون 0.9544 هذه الحاله موضحه في شكل (٦-٢).



شكل (٦-٢) : إحتمال وقوع $\bar{X}$ داخل وحدتين خطأ معياري بعدا عن المتوسط

نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية ووجدنا أن $\bar{X} = 50.025$ ، ماالذي يمكن أن نستنتجه حول قيمة μ؟ لقد بينا من قبل أنه في 95.44% من جميع العينات العشوائية، أن قيمة $\bar{X}$ لن تبتعد عن μ بأكثر من

0.316 أوقية، لذا فمن المقبول القول بأننا نثق بدرجة 95.44% أن القيمة المشاهدة $\overline{X}$ =50.025 تقع داخل 0.316 وحدة من μ (إما أعلى أو أدنى) . اذا كانت هذه النتيجة صحيحة، فإن متوسط المجتمع μ يقع بين (50.025-.316)49.709 و (50.025+.316)50.341 . يلاحظ أن مستوي ثقتنا في أن μ تقع بين 50.341,49.709 قد املى علينا من خلال ثقتنا في الإجراءات التي استخدمناها، فنحن نعرف أن الفترات المشتقه بهذا الإجراء تشمل قيمة μ في 95.44% من جميع العينات العشوائية. الفترات 0.316±50.025 =(49.709 إلى 50.341) تسمى فترة ثقة **Confidence interval** 95.44% أما 95.44% فتسمى مستوى الثقة، **Level of Confidence**. هذه الفترة تبين أن الخطأ المحتمل في التقدير بنقطة ($\overline{X}$ =50,025) هو زائد أو ناقص 0.316 أوقية، ويطلق على الخطأ المحتمل في التقدير بنقطة اسم: هامش خطأ المعاينة **Margin of Sampling Error** مقترناً بمستوى ثقة معلوم. وحدود مستوى الثقة: 50.341, 49.709 تسمى بالحد الأدنى والأعلى للثقة على التوالي **Lower and upper Confidence limits**.

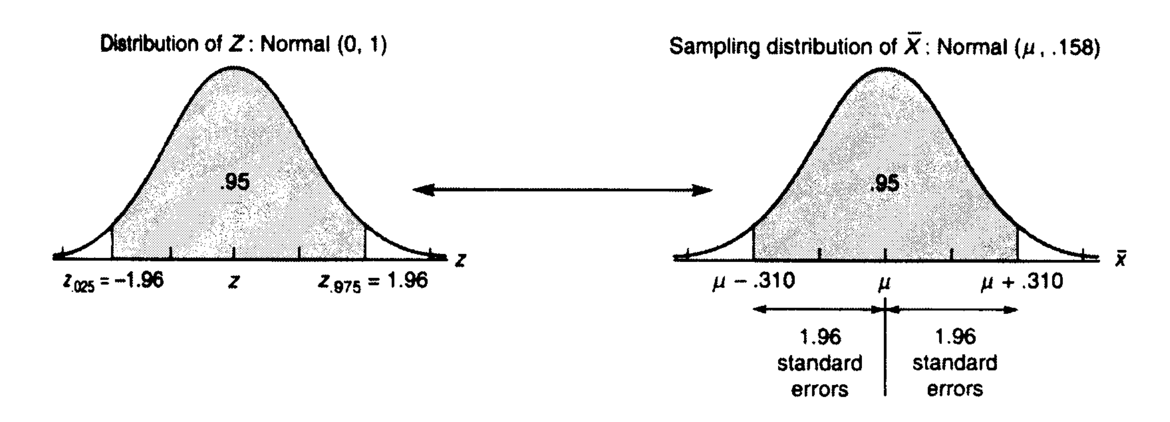
قبل أن نستمر في الحديث، دعنا نلقي نظرة على العناصر المكونه للفترة 50.025 ±0.316 . بالطبع 50.025 هي قيمة متوسط العينة $\overline{X}$، هامش الخطأ 316. ، يمثل وحدتين خطأ معياري لـ $\overline{X}$ حيث $SE(\overline{X}) = .5/\sqrt{10} = .158$. نحن نتحرك 316. وحدة (هامش خطأ المعاينة) إلى أعلى وإلى أسفل من قيمة $\overline{X}$ وذلك لتحديد حدود الثقة وهكذا تكون فترة الثقة 95.44% : 50.025 ±316. . قد تحددت من الصيغة : $\overline{X} \pm 2\ SE(\overline{X})$.

في هذا المثال، نختار أولا الفترة التي لها هامش خطأ المعاينة 316,. (٢ خطأ معياري) ثم نوجد مستوى الثقة المناظرة (9544,)، وبصورة عملية أكثر شيوعاً، نحدد في البداية مستوى الثقة الممكن قبوله ثم نحسب هامش خطأ المعاينة المناظر. نفرض أنك قررت أن مستوى الثقة 95% كان مناسبا. دعنا الآن نبحث عن هامش خطأ المعاينة الدقيق والذي يؤدي بدوره إلى فترة الثقة. هنا تكون البداية الأساسية، حيث نحدد أقصى عدد للخطأ المعياري والذي به تنحرف قيمة $\overline{X}$ عن μ في 95% من جميع العينات العشوائية ذات الحجم n . دعنا نسمي هذا العدد من وحدات الخطأ المعياري بـ Z . حيث أن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإن 95% من جميع العينات بها قيم $\overline{X}$ تقع داخل Z خطأ معياري من μ، 5% لها قيم $\overline{X}$ ازيد من Z خطأ معياري بعدا عن μ: 2.5% تقع ادنى μ، 2.5% تقع اعلى من μ . طبقا لجدول B في الملحق، نجد ان: $Z_{.025}=-1.96$, $Z_{.975}= + 1.96$، وبالتالي فإن قيم متوسط العينة $\overline{X}$ تقع داخل 1.96 خطأ معياري بعدا عن μ وذلك في 95% من جميع العينات العشوائية ذات الحجم n. بناء فترة ثقة للمتوسط μ في مثال عملية التعبئة موضح في شكل (٦-٣).

حيث أن متوسط العينة هو 50.025، فإن فترة الثقة 95% تتكون من هذه القيمة زائد أو ناقص 1.96 من الأخطأ المعيارية أي:

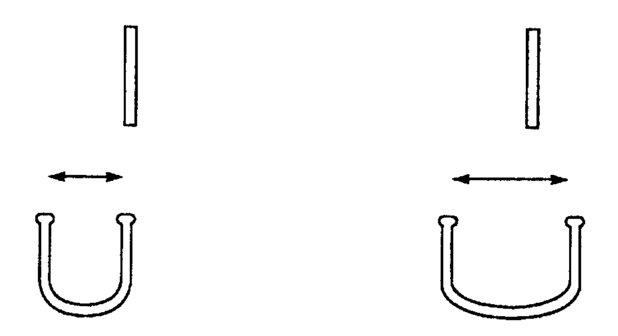
$$\overline{X} \pm 1.96(.158) = \overline{X} \pm .310 = 50.025 \pm .310 = (49.715 \text{ to } 50.335)$$

القيم الجزيئية 1.96 ± تناظر مستوى ثقة 95% وقد أخذت من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وهذه القيم تعرف بأسم القيم الحرجه **Critical Values**.



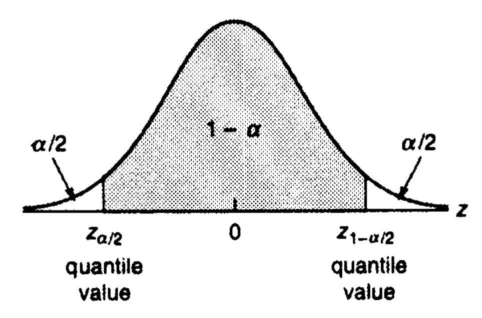
شكل (٦-٣) :بناء فترة الثقة 95% للمتوسط μ

نلاحظ ان فترة الثقة 95% (49,715 إلى 50.335) هي أضيق قليلا من فترة الثقة 95.44% (49.709 to 50.344). هل هذا يولد شعورا معينا لديك ؟ التفسير المنطقي هو أنه في الفترة الأضيق، تتواجد مساحة أقل تحتوي على توزيع المعاينة $\bar{X}$ وبالتأكيد تقل الفترة التي تحيط بقيمة متوسط المجتمع μ. وعلى ذلك نجد انه بزيادة مستوى الثقة، يتطلب الامر مساحة اكبر لتوزيع المعاينة ومن ثم إتساع فترة الثقة والعكس صحيح. وفي عملية تشبية نجدها في حدوة الحصان، نلاحظ انه بأتساع حدوة الحصان، يكون هناك إمكانية اكبر لأن يتخطى العمود المستهدف (نقطة النهاية) وهذا ما يوضحه شكل (٦-٤).



شكل (٦-٤): تشبيه بين اتساع حدوة الحصان وفترة الثقة

الصيغة العامة لفترة الثقة للمتوسط μ عندما تكون σ معلومة، يمكن ايضاحها من الطريقةالتالية. بفرض أن مستوى الثقة المرغوب فيه هو %(∝ - 1)100 حيث α (α:الفا حرف يوناني) تمثل نسبة العينات التي قيم متوسطاتها تقع خارج Z خطأ معياري بعدا عن μ. فمثلا عند فترة الثقة 95%فإن α=0.05 وعند فترة الثقة 99% فإن α=0.01 وهكذا. لأنشاء فترة الثقة، دع (∝ - 1) تمثل مساحة توزيع المعاينة لـ$\bar{X}$، حيث تتركز هذه المساحة حول μ . النقط التي تحدد الحدود العليا والدنيا لهذه المساحة المركزية والتي يعبر عنها بقيم Z تسمى بالقيم الجزئية، وهذه القيم الجزئية توضح أقصى عدد من الأخطاء المعيارية يمكن ان تنحرف بها قيمة $\bar{X}$ عن μ بإحتمال (∝ - 1). المساحة المركزية (∝ - 1) وقيم Z المناظرة لها موضحة في شكل (٦-٥). من شكل (٦-٥) يمكن أن تستنتج أن α هي نسبة العينات التي متوسطها $\bar{X}$ يقع خارج القيم الجزئيةZ سواء اعلى أو ادنى، لذلك فإن مساحة كل طرف من طرفي توزيع المعاينة والتي تناظر قيم$\bar{X}$ التي تقع خارج تلك القيم الجزئية يجب ان يساوي $\frac{\alpha}{2}$.



شكل (٦-٥) :المساحة المركزية (1-α) والقيم الجزئية المناظرة لها.

الصيغة العامة لفترة الثقة % (1-α) 100 للمتوسط μ عندما تكون σ معلومة على الصورة التالية.

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} SE(\bar{X}) \quad (6.1)$$

or

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.2)$$

حيث هامش خطأ المعاينة هو:

$$\textbf{Margin of sampling error} = Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.3)$$

نلاحظ أن الهيكل العام للصيغ(6.1),(6.2) هو :

الهيكل العام لفترة الثقة لتوزيعات المعاينة المتماثلة

التقدير بنقطة ± قيمة جزئية × الخطأ المعياري للتقدير بنقطة	**(6.4)**
التقدير بنقطة ± هامش خطأ المعاينة	**(6.5)**

يلاحظ أن الصيغة العامة السابقة تعطي فترة الثقة متى كان التقدير بنقطة له توزيع متماثل، مثل التوزيع الطبيعي أو توزيع T. ويمكن أن نجد فائدة ذلك عندما نتناول بعض التطبيقات الجديدة في الفصول التالية. المصطلحات الاحصائية الأساسية المقترنة بفترات الثقة أمكن تلخيصها على النحو التالي.

المصطلحات الإحصائية المقترنة بفترات الثقة

١- **فترة الثقة Confidence Interval** : تتكون من فترة تقدير للمعلمه مصحوبه بمستوى من الثقة يبين أن تلك الفترة تحتوي على قيمة المعلمة.

٢-**حدود الثقة Confidence Limits** : هي الحدود العليا والدنيا لفترة الثقة.

٣- **مستوى الثقة Level of Confidence** : هو التكرار النسبي في المدى الطويل وبه تعطي العينات العشوائية فترة ثقة تحتوي علي قيمة المعلمه المطلوب تقديرها.

٤- **هامش خطأ المعاينة Margin of Sampling error** : ويصف الدقة في المقدر، وهو أقصى كمية من الخطأ يمكن ان تحدث في المقدر عند مستوى ثقة معين، وإتساع فترة الثقة يضاعف الهامش في خطأ المعاينة.

٥-**القيم الجزئية Quantile Values** : ويتم إختيارها من توزيع المعاينة لتحقيق مستوى الثقة المطلوب.

مثال (٦-١)

يهتم مدير الانتاج بقوة الضغط للقطع البلاستيكية التي يتم انتاجها، فقام بقياس قوة الضغط لعينة حديثة اختيرت عشوائيا حجمها 64 قطعة، فوجد ان متوسط قوة الضغط في العينة : $\overline{X}=665$ رطل. أوجد فترة الثقة 95% للمتوسط μ، (متوسط قوة الضغط الحالية في العملية الإنتاجية) مفترضا ان الإنحراف المعياري للعملية الإنتاجية معلوم وقدره $\sigma = 50$ رطل

الحـــل

نعلم أن 95% من جميع العينات العشوائية تعطي متوسطات تقع داخل 1.96 خطأ معياري بعيدا عن μ. الخطأ العشوائي هو : $SE(\overline{X}) = 50/\sqrt{64} = 6.25$، بالتالي فإن قيم $\overline{X}$ في 95% من جميع العينات العشوائية لن تبتعد عن μ بأكثر من $1.96 \times 6.25 = 12.25$ رطل. هذا هو هامش الخطأ في التقدير النقطي $\overline{X} = 665$ وهكذا، فإن فترةالثقة 95% تصبح على الصورة.

$$\overline{X} \pm 12.25 = 665 \pm 12.25 \ \ \text{Or } 652.75 \ \text{to} \ 677.25$$

والطريقة المباشرة للإجابة هي تطبيق الصيغة (6.1) وبالتالى فإن فترة الثقة 95% تكون.

$$\overline{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\, SE(\overline{X}) = 665 \pm 1.96\,(6.25) = 665 \pm 12.25$$

التفسير الحقيقي لفترات الثقة :

من المهم أن نتفهم التفسير الحقيقي لفترات الثقة. تتذكر أن فترة 95% لمتوسط عملية التعبئة كان علي الصورة:

$$\overline{X} \pm 0.310 = 50.025 \pm .310 = (49.715 \text{ to } 50.335)$$

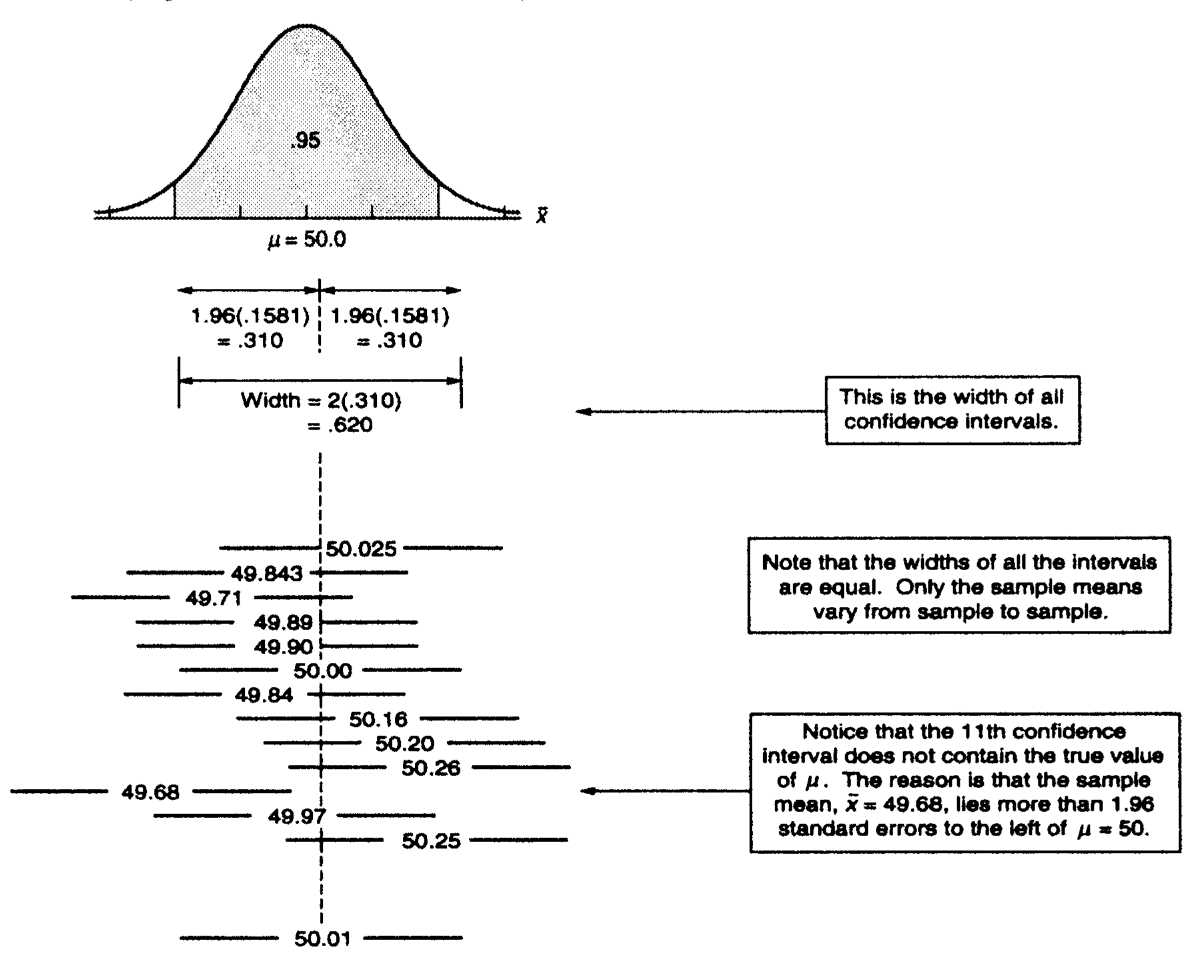
وحيث أن الاحصاء $\overline{X}$ هو متغير عشوائي، فإن الفترة: $\overline{X} - .310$ to $\overline{X} + .310$ تكون أيضا فترة عشوائية وأن إحتمال أن هذه الفترة تحتوي على قيمة μ هو 0.95. بمعنى أننا اذا كررنا سحب عينات عشوائية كل ذات الحجم 10 علب من عملية التعبئة، وكل عينة يتم سحبها يحسب لها فترة ثقة ($\overline{X}-.310$ to $\overline{X}+.310$)، فإنه في المدى الطويل نتوقع أن 95% من هذه الفترات ستحتوي على المتوسط المجهول μ. ويلاحظ أن المتغير العشوائي المقترن بفترة الثقة هو متوسط العينة $\overline{X}$ أما هامش الخطأ فيبقى ثابتا عند 0.310 من عينة إلي أخرى. قيم $\overline{X}$ هي فقط التي تتغير بين العينات. بداية التفسير الحقيقي لفترات الثقة هو أن تدرك أنه من الخطأ القول بأن إحتمال أن تقع μ في الفترة من 49.715 إلى 50.335 هو 95% لأن الاحتمال لا يمكن أن يلحق مباشرة مع الجملة $50.335 > \mu > 49.715$، لأن μ ليست متغير عشوائي بل انها قيمة ثابتة لمتوسط المجتمع المجهول، فهى إما تقع داخل الفترة التي حددناها أو لا تقع.

ولتوضيح حقيقة أن فترات الثقة تختلف في جميع العينات المتكررة، دعنا نستمر مع الأربعين عينة التي تم محاكاتها من عملية التعبئة والموضحة في جدول (٥-١) في الفصل الخامس. في أول عينة كان المتوسط $\overline{X} = 50.025$ ونتيجتها فترة الثقة 95% وهي: 49.715 إلى 50.335 وقد وضحناها من قبل. في العينة الثانية، قيمة $\overline{X} = 49.8426$ وهي تؤدي إلي فترة ثقة 95% للمتوسط μ على الصورة: $49.8426 \pm .310$ = (49.533 إلى 50.135). ومن الواضح أن هذه الفترة تختلف عن الفترة في العينة الأولى. باستمرار هذه الطريقة، نحدد فترات الثقة 95% للمتوسط μ إعتمادا على كل واحدة في العينات الأربعين، وتلك الفترات موضحة في جدول (٦-١) وقد رسمت تلك الفترات بيانيا في شكل (٦-٦)، حيث الخطوط الأفقية توضح إنتشار أو إتساع كل فترة.

جدول (٦-١): فترات الثقة 95% لأربعين عينة

Sample Number	95% CI	Sample Number	95% CI	Sample Number	95% CI	Sample Number	95% CI
1	(49.715,50.335)	11	(49.374,49.994)	21	(49.769,50.389)	31	(49.702,50.322)
2	(49.533,50.153)	12	(49.657,50.277)	22	(49.431,50.051)	32	(49.626,50.246)
3	(49.397,50.017)	13	(49.937,50.557)	23	(49.713,50.333)	33	(49.447,50.067)
4	(49.576,50.196)	14	(49.636,50.256)	24	(49.655,50.275)	34	(49.778,50.398)
5	(49.585,50.205)	15	(49.907,50.527)	25	(49.455,50.075)	35	(49.784,50.404)
6	(49.690,50.310)	16	(49.596,50.216)	26	(49.815,50.435)	36	(49.625,50.245)
7	(49.533,50.153)	17	(49.845,50.465)	27	(49.603,50.223)	37	(49.699,50.319)
8	(49.852,50.472)	18	(49.721,50.341)	28	(49.763,50.383)	38	(49.391,50.011)
9	(49.894,50.514)	19	(49.686,50.306)	29	(49.763,50.383)	39	(49.845,50.465)
10	(49.955,50.575)	20	(49.493,50.113)	30	(49.597,50.217)	40	(49.703,50.323)

من جدول (٦-١) وشكل (٦-٦) يلاحظ أن هناك فترة واحدة (للعينة الحادية عشر) لا تحتوي المتوسط μ=50 ، لذلك فإن 97.5%(39 من 40 عينة) من الفترات- أكثر من 95%- تحتوي قيمةμ=50. تذكر أن الـ95% هي النسبة النظرية للعينات العشوائية ذات الحجم n=10 والتي يجب أن تحتوي μ في المدى لطويل ،أما معدل الحدوث 97.5% والذي تحقق هنا فهو يختلف عن النسبة النظرية 95%بسبب العدد الصغير نسبيا للعينات (40 عينة) التي تم محاكاتها.



شكل(٦-٦): توضيح اختلافات المعاينة لفترات الثقة للمؤشر μ

مثال (٦-٢)

صاحب مصنع للألياف الصناعية يرغب في تقدير متوسط قوة الأنكسار للألياف. صممت تجربة لقياس قوة الآنكسار بالرطل لعدد 16 جديله إختيرت عشوائيا من العملية الأنتاجية، وكانت النتائج كـــالأتي: 20.7,20.3,19.6,19.7,20.6,20.4,21.1,20.9,19.6,19.8,20.2,19.9,20.9,21.0,20.6,20.8. بافتراض أن قوة الانكسار للألياف ذات نموذج يلائمها التوزيع الطبيعي له0,45= σ رطل. حدد فترات الثقة 90%,95%,99%لمتوسط قوة الانكسار للألياف.

الحـل

باستخدام المشاهدات الـ16 في هذا المثال، نحسب قيمة متوسط العينة 20.38 = $\overline{X}$ وحيث أن, n=16 σ =0.45 فإن الخطأ المعياري لـ$\overline{X}$: $SE(\overline{X}) = .45/\sqrt{16} = .1125$. عند فترة الثقة 90% تكون α=0.1 وهنا نركز 0.9 من المساحة الكلية حول المتوسط μ ونترك 05. من المساحة على كل جانب من توزيع المعاينة، وكنتيجة لذلك فإن القيمة الجزئية من جدول B بالملحق تكون : $Z_{.95}$=1.645 . وبالتالي فإن فترة الثقة 90% للمتوسط μ تكون :

$$20.38 \pm 1.645 \text{ x } \frac{.45}{\sqrt{16}} = 20.38 \pm .1851 = 20.195 \text{ to } 20.565.$$

لاحظ أن إتساع أو مدى هذه الفترة 20.565-20.195=0.37 هو ضعف هامش خطأ المعاينة (0.1851)، بأستثناء عمليات التقريب وتلك حقيقة لجميع فترات الثقة التي تؤثث على توزيعات معاينة متماثلة. فترات الثقة الأخرى المطلوبه ثم تحديدها باتباع نفس المنهج السابق والنتائج ثم تلخيصها في جدول (٦-٢). مرة أخرى لاحظ أنه بزيادة مستوى الثقة يزداد إتساع عرض هذه الفترات.

جدول (٦-٢) : فترات الثقة لمثال (٦-٢)

Confidence Level	$Z_{1-\alpha/2}$	SE ($\overline{X}$)	Mrgin of Smpling Error	Lower Limit	Upper Limit
90%	1.645	.1125	.1851	20.195	20.565
95%	1.96	.1125	.2205	20.160	20.600
99%	2.575	.1125	.2897	20.090	20.670

مثال (٦-٣)

منظمة لحماية المستهلك ترغب في تقدير متوسط حياة أحد أنواع الأطارات شائعة الاستخدام بدلالة المسافة المقطوعة وذلك عند درجة ثقة 94%. بفرض أن المسافة المقطوعة لهذا النوع من الأطارات يلائمها التوزيع الطبيعي بإنحراف معياري4000 = σ ميل، حدد هامش خطأ المعاينة لعينات عشوائية أحجمها n = 25 , n = 64من الاطارات.

الحـل

عند درجة الثقة 94% تكون α = 6% ، وبالتالي نركز 0.94 من المساحة حول μ ونترك 0.03 من المساحة في طرفي توزيع المعاينة. طبقا لذلك، القيم الجزئية من جدول B بالملحق نجدها: $Z_{.97}$= 1.88.

من الصيغة (6.3) وعند 4000,n=25= σ نجد أن هامش خطأ المعاينة: ميل $1.88\text{x } \frac{4000}{\sqrt{25}} = 1504$

وعند n=64، نجد أن هامش خطأ المعاينة: ميل 940= $1.88 \times \frac{4000}{\sqrt{64}}$

هل هذا يخلق لديك إحساساً بأنه عند مستوى ثقة معين، نجد أن زيادة حجم العينة يخفض هامش خطأ المعاينة ؟ اذا تأملت الصيغة (6.3) يمكن أن ترى أن ذلك صحيحاً، فكلما زادتn، تناقص الخطأ المعياري لـ $\bar{X}$ وأن الدقة في تقدير μ تتحسن.

(٦-٤-٢) إختيار حجم العينة المناسب: Choosing an Adequate Sample Size

أحد الرؤى الأساسية عند التخطيط لدراسة إحصائية هو التحكم في خطأ المعاينة، ويمكن تحقيق هامش خطأ معاينة مرغوب فيه باختيار حجم العينة المناسب. وللتوضيح، نعود للمثال(٦-٣) والذي ناقشنا فيه فترة الثقة94% لمتوسط حياة أحد الأطارات، وقد حددنا هامش خطأ المعاينة وكان 940ميل عند حجم العينة n=64 إطار. نفرض أن الإدارة رأت أن المستوى 94% هو الأختيار الصحيح لمستوى الثقة، لكنها رغبت في هامش خطأ معاينه 650ميل عند ثقة94% ، 4000= σ وأي حجم عينه n . الصيغة (6.3)توضح أن هامش خطأ المعاينة يكون: $1.88 \times 4000/\sqrt{n}$ ، أي أن هامش خطأ المعاينة يعتمد على n. حيث أن هامش خطأ المعاينة المرغوب فيه هو 650، فإننا نساوي الصيغة السابقة بالرقم650 ومع خطوات جبرية بسيطة يمكن أن نصل إلى حجم العينة المطلوب:

$$1.88\frac{4000}{\sqrt{n}} = 650$$

$$1.88(4000) = 650\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} = \frac{(1.88)\ (4000)}{650}$$

$$n = \left[\frac{(1.88)\ (4000)}{650}\right]^2 = 133.8$$

$$n \cong 134$$

وهكذا، فإن حجم العينة 134إطار يكون مطلوبا ليعطي هامش خطأ معاينة قدره 650ميل بدرجة ثقه 94%. وكما ترى فإن تحديد حجم العينة المطلوب لكي يحقق هامش خطأ معاينة محدد، هو أمر سهل وبسيط، لكن المشكلة الأكثر صعوبة بالنسبة للأدارة هي تحديد ما اذا كان من المناسب أن تقبل مضاعفة حجم العينة من 64 إلى 134 بهدف تخفيض هامش خطأ المعاينة من 940إلي 650 ميل. هذه المشكلة لا يمكن حلها بالإحصاء، بل أن ذلك يعتمد على تقدير التكاليف وعلى صعوبة المحافظة في التحكم الدقيق على هامش خطأ المعاينة، وبالتالي فإن زيادة الأخطاء التي ترجع إلى مصادر أخرى (نوقشت في الفصل ١-٣) لا يمكن أن تعادل العائد من خفض هامش خطأ المعاينة.

الخطوات السابقة يمكن تعميمها بسهولة لتقديم صيغة حجم العينة n الذي يناظر هامش خطأ معاينة مرغوب فيه، أو بمعنى مكافئ، يناظر فترة ثقة للمتوسط μ ذات إتساع أو مدى معين. لتحقيق فترة ثقة% $100(1-\alpha)$ للمتوسط μ عند إتساع أو مدى معين قدره 2E، حيث E يمثل هامش خطأ المعاينة المرغوب فيه، فإننا نحدد حجم العينة بأستخدام الصيغة التالية:

$$n = \left(\frac{Z_{1-\alpha 12}\sigma}{E}\right)^2 \qquad \textbf{(6.6)}$$

حيث $Z_{1-\alpha/2}$ هي القيمة الجزئية للتوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (٦-٤)

في عملية تخطيط تجارية لمشاهدة برامج التليفزيون TV، رغبت إدارة التسويق في تقدير فترة لتوسط اعمار المشاهدين لبرنامج معين في TV، وتحديداً فترة الثقة 92%كانت مرغوبه بأتساع لا يزيد عن 4 سنوات. باحث التسويق عليه تحديد عدد المشاهدين اللذين تشملهم العينة بهدف تحقيق فترة ثقة بهذا الأتساع. تأثيثا على معلومات تاريخية، يعتقد أن عمر المشاهدين لهذا النوع من البرامج التليفزيونية يلائمه التوزيع الطبيعي بإنحراف معياري 8= σ سنوات. بفرض أن هذا الأعتقاد صحيحاً، ما هو حجم العينة المطلوب ؟

الحل

اذا كان إتساع فترة الثقة 4 سنوات، فإن هامش خطأ المعاينة E=2 سنه. عند فترة الثقة 92% تكون α=0.08 وبالتالي تصبح القيمة الجزئية هي : $Z_{.96}=1.75$ومن (6.6) نجد أن حجم العينة المطلوب هو:

$$n=\left[\frac{1.75\ (8)}{2}\right]^2=49 \qquad \text{(مشاهد)}$$

(٦-٤-٣) فترة الثقة لـ μ عندما تكون σ مجهولة: Confidence Intervals for μ when σ is Unknown

في معظم التطبيقات الأحصائية، عمليا تكون قيمة σ مجهولة، وطبقا لذلك فإننا نركز بالكامل على هذه الحاله في الجزء المتبقي من الفصل (٦-٤). لنفرض أننا مهتمين بتقدير فترة ثقة للمتوسط μ تأثيثا على عينة عشوائية n من المشاهدات من مجتمع توزيعه قريباً من التوزيع الطبيعي ولكن بانحراف معياري σ غير معلوم . من المناقشة التي تمت في الفصل(٥-٥-٤) والملخص الموضح في الفصل (٥-٥-٥) نعلم أن توزيع المعاينة للأحصاء:

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

هو توزيع T بدرجات حرية (n-1). طريقة تحديد فترة الثقة لـ μ عندما تكون σ مجهولة هي صورة مطابقة للطريقة المتبعه عندما تكون σ معلومة، وذلك باحلال قيم T محل قيم Z والخطأ المعياري لـ$\bar{X}$ والمقدر بـ$S/\sqrt{n}$بدلا من $\sigma/\sqrt{n}$. بصفة عامة فترة الثقة % 100(1-α) للمتوسط μ عندما تكون σ مجهولة هي:

$$\bar{X}\pm t_{1-\alpha/2,\ \text{n-1}}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(6.7)}$$

حيث هامش خطأ المعاينة:

$$\textbf{Margin of Sampling Error} = t_{1-\alpha/2,\ \text{n-1}}\frac{S}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(6.8)}$$

وأن : $\pm t_{1-\alpha/2,\ \text{n-1}}$ هي القيم الجزئية المناظرة لتوزيع T بدرجات حرية (n-1).

عند تطبيق الخطوات الأستنتاجية المتضمنه توزيع T في حالات عملية، يكون من المهم أن نتذكر من الفصل(٥-٥-٤) أن توزيع T حساس نسبيا بالنسبة للفرض الخاص بأن توزيع المجتمع هو الطبيعي، وحتى فيما يتعلق بالعينات صغيرة الحجم نسبياً (في بعض الأحيان من 10إلى 15)، تظل الخطوات متحققه وساريه المفعول. أخيراً فإن المعرفه الشخصية للباحث يمكن أن تلعب دوراً هاماً في هذا الشأن.

مثال (٦-٥)

بالإشارة إلى مثال (٦-٢) المتضمن متوسط قوة الإنكسار للألياف، افترض أن قيمة الإنحراف المعياري في المجتمع σ مجهولة. بمعلومية المشاهدات الـ16، حدد فترات الثقة 99%, 95%, 90% لقوة إنكسار الألياف ثم قارن ذلك مع ما هو موجود في جدول (6.2).

الحل

من المشاهدات الـ16، حصلنا على: $\overline{X}$=20.38 وحيث أن σ مجهولة، فإننا نقدرها بالإنحراف المعياري للعينة S بإستخدام المشاهدات الـ16. ويمكن حساب قيمة S بإستخدام أمر برنامج ميني تاب STDEV (أو بإستخدام الصيغ (2.5),(2.7) من الفصل الثاني) لنحصل على:

STDEV=.5231

وكنتيجة لذلك فإن تقدير الخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ يكون:

$SE(\overline{X})=.5231/\sqrt{16}=.1308$

عند فترة الثقة 90%، نركز على 9. من المساحة تاركين 05. من المساحة على كل جانب من توزيع T بدرجات حرية 15=1-16، وبالتالي فإن القيمة الجزئية المطلوبة من توزيع T تكون: $t_{.95,15}=1.753$، لذا فإن فترة الثقة 90% للمتوسط μ تكون:

$$20.38 \pm 1.753\frac{.5231}{\sqrt{16}} = 20.38 \pm .2292 = 20.151\ to\ 20.609$$

مرة أخرى يلاحظ أن اتساع أو مدى هذه الفترة (20.609-20.151=.458) هو ضعف هامش خطأ المعاينة(2292.)، بأستثناء التقريب. فترات الثقة الأخرى المطلوبه تحددت بأتباع نفس الإجراءات وتم تلخيصها في جدول (٦-٣).

جدول (٦-٣): فترات الثقة لمثال (٦-٥)

Confidence Level	$t_{1-\alpha/2,\, n-1}$	SE ($\overline{X}$)	Mrgin of Smpling Error	Lower Limit	Upper Limit
90%	1.753	.1308	.2292	20.151	20.609
95%	2.131	.1308	.2757	20.101	20.659
99%	2.947	.1308	.3855	19.995	20.765

المقارنة بين فترات الثقة المتناظرة كما في جدولي (٦-٢)، (٦-٣) تكشف أن الفترات التي تعتمد على توزيع T هي أكثر إتساعاً من فترات الثقة المناظره لها والتي تعتمد على التوزيع الطبيعي المعياريZ الذي يستخدم σ المعلومه، وهذه النتيجة ليست مفاجئه حيث أن إحلال المتغير العشوائيSمحل القيمة الثابتة σ يزيد من اختلاف T من عينة إلى أخرى مقارنه مع Z.

(٦-٤-٤) إختبارات الفروض الأحصائية حول μ بأستخدام فترات الثقة:
Testing Statistical Hypotheses on μ Using Confidence Intervals

نتذكر من الفصل (٦-٣) أنه يمكن استخدام فترات الثقة لأختبار الادعاء المتعلق بقيمة مجهولة عن أحد معالم المجتمع. فيما يتعلق بمتوسط المجتمع μ ، نفرض أنا نرغب في إختبار الفرض العدمي:

$H_o: \mu = \mu_o$

مقابل الفرض البديل من الطرفين:

$H_a: \mu \neq \mu_o$

حيث μ_o هي القيمة المدعى بها عن μ. للحكم على هذا الادعاء كما هو مبين بالفرض العدمي، تتبع الخطوات التالية:

١- إحسب فترة الثقة للمعلمه μ بأستخدام إما الأحصاء Z (اذا كانت σ معلومه) أو الأحصاء T (اذا كانت σ مجهولة).

٢-إذا كانت القيمة المدعى بها μ_o مغطاه أو محتواه في فترة الثقة، فإن μ_o تعتبر قيمة مقبوله لـ μومن ثم لا يوجد سبب حقيقي أو مقنع لرفض الفرض العدمي.

٣- إذا كانت القيمة المدعى بها μ_oغير مغطاه في فترة الثقة، فإن μ_o تعتبر قيمة غير مقبوله لـ μومن ثم يرفض الفرض العدمي ومن ثم يقبل الفرض البديل.

بصفة عامة، يمكن إعتبار فترة الثقة لـ μ على أنها مدى يمثل القيم المقبوله لما ندعيه عن μ عند مستوى ثقه محدد. بهذا المضمون فإن فترة الثقه تعد وضعا أكثر شموليه للاستدلال الأحصائي عن إختبارات الفروض حيث أنها تشمل كل القيم المدعى بها والتي يمكن إعتبارها مقبوله.

يلاحظ أن الاستخدام السابق لفترات الثقه في إختبارات الفروض كان في ظل أن الفرض البديل من طرفين، أما اذا كان الفرض البديل من طرف واحد، فإننا نستخدم منهج آخر يسمى قيمه P والذي سيناقش في البند التالي.

مثال (٦-٦)

شركة جيمس سيتي تملك عدة مواقف للسيارات في أنحاء مختلفة من المدينة. مع الأجر الحالي لساعة الأنتظار، كان الأجر مستقراً عند متوسط 5500دولار عن كل يوم من أيام الأسبوع. حديثا تم رفع السعر وذلك لتحديد ما اذا كان عائد المتوسط اليومي سوف يتغير أم لا. وكان مأمولا أن يزيد العائد ولكن النقص كان محتملا بسبب الخسارة المحتمله في عدد العملاء. بعد استقرار الطلب في ظل السعر المرتفع، أختيرت عينه من 25 يوما تبين منها أن متوسط العائد اليومي5375 دولار بأنحراف معياري 800دولار. عند درجة ثقة 95%، هل بيانات العينة توحي بأن هناك تغيراً قد حدث في متوسط العائد اليومي ؟

الحل

اذا لم يكن هناك تغيراً في متوسط العائد اليومي بعد زيادة السعر، فإن متوسط المجتمع μ يظل باقيا عند 5500دولار وهي قيمة μ قبل زيادة السعر. بالتالي نجد أن الفرض العدمي ينص على أن μ مازالت 5500 دولار بينما الفرض البديل ينص على أن المتوسط μقد تغير أي:

$H_o: \mu = 5500$

$H_a: \mu \neq 5500$

من العينة n=25 يوماً، نعلم أن $\overline{X} = 5375$ ، فإذا كان حقا لا يوجد تغير في قيمة μ ، فإن قيمة $\overline{X}$ هذه تكون أقل من 5500 دولار بسبب خطأ المعاينة فقط. حيث أن S= 800 فإن الخطأ المعياري لـ $\overline{X}$

يكون: $800/\sqrt{25}=160$. عند مستوى ثقة 95%، نجد أن القيم الجزئية = ±2.064 وهذا يقودنا إلى فترة الثقة التالية (باستخدام الصيغة (6.7)) :

$$5375 \pm 2.064 \frac{800}{\sqrt{25}} = 5375 \pm 330.24$$

$$= \$ \ (5044.76 \text{ to } 5705.24)$$

هذه الفترة تمثل المدى من القيم المقبولة التي يمكن أن ندعيها للمتوسط μ عند درجة ثقة 95% . وحيث أن القيمة المدعى بها وهي 5500$ تقع داخل هذه الفترة، فإنها تعد قيمة مقبولة لـ μ ، وهكذا فإن بيانات العينة تظهر تأييداً وتدعيماً للفرض العدمي، بأن متوسط العائد اليومي مازال عند 5500$.

بالتأكيد هنا كلمة تحذير يجب أن تقال في هذا المثال. على الرغم من أننا لم نكتشف تغيراً في متوسط العائد، إلا أننا نحتاج إلى معلومات إضافية من عينة أخرى قبل أن نستنتج بصورة نهائية أن التغير في السعر ليس له تأثيراً على متوسط العائد اليومي. والسبب المنطقي في ذلك أن الفترة (5044.76 to 5705.24) تشمل القيم المقبوله لـ μ والتي أقل من 5500$. بفرض أننا في هذا المثال حددنا الفرض العدمي بصورة أخرى وليكن $H_o:\mu=5100$ فإننا نصل إلى نفس النتيجة تماما مثل الادعاء بأن $\mu=5500\$$، على الرغم من أن الادعاء $\mu=5100$ يمثل نقصاً 400$ عن العائد المتوسط قبل زيادة السعر.

مثال (٦-٧)

متوسط الزمن المطلوب لتجميع مكونات وحدة ما في عملية تصنيع معينة هو 10 دقائق. احدث عينة دورية من 20 وحدة أختيرت عشوائياً كشفت عن أزمنه التجميع التالية: 10.4, 9.8, 11.2, 9.9, 9.6, 10.6, 10.3, 10.2, 9.6, 9.8, 10.4, 9.9, 9.7, 9.6, 10.6, 9.7, 10.5, 10.1, 10.5, 9.8 مفترضاً أن توزيع أزمنة التجميع في المجتمع يقترب من التوزيع الطبيعي، هل بيانات العينة الحالية وعند درجة ثقة 95% توحي بأن هناك تغيراً في متوسط زمن التجميع؟

الحل

إذا لم يكن هناك تغيراً في متوسط زمن التجميع، فإن متوسط زمن التجميع يظل 10 دقائق وبالتالي يصبح الفرض العدمي والفرض البديل على الصورة:

$$H_o:\mu=10$$

$$H_a:\mu\neq 10$$

لاحظ أن الفرض البديل هنا من طرفين لأنه لا يوجد إتجاه للأبتعاد عن قيمة الفرض العدمي $\mu=10$ قد أشير إليه لكى نهتم به. من مشاهدات العينة العشرين، نجد أن $\overline{X}=10.11$ دقيقة، $S=.44$ دقيقة. وحيث أن الإنحراف المعياري في المجتمع σ غير معلوم فإننا نؤثث فترة الثقة على الإحصاء T. عند مستوى ثقة 95% ودرجات حرية 20-1=19 فإن القيم الجزئية تكون ±2.093 (بمعنى: $t_{.025,19}=-2.093$ and $t_{.975,19}=+2.093$)

فترة الثقة:

$$10.11 \pm 2.093 \frac{.44}{\sqrt{20}} = 10.11 \pm .21$$

$$= 9.90 \text{ to } 10.23 \quad \text{دقيقة}$$

وحيث أن هذه الفترة تحتوي على القيمة المدعى بها لـ μ في الفرض العدمي ، فإننا نقبل بنص H_o أي أنه لا يوجد تغيراً في متوسط زمن المجتمع.

(٦-٤-٥) إختبارات الفروض الإحصائية حول μ بإستخدام قيم P:
Testing Statistical Hypotheses on μ Using P - Values

صمم أسلوب القيمة P في إختبارات الفروض لقياس المدى الذي فيه بيانات العينة تؤيد أو تناقض الإدعاء المحدد في الفرض العدمي. عندما نستخدم فترات الثقة في إختبارات الفروض ، فإن النتيجة النهائية أن قيمة المعلمة المدعى بها بالفرض العدمي تقع إما داخل الفترة أو خارج الفترة ، وبالتالي فإن النتيجة هي إما نعم: البيانات تؤيد هذا الفرض العدمي أو لا: البيانات تناقض أو تنكر صحة الفرض العدمي. يؤخذ على هذا الأسلوب أنه لا يخبرنا أي شئ عن الدرجة التي عندها تكون بيانات العينة مدعمة أو مناقضة للفرض العدمي. للتوضيح ، الفرض العدمي في مثال عملية التعبئة في الفصل (٥-٣) هو H_o:μ=50. لنفرض أن فترة الثقة لعينة معينة كانت (49.25 to 49.95). ومع أن القيمة المدعى بها بالكاد تقع خارج الفترة ، فإن النتيجة ببساطة أن بيانات العينة تناقض بوضوح الفرض العدمي. نفس النتيجة نصل إليها أيضاً إذا كانت الفترة لعينة أخرى (48.6 to 49.3) ، وهي فترة نسبياً أقل من السابقة. الحرف P في "قيمة P" يشير إلى الإحتمال **Probability**. فكرة هذا الأسلوب تقوم على تحديد إحتمال الحصول على نتيجة ما من عينة كتلك التي سجلت ، مفترضين مؤقتاً أن إدعاء الفرض العدمي صحيحاً. صغر هذا الإحتمال يعني ضعف الفرض القائل بصحة الفرض العدمي. دعنا الآن نعرف القيمة P بشكل منهجي أكثر. مفترضين مؤقتاً أن إدعاء الفرض العدمي صحيحاً فإن قيمة P ، **P-value** هي إحتمال وجود قيمة إحصاء ما يكون أكثر تطرفاً (في إتجاه الفرض البديل) عن القيمة الفعلية المشاهدة في عينة عشوائية.

بفرض أننا نرغب في معرفة ما إذا كانت قطعة العملة متوازنة أم لا. في البداية نبدأ بالإدعاء بأن القطعة متوازنة (الفرض العدمي). ولتجميع معلومات ، نلقي بالقطعة 100مرة ، نفرض أننا لاحظنا 80 صورة و20 كتابة. هل هذه النتيجة تؤيد أم تناقض الإدعاء بأن القطعة متوازنة؟ إذا كانت القطعة حقيقية متوازنة ، فإننا كنا نتوقع تقسيماً متعادل بين الصور والكتابات. مدركين بوجود خطأ المعاينة ، فإننا بكل تأكيد يجب ألا نشك في الإدعاء إذا لاحظنا مثلاً 53 صورة ، 47 كتابة ، ولكن هذا لم يحدث. إحتمال مشاهدة 80 صورة أو أكثر في 100 رمية هو إحتمال ضئيل جداً وهو في الحقيقة أقل من 0001. وهذا الإحتمال هو القيمة Pفي هذا المثال. حيث أن قيمة P هنا صغيرة جداً ، فإن التجربة تعطى دليلا قويا على أن القطعة غير متوازنة. بصفة عامة ، كلما كانت قيمة P صغيرة كلما قل تصديق (أو قبول) الفرض العدمي وزاد تصديق الفرض البديل. بالتالي عندما تكون القيمةP صغيرة جداً يكون من المعقول إستنتاج أن إدعاء الفرض العدمي غير صحيح. والقاعدة العامة أنه اذا كانت قيمة P تساوي05. أوأقل فإن نتائج العينة تناقض الفرض العدمي وتدعم الفرض البديل.

قيم P عندما يكون الفرض البديل من طرف واحد: σ مجهولة

سنركز على توضيح كيفية تحديد قيمP بأستخدام توزيع T. لم يوضح ذلك الأمر عند استخدام التوزيع الطبيعي المعياري(أي عندما تكون σ معلومه) لأنه من النادر عمليا أن تكون σ معلومه. ومع ذلك فالخطوات أساساً واحدة كما هي موضحة في البند (٦-٥-٤) وهو الفصل المتعلق بالنسبة. وكما هو موضح في مناسبات عديدة ، فإنه يجب استخدام البرامج الأحصائية الجاهزة لتحديد قيم P كلما أمكن ذلك.

عند إستخدام توزيع T لتحديد قيمة P بدون حاسب آلى ، فإنه يجب تقريب قيمة P لأن جدول توزيع T (جدول C في الملحق) ليس دقيقاً بدرجة كافية ليعطي P بدقة تامة. سنوضح خطوات التقريب من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٦-٨)

اقترح نظام جديد لتجميع جرارات Bennett Lawn-Man، وكانت هناك نيه لاستخدام هذا النظام الجديد لو أنه أظهر سرعة في التجميع عن الطريقة الحالية والتي لها متوسط زمن تجميع 45 دقيقة. نفذ إختبار على عينة من 15 جرار تم تجميعها بالنظام المقترح ، فكان متوسط زمن التجميع 42.2 دقيقة بأنحراف معياري 12.2 دقيقة. انخفاض المتوسط بـ 2.8 دقيقة يمثل عملية تحسين مهمه، لكن المعروف أن التحسين الظاهر ربما يكون ببساطة نتيجة لخطأ المعاينة. إلى أي مدى تكون بيانات العينة مؤيدة لاستخدام النظام المقترح ؟

الحل

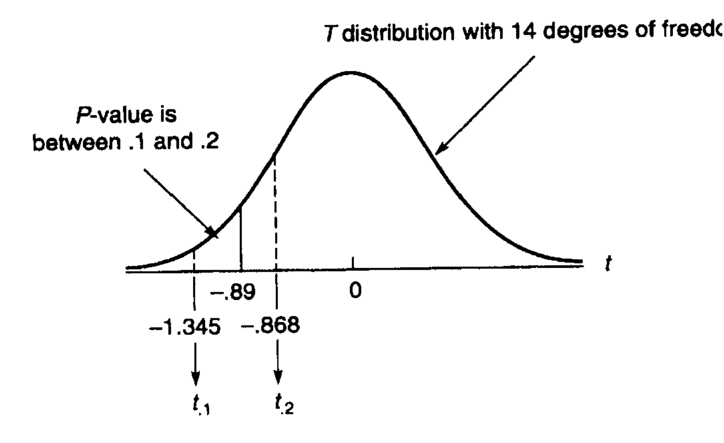
لا شك أن تنفيذ النظام الجديد يصاحبه تكلفة مرتفعه، لذا فالأسلوب المنطقي هو التأكد من أن بيانات العينة تظهر أن انخفاض متوسط زمن التجميع قد تحقق فعلا قبل تنفيذ النظام الجديد. وحيث أنه مطلوب دليل قوي عن تحقق هذا الأنخفاض ، فإننا نصيغ الفرض البديل على الصورة: متوسط زمن التجميع الجديد أقل من 45 دقيقة، أي : $H_a: \mu < 45$، أما الفرض العدمي فهو: لا يوجد تحسن، أي: $H_0: \mu=45$.

عند $n= 15$ ، $S=12.2$، يكون الخطأ المعياري المقدر: $SE(\overline{X})=12.2/\sqrt{15}=3.15$ وهكذا، اذا إفترضنا مؤقتا أن ادعاء الفرض العدمي صحيحاً، فإن القيمة P هي إحتمال أن يكون المتوسط $\overline{X}$ للعينة العشوائية أقل من 42.2 (حدد الاتجاه بواسطة الفرض البديل) أي:

$$\text{P}-\text{value} = P(\overline{X} < 42.2) = P\left(T < \frac{42.2-45}{3.15}\right) = P(T < -.89)$$

لاحظ إن توزيع T له 14=1-15 درجة حريه. القيمة P هي إحتمال أن قيمة T عند درجة حرية 14 هي أقل من 89.-. هذا الاحتمال لا يمكن أن نجده في جدول C، لأن هذا الجدول يعطي فقط قيم T المناظرة لأحتمالات محددة. لتحديد قيمة P التقريبية، نتفحص الصف- في جدولC -عند درجة الحرية 14 ونحدد القيمتين الجزئيتين اللتين تحصران بينهما قيمة T وهي 89.- فنجدهما :-1.345,-0.868 يلاحظ أن المساحة (الأحتمال) على يسار 868.- هي0.2 (لأن القيمة 868.- تقع أدنى العمود $t_{.200}$) بالمثل المساحة على يسار 1.345- هي0.1 وحيث أن القيمة P هي المساحة التي على يسار 89.- ، فإن قيمة P يجب إن تكون بين (0.1,0.2) . تحديد قيمة P موضح في شكل (٦-٧). لذا فبيانات هذا المثال ضعيفة، أي أنها لا تعطي سببا كافيا للتصديق بأن هناك انخفاضاً في متوسط زمن التجميع.

وكتوضيح آخر يشتمل على حساب قيمة P بأستخدام توزيع T انظر للمثال (٥-٧)في الفصل الخامس.



شكل (٦-٧): توضيح قيمة P لمثال (٦-٨)

إستخدام الحاسب الآلي:

تحديد قيمة P يتم بسهولة باستخدام برنامج Mintab. ولتحديد قيمة Pإعتماداً على توزيع T، نستخدم الأمر CDF، حيث نحدد قيمة T المحسوبة يتبعها الأمر الفرعيT مصحوباً بدرجات الحرية. قيمةP المشتقة عن طريق ميني تاب للمثال(٦-٨) هي 1943.وقد اشتقت كما يلي:

```
MTB > Cdf  -.89 ;
SUBC > t    14.
     -.8900    0.1943
```

قيم P عندما يكون الفرض البديل من طرفين:

علي الرغم من أن المبدأ واحد ولا يتغير، فإن تحديد قيمة P للفرض البديل من طرفين يتطلب بعض الأعتبارات الأضافية. عندما يكون الفرض البديل من طرفين، فإننا نركز على ابتعاد متوسط المجتمع في كلا الأتجاهين من المتوسط المدعى به من قبل الفرض العدمي. لذلك، فإن احتمال وجود قيمة $\overline{X}$ تكون أكثر تطرفاً عن القيمة الفعلية المشاهده لـ $\overline{X}$، في اتجاه الفرض البديل، يشتمل الآن على كلا الأتجاهين لتوزيع المعاينة. ومثلما يوضح المثال التالي، فإننا ببساطة نوجد قيمة P لأتجاه واحد لتوزيع المعاينة بعد ذلك نضاعفها، وهذا الإجراء صحيحاً طالما أن توزيع المعاينة للأحصاء متماثلا.

مثال (٦-٩)

شركة تأمين تدفع لوكلائها على أساس العمولة. تقوم سياسة الشركة على أفتراض أن متوسط العمولات المدفوعه سنويا هو 32000$، وإذا ما ظهر أن متوسط العمولات المدفوعه يختلف عن ذلك المبلغ المخطط، فإن تغيراً في سياسة الشركة يكون ضرورياً. في عينة من 36 وكيلا، كان متوسط العمولات المدفوعة في العام الماضي27500$ بإنحراف معياري8400$. اعتماداً على قيمة P، هل بيانات العينة تبين بوضوح أن المتوسط قد تغير ؟

الحل

الفرض العدمي هنا هو أن متوسط المجتمع =32000$, أي: $H_0: \mu = 32000$ والفرض البديل:

$H_a: \mu \neq 32000$

حيث إن ابتعاد μ عن32000 في كلا الأتجاهين سيكون هو موضوع الإهتمام.

بيانات العينة التي تتكون من n=36 مشاهدة تكشف عن : $\overline{X}$ =27,500 ،S =8400 وبالتالي يكون تقدير الخطأ المعياري لـ $\overline{X}$ هو SE($\overline{X}$)=8400/ $\sqrt{36}$=$1400 ، بتحويل قيمة $\overline{X}$ إلى قيمة T :

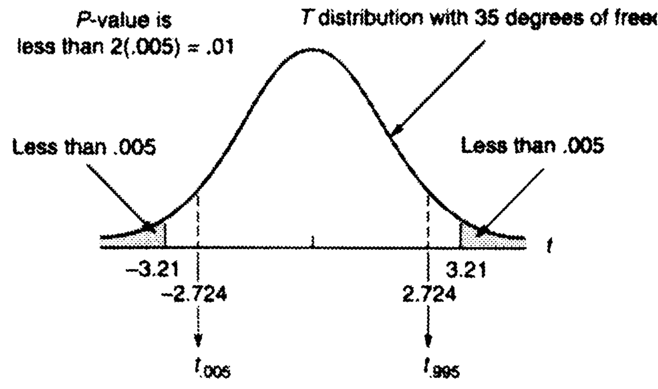
$$T = \frac{27500 - 32000}{1400} = -3.21$$

وحيث ان الفرض البديل من طرفين وتوزيع T توزيع متماثل، فإن :

$$P - value = 2P(T < -3.21)$$

حيث T لها درجات حرية 35=1-36. التقريب لقيمة P هذه موضح في شكل (٦-٨).

وكما وضحنا من قبل، يستخدم، جدول C لتقريب P .



شكل (٦-٨): تحديد قيمة P في إتجاهين بإستخدام توزيع T

وبفحص الصف المناظر لدرجة الحرية 35 وإيجاد القيمتين اللتين تحصران بينما3.21- = T، نجدهما 2.724- ,3.340-، نلاحظ أن المساحة على يسار 2.724- هي005. والمساحة على يسار3.340- هي 001. وهكذا، فإن إحتمال أن تكون T على يسار3.21- تقع بين:(005,.001.) وقيمة P المطلوبة تقع بين 01,.002. (ضعف المدى بين 001,.005.). وحيث ان قيمة P صغيرة بدرجة كافية (أقل من 01.)، فإن بينات العينة الحالية لا تدعم إدعاء الفرض العدمي بأن μ=32000 وبالتالي فإن تغيراً في خطة المدفوعات ربما يكون لها مبرر بناء على شواهد العينة.

استخدام الحاسب الألي:

عند استخدام برنامجMinitab لتحديد قيمةP عندما يكون الفرض البديل من طرفين، فإننا نتبع نفس الخطوات مثلما حدث عند تحديد قيمة P في الطرف الواحد، بمعنى، في البداية نحدد قيمةP لطرف واحد كما في مثال (٦-٨)، ثم نضاعفها. قيمة P الفعلية للمثال (٦-٩) هي 0028. اشتقاق قيمة P لفرض بديل من طرف واحد هي:

```
MTB > CDF -3.21;
SUBC >t 35.
     -3.2100     0.0014
```

(٦-٤-٦) إختبارات الفروض: تحليل بياني: Hypothesis Testing: A Graphical Analysis

في إختبارات الفروض، من الممكن ان نحصل على رؤية ذات قيمة عن معقولية الفرض العدمي وذلك بعرض بيانات العينة بيانيا. المنهج البياني يكمل الطريقةالأحصائية (أي فترات الثقة أو قيمة P)

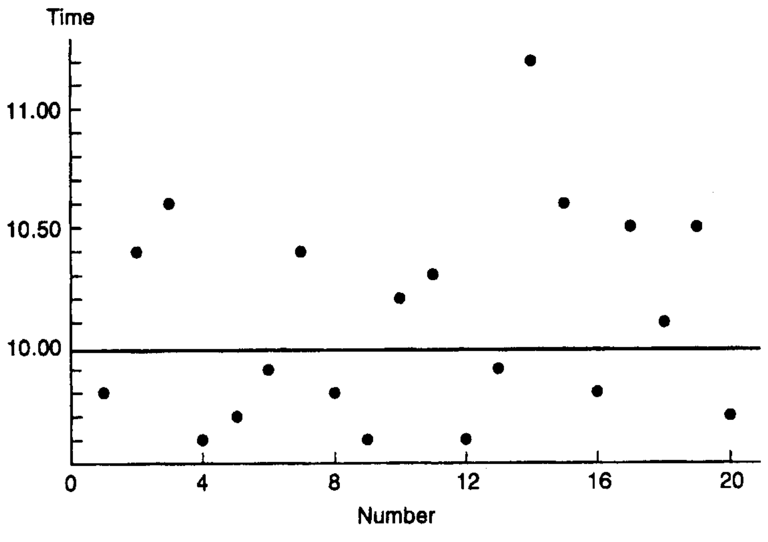
لأنه ليس فقط يعطي دليلا واضحا عن مدى تصديق إدعاد الفرض العدمي، ولكن يعطي فهما مرئيا للنتيجة الاحصائية. عند إختبار الفرض المتعلق بمتوسط المجتمع، نعرض التحليل البياني من خلال الامثلة التالية.

مثال (٦-١٠)

عودة إلى مثال (٦-٧)، اعرض بيانيا عينة أزمنه التجميع الـ20 . هل العرض البياني يوحي بأن هناك تغيرا في متوسط أزمنه التجميع الـ 10دقائق.

الحل

أزمنة التجميع الـ20 كانت على النحو التالي :,9.9, 9.7, 9.6, 10.6, 10.4, 9.8, 10.1, 10.4, 9.8, 10.6 11.2, 9.9, 9.6, 10.3, .10.2, 9.6, 9.8, 10.4, 9.7, 10.5 وبتمثيل هذه البيانات بيانيا، بتخصيص المحور الرأسي لأزمنة التجميع المشاهدة والمحور الأفقي للمشاهدات العشرين، كما هو موضح في شكل(٦-٩). من المهم أن ننوه إلى أن المحور الافقي لايدل على تسلسل زمني لأن المشاهدات العشرين يفترض انها سحبت في نفس الفترة الزمنية. والآن، ماذا يعني هذا الرسم في شكل(٦-٩) بالنسبة لادعاء الفرض العدمي ؟ يلاحظ أن الخط الأفقي يناظر ادعاء الفرض العدمي بأن $\mu=10$ وان أزمنة التجميع تقع حول قيمة μ وبالتالي فإن الرسم البياني لا يكشف عن اي تغير واضح في متوسط زمن التجميع وهذه النتيجة كنا قد توصلنا إليها من قبل في مثال (٦-٧) باستخدام فترات الثقة.



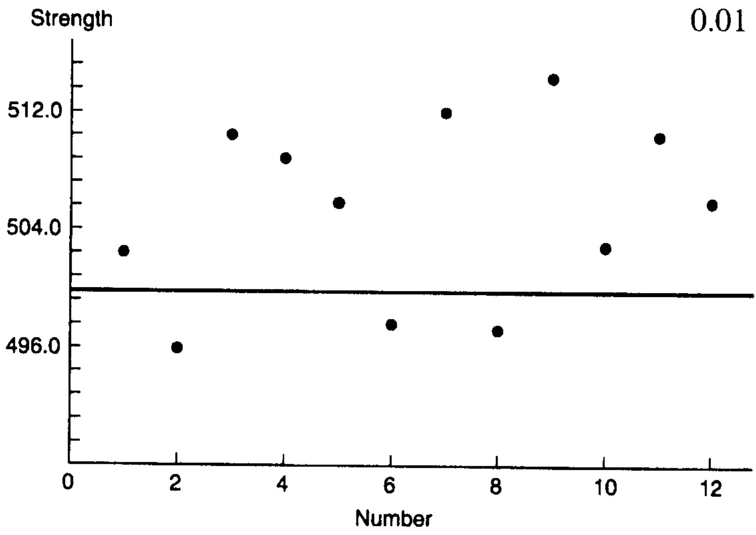
شكل (٦-٩) : توضيح أزمنة التجميع بيانيا لمثال (٦-١٠)

مثال (٦-١١)

مصنع ينتج قضبان السكك الحديدية، وكجزء من المجهودات التي تبذل في سبيل تحسين الجودة، قررت الإدارة تبني سياسة تصنيع جديدة لو انها استخدمت لأعطت قضبان حديدية افضل من القضبان الحالية من حيث متوسط قوة الضغط. المقياس الحالي لمتوسط قوة الضغط للقضبان هو500 رطل. في عينة من 12 قضيب انتجت وفق السياسة التصنيعية الجديدة أعطت قوي الضغط التالية: 506, 503, 510, 502, 496, 510, 508, 506, 498, 512, 497, 515 مفترضا أن توزيع قوى الضغط قريب من التوزيع الطبيعي. مثل هذه البيانات بيانيا. هل الشكل البياني يوحي بأن هناك تحسنا في متوسط قوة الضغط ؟

الحل

باتباع الخطوات التي وضحت من قبل في مثال(٦-١٠) نحصل على الشكل البياني في (٦-١٠) لبيانات العينة. الخط الأفقي يناظر الإدعاء بأن μ=500، من هذا الشكل يلاحظ أن معظم المشاهدات تقع أعلى القيمة التي يدعيها الفرض العدمي بأن μ=500 . لذلك فبيانات العينة تدل بوضوح على أن هناك تحسناً قد تحقق في متوسط قوة الضغط أي500 < μ في ظل السياسة التصنيعية الجديدة. ويمكنك أن تتحقق من ذلك بحساب قيمة P عند: $H_o: \mu = 500$ مقابل: $H_a: \mu > 500$ مستخدما الأحصاء T وستجدها أقل من 0.01



شكل (٦-١٠): توضيح قوي الضغط بيانيا لمثال (٦-١١)

استخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

نستخدم الآن الأمثلة(٦-١٠)، (٦-١١) لتوضيح كيفية استخدام برنامج Minitab في الاستدلال الأحصائي عن μ عندما تكون σ مجهولة. أوامر برنامج ميني تاب موضحه خطوة خطوة في الملحق 6. وكما وضحنا في الفصل الرابع، فهناك العديد من البرامج الأحصائية الجاهزة متاحة للاستخدام مع سهولة امكانية المقارنة بينهم. فيما يتعلق بالمثال (٦-١٠)، فإن مخرجات ميني تاب لأختبار $H_o: \mu = 10$ مقابل $H_a: \mu \neq 10$ موضحة فيما يلي. يلاحظ أن قيمه P (وهي P=.28) والتي تناظر T=1.12 ليست صغيرة بدرجة كافية لتعطي دليلا واضحا يناقض الفرض العدمي.

```
TEST of MU = 10.0000 VS MU N.E 10.0000.
              N      MEAN     STDEV     SE MEAN     T    P-VALUE
Time         20   10.1100   0.4400     0.0984    1.12       0.28
```

بالنسبة للمثال (٦-١١)، فإن مخرجات برنامج ميني تاب عند إختبار $H_o: \mu = 500$ مقابل $H_a: \mu > 500$ لكل من فترة الثقة 95% لـ μ أو قيمة P موضحة فيما يلي. هذه النتائج تدعم رغبتنا المبدئية إعتماداً على شكل (٦-١٠) بأن تحسنا في متوسط قوة الضغط قد تحقق. فمثلا قيمة P التي تناظر T=2.96 هي قيمة صغيرة جداً (.0065). وفترة الثقة 95% . وهي (501.34 to 509.16) لا تحتوي القيمة التي يدعيها الفرض العدمي.

```
TEST of MU = 500.000 VS  MU  G.T.  500.000
              N    MEAN     STDEV      SEMEAN      T     P VALUE
Strength     12  505.250    6.151      1.776     2.96    0.0065
```

```
              N     MEAN     STDEV      SEMEAN     95.0  PERCENT  C.I.
Strength     12    505.25    6.15        1.78     ( 501.34,  509.16)
```

مثال (٦-١٢)

بالرجوع إلى مثال(١-٥) وفيه ادارة مصنع الطباعة كانت مهتمه بكميات النفايات المتراكمة بعدما تحول المصنع إلى استخدام الحبر ذو الاساس المائي في عمليات الطباعة. نفرض أنه سحبت عينه أخرى من 20 دورة من دورات الطباعة بعد مرور اسبوع واحد من العينة الأولى والتي كان حجمها 23 في مثال (١-٥)، وسجلت النفايات (بالرطل لكل 1000 ياردة) وكانت نتائج العينة الجديدة كما يلي (مسلسله من اليسار إلى اليمين في صفوف).

26	19	30	29	23
21	32	24	27	29
30	25	32	31	34
36	39	35	42	40

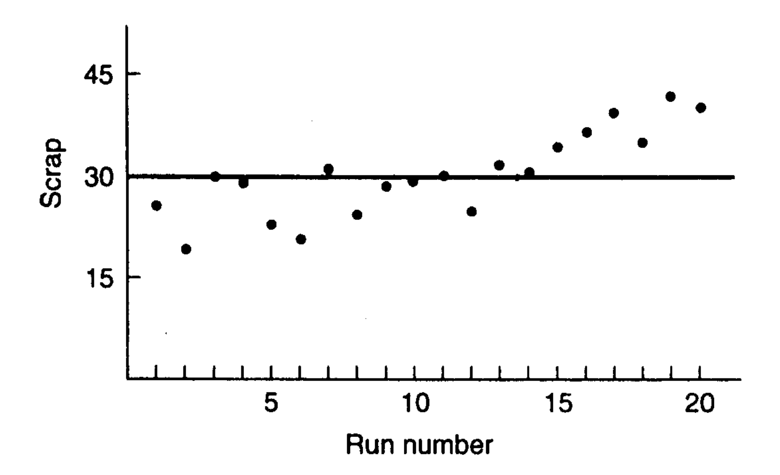
وقد حددت الادارة أن كمية النفايات الناتجة تعد مقبولة طالما أن متوسط العملية لكل دورة لا تزيد عن 30 رطل لكل 1000ياردة. هل بيانات العينة الجديدة توحي بأن مستوى النفايات مازال مقبولا ؟

الحل

التحليل المبدئي يغري الفرد بأن يستنتج أن تلك البيانات تتفق مع الفرض العدمي، أي مستوى النفايات هو 30 رطل. فيما يلي مخرجات برنامج ميني تاب لأختبار: $H_0 : \mu = 30$ مقابل $H_a : \mu > 30$.

```
TEST of  MU =30.00 VS MU G.T. 30.00
            N     MEAN     STDEV     SE MEAN    T       P-VALUE
Scrap      20    30.20     6.28       1.40      0.14    0.44
```

يلاحظ أن قيمة P=.44. ومن الواضح أن بيانات العينة لا تناقض الفرض العدمي وأنه لا توجد أية إشارة بأن متوسط العملية غير مقبول، ومع ذلك فالعرض البياني لبيانات العينة يعطي رؤية أكثر للبيانات الحالية. شكل (٦-١١) يمثل خريطة بيانية قد أضيف إليها خط أفقي يميز متوسط الكمية المقبوله للفضلات وهي $\mu = 30$ رطل، ويلاحظ أنه بداية من القيمة الثالثة عشر تقريباً أن هناك اتجاه تزايدي في كمية الفضلات التراكمية وهذا يوحي بقوة بأن عملية الطلاء قد أصبحت غير مستقرة وأن متوسط كمية الفضلات الآن تتعدى الحد المقبول. وكنتيجة لذلك فإن استخدام الاستدلال على حدة يعد مضللا، فالنتيجة الظاهرة أن متوسط العملية يبقي عند 30 رطل نتيجة غير صحيحة، لأن الدليل الواضح هو أن العملية أصبحت غير مستقرة. أول أجراء يجب اتخاذه هو التعرف على تلك الأسباب وإزالتها حتى تعود العملية مرة أخرى إلى الاستقرار (كما هو موضح في شكل (١-٧)) في الفصل(١-٥).



شكل (٦-١١) : خريطة التتبع البياني لمثال (٦-١٢)

تمارين:

(٦-١٣) افترض أن العينات العشوائية التالية سحبت من مجتمعات لها توزيعات طبيعية. في كل حاله، أوجد هامش خطأ المعاينة وفترة الثقة للمعلمه μ عند المستوى المشار إليه.

(a) n=12, $\overline{X}$ =122, σ =25, 90% Level of confidence.

(b) n=56, $\overline{X}$ =122, σ =25, 90% Level of confidence.

(c) n=12, $\overline{X}$ =122, σ =25, 95% Level of confidence.

(d) n=56, $\overline{X}$ =122, σ =25, 95% Level of confidence.

(٦-١٤) بالرجوع إلى تمرين (٦-١٣):

(أ) وضح كيف يؤثر زيادة حجم العينة مع ثبات مستوى الثقة على هامش خطأ المعاينة وعلى فترة الثقة.

(ب) وضح كيف يؤثر زيادة مستوى الثقة مع ثبات حجم العينة على هامش خطأ المعاينة وعلى فترة الثقة.

(٦-١٥) عينة عشوائية حجمها 44 وحدة ولها متوسط $\overline{X}$=16.8 . من المعلوم أن المجتمع له انحراف معياري σ =9.9 .

(أ) حدد فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى ثقة92%.

(ب) هل من الضروري معرفة توزيع المجتمع حتى يمكن لاجابتك في (أ) أن تتحقق ؟ وضح ذلك.

(جـ) ما هو حجم العينة اللازم لتحقيق هامش خطأ معاينة ±1.5 ؟

(٦-١٦) مصنع يقوم بأنتاج نوع معين من المعادن، وترغب الادارة في تقدير متوسط قوة انكسار المعدن. في يوم معين ، أختيرت عشوائيا 12 قطعة من هذا المعدن وتم وضع كل قطعة تحت ضغط حتى لوحظ كسراً بها. البيانات التالية تمثل قوة الانكسار لهذه القطع (بالكيلو جرام لكل

سنتيمتر مربع) : 428 ,419 ,458 ,439 ,463 ,441 ,445 ,438 ,429 ,456 ,441 ,463 مفترضاً أن قوة انكسار المعدن بلائمها توزيع طبيعي.

(أ) حدد فترة الثقة 98% لمتوسط قوة الانكسار للمعدن.

(ب) بفرض أنه لن يتم سحب عينات أخرى، تحت أي شروط تعتقد أن فترة الثقة في (أ) سوف تكون صالحة لمدة عام أخر من الآن ؟ وهل ترى أن هذه الشروط أو الظروف عملية؟ وضح ذلك.

(٦-١٧) بالرجوع إلى الجزء (أ) في التمرين (٦-١٦)، أي من العبارات التالية تعتبر صواباً بالنسبة لتفسير فترة الثقة.

(أ) إحتمال أن يكون متوسط قوة الأنكسار للمعدن بين حدى الثقة هو0.98..

(ب) 98% تقريبا من فترات الثقة التي حسبت نتيجة لتكرار عينات بالحجم 12 من عملية انتاج مستقرة تشمل متوسط قوة انكسار المعدن.

(جـ) إحتمال أن قوة إنكسار المعدن تكون خارج حدي الثقة هو 0.2.

(٦-١٨) سحبت عينة عشوائية حديثة من 15 أنبوبة زجاجية بغرض فحص قوة ضغط الزجاج كمقياس لدرجة هشاشة أو سرعة الانكسار. وفيما يلي مستويات الضغط المسجلة:,7.41 ,7.19 ,7.28 ,7.63 ,7.89 ,7.91 ,8.20 ,7.35 ,8.07 ,8.09 ,6.71 ,8.09 ,7.74 ,7.60 ,6.93 افترض أن مستوى الضغط يلائمه تقريبا توزيع طبيعي.

(أ) حدد التقدير بنقطة لمتوسط العملية الحالية المنتجة للأنابيب الزجاجية.

(ب) عند مستوى الثقة95%، حدد هامش خطأ المعاينة للتقدير بنقطة السابق.

(جـ) استخدم تقدير σ كما في الصيغة (6.6) لتحديد حجم العينة اللازم لتحقيق هامش خطأ معاينة ± 1.

(٦-١٩) تراقب إدارة فرجينيا للنقل البري أوزان شاحناتها على الطرق السريعة. في عينة حديثة من 25 شاحنه كشفت الاوزان التالية بالطن:

15.39 , 24.05 , 13.98 , 21.58 , 27.74 , 21.49 , 12.88 , 20.01

,21.99 , 18.86 , 24.48 , 19.93 , 22.22 , 19.10 , 25.93 , 17.43

,28.51 , 23.05 , 26.94 , 16.25 , 26.48 , 20.54 , 29.84 , 5.73 , 16.35

افترض أن الأوزان يلائمها تقريبا التوزيع الطبيعي.

(أ) حدد التقدير بنقطة لمتوسط وزن الشاحنه.

(ب) حدد فترة الثقة95% لمتوسط المجتمع μ.

(جـ) من (ب) حدد إلى أي مدى يكون حجم العينة اللازم لتحقيق هامش خطأ معاينة ± 1.5 طن ؟ (ملحوظة:استخدم تقدير σ في الصيغة (6.6)).

(د) بفرض أن الثقة في (ب) صالحة للاستخدام لمدة عام من الآن بدون سحب عينات أخرى.

ناقش الشروط الواجب أخذها في الأعتبار هذه الحاله.

(٦-٢٠) البيانات التالية تمثل زمن الصلاحية (بالساعات) لعينة عشوائية من نوع معين من المكونات الكهربائية:

142.82	97.04	32.46	69.14	85.67
114.43	41.76	163.07	108.22	63.28

مفترضا أن توزيع زمن الصلاحية يلائمه التوزيع الطبيعي.

(أ) حدد فترة الثقة 98% لمتوسط المجتمع μ.

(ب) في (أ)، حدد حجم العينة اللازم لتحقيق هامش خطأ معاينة 20 ساعة.

(ملحوظة : استخدم تقدير σ في الصيغة (6.6)).

(جـ) إستخدم نفس السؤال (ب) في تمرين (٦-١٦).

(٦-٢١) بالرجوع إلى تمرين (٦-١٦).

(أ) افترض أن متوسط قوة الانكسار لهذا المعدن هي 450 كيلوجرام. ارسم البيانات مثلما رسمت بيانات مثال(٦-١١) . هل الشكل البياني يوضح أن هناك تغيراً في متوسط قوة الانكسار ؟ هل هذا يتفق مع فترة الثقة في الجزء (أ) من التمرين (٦-١٦)؟

(ب) حدد القيمة P وناقش إلى أي مدى تناقض بيانات العينة ادعاء الفرض العدمي في الجزء (أ).

(٦-٢٢) بالرجوع إلى تمرين (٦-١٨).

(أ) افترض أن متوسط مستوى الضغط لهذه العملية هو7.7 . ارسم البيانات كما تم ذلك في مثال (٦-١١). هل الشكل البياني يظهر أن هناك تغيراً قد حدث في متوسط مستوى الضغط؟ وهل هذا يتفق مع فترة الثقة في (ب) من تمرين (٦-١٨)؟

(ب) اعتماداً على فترة الثقة، ما هي القيم المقبولة التي يمكن أن ندعيها لمتوسط مستوى الضغط ؟

(جـ) حدد القيمة P واجب عن نفس السؤال كما جاء في الجزء (ب) من التمرين (٦-٢١)

(٦-٢٣) افترض أن :

$$H_o : \mu = 100 \text{ and } H_a : \mu < 100$$

أعطت عينة عشوائية قيم الأحصاء التالية: $\overline{X} = 85$,S=50 . مفترضاً أن توزيع المجتمع هو الطبيعي.

(أ) اوجد القيمة P اذا كانت n= 5.

(ب) أوجد القيمة P اذا كانت n=20.

(جـ) أوجد القيمة P اذا كانت n=80.

(٦-٢٤) افترض أن :

$$H_o : \mu = 100 \text{ and } H_a : \mu > 100$$

وأن عينة عشوائية حجمها n=36 أعطت: $\overline{X}=115, S=38$

(أ) احسب القيمة P.

(ب) اعتماداً على القيمة P في (أ)، قيم أهمية بيانات العينة مقابل الفرض العدمي.

(جـ) هل من الضروري معرفة توزيع المجتمع لكي تكون إجابتك صالحة ؟ أشرح ذلك.

(٦-٢٥) في عينة عشوائية حديثة من 15 من ضحايا حوادث السيارات وقعت في مدينة نورث ايست، كشفت عن تكاليف العلاج الطبية التالية بالدولار:

582, 698, 1029, 732, 2436, 5932, 242, 307,
862, 186, 643, 597, 761, 508, 1135,

كل الضحايا كانوا يرتدون حزام أمان مقعد السيارة في الوقت الذي وقعت فيه الحادثة.

(أ) حدد فترة الثقة 98% لمتوسط تكلفة العلاج.

(ب) بفرض أن متوسط تكلفة العلاج هي 1000 دولار. ارسم تلك البيانات بيانيا. هل الشكل البياني يظهر تغيراً قد حدث في متوسط تكلفة العلاج لضحايا الحوادث. اشرح ذلك.

(جـ) حدد القيمة P وناقش إلى أي مدى تناقض بيانات العينة الادعاء بأن متوسط التكلفة هو 1000 دولار.

(٦-٢٦) أثناء حدوث أزمة نقص المياه في مدينة سوثيرن، قامت شركة المياه بسحب عينه عشوائية من مستهلكي المياه بالمدينة حجمها 20 مواطن وسجلت لهم كميات الاستهلاك اليوميه بالجالون في يوم معين.

180 220 235 195 265 245 175 196 248 212
238 252 208 214 228 236 240 218 223 246

(أ) حدد فترة الثقة95% لمتوسط الاستهلاك اليومي من المياه في هذه المدينة.

(ب) بفرض أن متوسط الاستهلاك اليومي قبل حدوث ازمة نقص المياه كان 250 جالون. اعرض البيانات بيانيا. هل الشكل البياني يظهر أن هناك نقصاً في متوسط الأستهلاك اليومي منذ حدوث أزمة نقص المياه؟ أشرح ذلك.

(٦-٢٧) شركة لتأجير شرائط الفيديو اقترحت سياسة جديدة بموجبها يسمح للأعضاء الجدد بتأجير عشرة أشرطة مجاناً في العام الأول من عضويتهم، وقد توقعت الشركة أن هذه السياسة سوف تكون مربحه اذا قام الأعضاء الجدد بتأجير 15 شريطا إضافيا في المتوسط في العام الأول. وقد خططت الشركة للاستمرار في هذه السياسة مالم يكن هناك ما يظهر أنها غير مربحه. لتقيم هذه السياسة بعد عام من تنفيذها، سحبت عينه عشوائية من 36 من الأعضاء الجدد وكان متوسط عدد الشرائط الأضافية المؤجرة في هذا العام 13.4 شريط بانحراف معياري 7.8شريط.

(أ) ضع الفرض العدمي والفرض البديل، وحدد ما اذا كانت العينة دليل يوضح أن المستوى المنشود بتأجير 15 شريط إضافي في المتوسط لا يتحقق عند مستوى الثقة 95%

(ب) حدد القيمة P. هل على الشركة أن تستمر في هذه السياسة ؟ أشرح ذلك.

(٦-٢٨) في دراسة عن الأجور التي يكسبها فني اصلاح سيارات في مدينة ما، أختير عشوائياً 18 فني اصلاح سيارات وتم عمل مقابلة معهم وكانت أجورهم في الساعة بالدولار كما يلي :

12.00	12.50	13.00	10.50	11.00	12.50	12.25	9.75	10.75
10.25	8.75	10.00	10.75	11.25	10.25	11.50	12.75	13.25

مفترضا أن توزيع الأجور يلائمه التوزيع الطبيعي.

(أ) عند مستوى ثقة 99%، حدد هامش خطأ المعاينة.

(ب)حدد فترة الثقة 99% لمتوسط الأجور لكل فني إصلاح السيارات في هذه المدينة.

(جـ) هل يمكنك إستخدام فترة التقدير هذه لمدة عام واحد من الآن؟ دعم إجابتك.

(٦-٢٩) بالرجوع إلى تمرين (٦-٢٨)، افترض أنه منذ ست شهور مضت، كان معلوماً متوسط أجر الساعة لفني إصلاح السيارات في هذه المدينة كان 11.75دولار.

(أ) إرسم البيانات بالطريقة التي وضحها مثال (٦-١١). هل الشكل البياني يوحي بأن هناك تغيراً في متوسط أجر الساعة؟ وهل هذا يتفق مع فترة الثقة في (ب) من تمرين (٦-٢٨)؟

(ب) حدد القيمة P وناقش إلى إي مدى تكون العينة الحالية دليلاً يناقض ما هو معلوم عن متوسط أجر الساعة منذ 6 شهور.

(٦-٣٠) رغبت الغرفة التجارية في تقدير متوسط كمية النقود التي ينفقها من يحضرون إجتماعات الغرفة في العاصمة. أختير عشوائياً 16شخصاً ممن حضروا إجتماعات متنوعة للغرفة في العاصمة وطلب منهم تسجيل إنفاقهم في يوم معين. فيما يلي انفاق كل منهم بالدولار:

105	175	163	148	142	189	135	168
158	184	134	146	155	163	174	152

مفترضاً أن الإنفاق موزع طبيعياً. حدد فترات الثقة: 90%, 95%, 99% لمتوسط الانفاق.

(٦-٣١) بالرجوع إلى التمرين (٦-٣٠). إفترض أن هناك إدعاء بأن متوسط الإنفاق هو 165 دولار لكل اليوم.

(أ) ارسم تلك البيانات بنفس الأسلوب الذي إستخدم في مثال (٦-١١). هل الشكل البياني يوحي لك أن هناك تغيراً في متوسط الانفاق اليومي؟ إشرح ذلك.

(ب) مستخدماً فترة الثقة 95%، هل الإدعاء السابق تؤيده العينة بوضوح؟ إشرح ذلك.

(جـ) إختبر الفرض العدمي بأن متوسط الإنفاق هو الحد الأدنى لفترة الثقة 95% مقابل الفرض البديل من طرفين. إحسب القيمة P. إشرح ما تحصل عليه من نتائج.

(د) كرر الجزء (جـ) مستخدماً الحد الأعلى لفترة الثقة 95%.

(٦-٣٢) مدير مركز كمبيوتر أراد معرفة تأثير بعض الإجراءات الجديدة على متوسط طول الزمن لتنفيذ وظيفة ما على جهاز الكمبيوتر. طول الزمن لوظيفة ما عبارة عن الزمن المنقضي من بداية الإدخال وحتى الأخراج. فيما يلي أطوال الأزمنة لعينة عشوائية من 25 وظيفة جرى

تنفيذها خلال أسبوع بعد تبني تلك الإجراءات الجديدة.

15	18	16	14	14	22	21	16	14	8	18	14	8
14	10	8	7	8	10	5	11	6	5	10	6	--

مع الإجراءات القديمة كان متوسط الطول الزمن 8 دقائق وكان يتوقع مع الإجراءات الجديدة توفيراً في النقود بدون زيادة في متوسط طول الزمن. إفحص إحصائياً ما إذا كانت بيانات هذه العينة توحي بأن متوسط طول الزمن في ظل الإجراءآت الجديدة قد زاد عن الإجراءات القديمة.

(٦-٣٣) تدعي شبكة التليفزيون أن متوسط أعمار المشاهدين لبرنامج معين هو 30 سنة ومع ذلك فهناك الكثير من المحطات الفرعية تعتقد أن متوسط العمر هو أقل من ذلك. في عينة عشوائية حديثة حجمها 36 من مشاهدي التليفزيون كان متوسط العمر لهم 24.8 سنة بإنحراف معياري 12.6 سنة. مستخدما بيانات العينة، أختبر صحة إدعاء شبكة التليفزيون.

(٦-٣٤) في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، تسحب عينات عشوائية بصفة دورية لمراقبة وضبط واط المصابيح، ومن المهم في العملية التصنيعية أن يكون متوسط الواط لا يزيد ولا يقل عن قيمة مستهدفة وهي 60 واط. في عينة من الإنتاج الحالي من n=16 مصباح، كان المتوسط 58.6 واط بإنحراف معياري 4.4 واط. من المعلومات التاريخية كان واضحاً أن توزيع الواط هو توزيع طبيعي.

(أ) أختبر صحة إدعاء القيمة المستهدفة.

(ب) هل إجابتك في (أ) تؤكد إتخاذ إجراء تصحيحي؟ إشرح ذلك.

(٦-٥) الإستدلال الإحصائي حول π إعتماداً على P : Statistical Inferences for π Based on P

المنهج الذي قدم في الفصل (٦-٤) والمتعلق بالإستدلال حول متوسط المجتمع μ ولكن مع تعديل بسيط، يظل سارياً ليستخدم في إجراء الإستدلال المتعلق بالنسبة في المجتمع π.

بفرض أننا سحبنا عينة عشوائية وسجلنا لكل وحدة معاينة وجود أو غياب صفة ما (مثل: هل كانت التخفيضات ناجحة؟ هل كان الموظف سيدة؟ هل كانت الوحدة المنتجة معيبة؟). هدفنا الأساسي هو تقدير نسبة الأفراد في المجتمع اللذين تتحقق فيهم الصفة موضوع البحث والدراسة. نفرض أن X تمثل عدد وحدات المعاينة والتي يتحقق فيها الخاصية التي نهتم بها في العينة المكونة من n مفردة. كما نعلم من الفصل الرابع، فإن X يكون لها توزيع ذو الحدين بشرط أن يكون المجتمع كبيراً بدرجة كافية ليتأكد الإستقلال بين وحدات العينة. نضيف إلى ذلك، فنحن نعلم من الفصل (٥-٦) أن أفضل إحصاء للإستدلال حول النسبة π في المجتمع هو النسبة في العينة P حيث $P=X/n$، ونعلم أيضاً من الفصلين (٤، ٥) أنه تحت شروط معينة، فإن توزيع المعاينة للنسبة في العينة، $P=X/n$ يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط: $\mu=\pi$ وإنحراف معياري $\sigma=\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$. (القاعدة العامة: $n\pi, n(1-\pi)$ كل منهما لا يقل عن 5)، لذلك فتوزيع المعاينة للأحصاء Z حيث $Z=(P-\pi)/\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$ هو تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري. وهذا يعني أنه إذا تحققت الشروط الضرورية، فإن الإستدلال حول π يتضمن إستخدام التوزيع الطبيعي المعياري المعروف لنا.

(٦-٥-١) فترة الثقة للنسبة π : Confidence Intervals for π

تذكر أن النسبة هي P=X/n، حيث X هي العدد المشاهد من حالات النجاح في عينة حجمها n. نفرض أننا نرغب في فترة ثقة للنسبة المجهولة π. حيث أن توزيع المعاينة هو تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري، فإن فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ تقريباً للنسبة π تحدد على أساس ما نوقش بصفة عامة في البند (٦-٤-١) وهي كالآتي:

P ± Margin of Sampling Error

or

$$P \pm Z_{1-\alpha/2}\, SE(P)$$

$$P \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \qquad (6.9)$$

where

$$\text{Margin of Sampling Frror} = Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \qquad (6.10)$$

يلاحظ في الصيغ (6.9), (6.10) أننا قدرنا الخطأ المعياري لـP حيث $SE(P)=\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$ بإحلال النسبة في العينة P محل النسبة المجهولة π. يلاحظ أيضاً أننا إستخدمنا كلمة تقريباً **Approximate** لأن الأحصاء Z، حيث: $Z=(P-\pi)/\sqrt{P(1-P)/n}$ له تقريباً التوزيع الطبيعي المعياري. (إحلال P محل π لن يؤدي إلى إضافة إختلافات قد تسبب في أن يصبح التوزيع الطبيعي المعياري تقريباً غير مناسب، طالما أن شروط القاعدة العامة متحققة).

مثال (٦-١٣)

في عينة من 200 ناخب من المسجلين، تبين أن منهم 92 يفضلوا مرشح سياسي معين على خصمة.

(أ) حدد فترة الثقة 95% لنسبة جميع الناخبين المسجلين واللذين يفضلوا هذا السياسي وذلك في الوقت الذي سحبت فيه هذه العينة.

(ب) هل من الصواب أن تقول أن الإحتمال 0.95 يعني أن قيمة π تقع داخل الفترة التي حددت في (أ)؟

(جـ) هل من المناسب القول بأن هناك ثقة قدرها 95% بأن النسبة لمن صوتوا فعلاً لهذا السياسي سوف تقع داخل الفترة التي حددت من قبل؟

الحل

(أ) في هذه العينة X=92، n=200 فإن النسبة في العينة تكون P=92/200=.46 وعند فترة الثقة 95% فإننا نركز على 95. من المساحة تحت المنحنى تاركين مساحة قدرها 025. عند طرفي منحنى التوزيع الطبيعي المعياري وبالتالي فإن القيم المعيارية تكون ±1.96 ومن ثم تصبح فترة الثقة 95% للنسبة π على الصورة:

$$.46 \pm 1.96\sqrt{\frac{(.46)(1-.46)}{200}} = .46 \pm .0691 = .391 \text{ to } .529$$

أما هامش خطأ المعاينة فهو 0691. لذلك يمكننا القول أنه تقريباً بدرجة ثقة 95% نجد أن نسبة من يفضلوا ذلك المرشح السياسي في الوقت الذي سحبت فيه هذه العينة هي بين 391. ,529. ومن المهم أن نعرف أنه عندما تقوم وسائل الإعلام بتقييم نتائج الإقتراع السياسي بذكرها أن هناك هامشاً بالزيادة أو بالنقص على التقدير النقطي للنسبة، فإنها ببساطة تعني هامش خطأ المعاينة المؤثث على مستوى الثقة 95%.

(ب) ليس من الصواب القول بأنه بإحتمال قدره 95% تقع قيمة π داخل هذه الفترة، فنسبة من يفضلوا ذلك السياسي هي نسبة ثابتة وموجودة، ولكنها غير معلومة القيمة أي أنها ليست متغير عشوائي. خمسة وتسعون في المائة من كل العينات العشوائية والتي يمكن إختيارها تعطي فترات ثقة تحتوي على هذه القيمة المجهولة لذا نحن نثق بـ95% في أن فترة الثقة للعينة التي معنا تحتوي على النسبة π.

(جـ) ليس من المناسب القول بذلك. نسبة من يفضلوا ذلك السياسي يمكن أن تتغير ما بين فترة الإقتراع وبين الإنتخابات نفسها، نضيف إلى ذلك أن فترة الثقة تهتم فقط بخطأ المعاينة ولا تهتم بمصادر الأخطاء الأخرى والتي ذكرت في الفصل الأول.

المعاني الضمنية للمثال (٦-١٣)

من المهم جداً أن نفهم أهمية العبارة: "في الوقت الذي سحبت فيه العينة". الإستدلال الإحصائي محدد بالإطار الذي سحبت منه العينة العشوائية. مثال (٦-١٣) يوضح هذه النقطة جيداً. الفكرة هي أن مجتمع الناخبين يمكن أن يتغير بسرعة، وماكان موجوداً في الأسبوع الماضي ربما لا يستمر حتى الأن. بصفة عامة، فإن أفضل إجراء لتتبع التغيرات في المجتمع هو تحليل بيانات العينات بصفة دورية.

(٦-٥-٢) إختيار حجم العينة المناسب: Choosing an Adequate Sample size

دعنا نعود إلى المثال (٦-١٣) حيث حددنا فترة ثقة تقريباً 95% لنسبة الناخبين في المجتمع المؤيدين لهذا المرشح السياسي وكانت بين (529. to 391.). هذه الفترة تعني أنه إذا لم يتغير رأي الناخبين، فإن ذلك السياسي يمكن أن يخسر الإنتخابات (إذا كانت π هي أي قيمة أقل من 5. داخل الفترة) أو يكسب الإنتخابات (إذا كانت π هي أي قيمة أكبر من 5. داخل الفترة). بمعنى آخر النتيجة لا يمكن التنبؤ بها إعتماداً على هذه الفترة. هذه النتيجة تنبع مباشرة من كبر هامش خطأ المعاينة (0691.) إلى حد ما، ومن ثم نكون في حاجة إلى هامش خطأ معاينة أصغر ليتضح الموقف.

ولكي نحقق هامش خطأ معاينة معين، يمكن تحديد حجم العينة الضروري بنفس الأسلوب الذي إستخدم في البند (٦-٤-٢). نفرض أن هامش خطأ المعاينة المطلوب تحقيقه لمثال (٦-١٣) هو 025. (زائد أو ناقص 2.5%)، ما هو حجم العينة الذي نحتاجه لتحقيق ذلك؟ عند مستوى ثقة 95% فإننا نساوي الصيغة (6.10) الخاصة بهامش خطأ المعاينة مع القيمة المطلوبة، كما يلي:

$$1.96\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0.025 \qquad \textbf{(6.11)}$$

ولكي نصل إلى n من الصيغة (6.11) يجب معرفة π أو تقدير لها. الإجراء المنطقي هو أن نفترض أن π=.5. ينتج عن هذا حجم عينة أكبر مما نحتاجه بسبب أن الخطأ المعياري لـP لن يزيد عن 25.

عندما تكون π=.5 ولكنه بالتأكيد يحقق هامش خطأ المعاينة المطلوب أيا كانت قيمة π . بمعنى آخر ربما يكون من الحكمة أن نكون بمأمن بأفتراض π=.5.

بالتعويض عن π=.5، يمكن حل الصيغة (6.11) بالنسبة إلى n كما يلي:

$$1.96\sqrt{\frac{(.5)(.5)}{n}}=.025$$

$$\sqrt{\frac{.25}{n}}=\frac{.025}{1.96}$$

$$\frac{.25}{n}=\left(\frac{.025}{1.96}\right)^2$$

$$n=\frac{.25}{(.025/1.96)^2}=1536.64$$

$$n=1537$$

لذلك، إذا أختيرت عينة عشوائية من 1537 من الناخبين المسجلين، فإن هامش خطأ المعاينة عند مستوى ثقة 95% لن يكون أكثر من ±2.5%. إذا فرض أنه مع هذه العينة الكبيرة، كانت نسبة المؤيدين للمرشح السياسي كما هي في مثال (٦-١٣) أي 46% فإن فترة الثقة 95% تكون: .46±.025 أو (.435 to .485). على خلاف الفترة السابقة، فالنتيجة هنا تظهر بدقة كافية أن ذلك المرشح السياسي سيخسر في الوقت الحالي. وهذا التحليل كافياً لإجراء تعديلات في سياسة الحملة الإنتخابية.

بإستخدام عمليات جبرية بسيطة، يمكن أن نحل الصيغة (6.11) للحصول على n بإستخدام أي مستوى ثقة وأي هامش خطأ معاينة. لتحقيق فترة ثقة تقريباً $100(1-\alpha)\%$ للمعلمه π بمدى أو إتساع قدرة ضعف هامش خطأ المعاينة، فإننا نحدد حجم العينة n بإستخدام الصيغة:

$$n=\pi(1-\pi)\left(\frac{Z_{1-\alpha/2}}{E}\right)^2 \qquad \textbf{(6.12)}$$

حيث E تشير إلى هامش خطأ المعاينة المرغوب فيه. غالباً يكون من الحكمة أن نضع π=.5.

(٦-٥-٣) إختبارات الفروض الإحصائية حول π بإستخدام فترات الثقة:

Testing Statistical Hypotheses on π Using Confidence Intervals

خطوات استخدام فترات الثقة لأختبار الفروض المتعلقة بالنسبة في المجتمع π، هي نفسها التي استخدمت مع المتوسط μ عندما تكون σ معلومه (انظر البند٦-٤-٤). نفرض أننا نرغب في إختبار الفرض العدمي:

$$H_o : \pi = \pi_o$$

مقابل الفرض البديل من طرفين:

$$H_a : \pi \neq \pi_o$$

حيث π_o هي قيمة يدعى بها لـ π. بأستخدام الصيغة (6.9)، يمكن تحديد فترة ثقة تقريباً $100(1-\alpha)\%$ للنسبة π. فإذا كانت القيمة المدعى بها π_o تقع داخل هذه الفترة، فإن π_o تعتبر قيمة مقبوله للنسبة في المجتمع والعكس صحيح.

عندما تستخدم فترات الثقة في إختبارات الفروض ، فإن بعض التناقض البسيط قد يظهر بسبب أن فترة الثقة تستخدم قيمه النسبه في العينة بدلا من النسبة المدعى بها π_o عند تقدير $SE(P)$. عموما أذا كانت قيمة P قريبة من π_o فإن ذلك التناقض يتضائل في الأهمية.

مثال (٦-١٤)

من استقصاءات سابقة، كان يعتقد أن 60% من المستهلكين يفضلوا طعم كولا A على كولا B. في إستقصاء حديث تم على 400 مستهلك، تبين أن 208 يفضلوا كولا A. عند مستوى ثقة 95%، هل بيانات العينة تتفق مع الاعتقاد السابق ؟

الحل

حيث أنه لا تتوفر معلومات تتعلق بأتجاه الفرض البديل، فإننا نضع H_a,H_o على الصورة:

$H_o : \pi = .6$

$H_a : \pi \neq .6$

من العينة : $n= 400, X= 208, P =208/400 =.52$

وعند مستوى ثقة 95% تصبح القيم المعيارية ±1.96 وبالتالي يمكن أن نستخدم الصيغة(6.9) لإيجاد فترة الثقة:

$$.52 \pm 1.96\sqrt{\frac{(.52)(1-.52)}{400}} = .52 \pm .049 \quad = .471 \ \text{to} \ .569$$

وحيث أن القيمة التي يدعيها H_o ليست في داخل هذه الفترة، فإن $\pi = .6$ هي قيمه غير مقبولة للنسبة في المجتمع. أي أن بيانات العينة لا تؤيد ادعاء الفرض العدمي.

(٦-٥-٤) إختبارات الفروض الأحصائية حول π بأستخدام القيمة P :

Testing Statistical Hypotheses on π Using P - Value

سنوضح كيفية استخدام اسلوب القيمة P (P-value) لأختبار الفروض المتعلقة بـπ من خلال الأمثله التالية.

القيمة P عندما يكون الفرض البديل من طرف واحد:

مثال (٦-١٥)

عادة ما تقوم مكاتب المراجعة بأختيار عينة عشوائية من عملاء البنوك للتأكد من مراجعة حسابتهم أو مراجعة الميزانية المحاسبية كما جاءت في تقرير البنك. تاريخيا، نسبة الحسابات التي بها تناقضات في أحد البنوك هي 0.1 (أي10%). هذا البنك يحاول أن يقلل هذه النسبةوذلك بتحسين تقاريره. في عينة عشوائية حديثه من 200 حساب مسحوبه من هذا البنك، وجد 16 حساب بها تناقض. إلى أي مدى تدعم بيانات العينة أن البنك قد خفض نسبة التناقض عن القيمة التاريخية ؟

الحل

بناء على العينة الحالية، النسبة المقدرة للتناقضات هي 16/200=0.08 . . والانخفاض 2% يمثل تحسنا ذو قيمة لجودة الأداء بالبنك. اختبارات الفروض يمكن استخدامها لنرى ما اذا كانت بيانات

العينة تظهر إن كان البنك قد تحسن فعلا أم لا . حيث أن اتجاهاً قد تحدد في السؤال المطروح ، فإننا نضع الفروض : العدمي والبديل على النحو التالي

$H_o : \pi = .1$

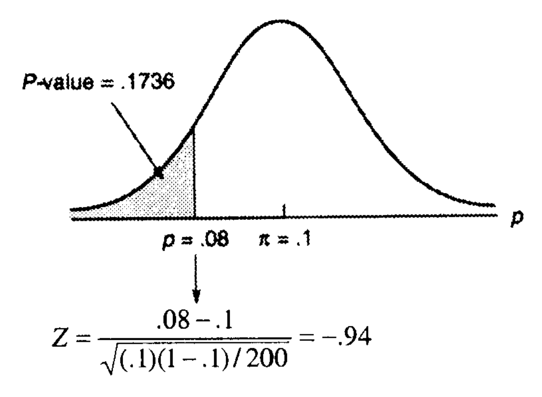
$H_a : \pi < .1$

من العينة : $n=200,\ X=16,\ P=16/200 = 0.08$

P–Value هي احتمال أن النسبة في العينة تكون 0.08 أو أقل (اتجاه الفرض البديل) اذا كانت النسبة في المجتمع باقية عند $\pi = .1$ وبالتالي قيمة P هي :

$$P\text{ - value} = P\ (P < .08)$$

$$= P\left(Z < \frac{.08 - .1}{\sqrt{(.1)(1 - .1)/200}} \right) = P(Z < -0.94) = .1736$$



شكل(٦–١٢) : تحديد القيمة –P لمثال (٦–١٥)

تحديد قيمة P موضح في شكل (٦–١٢) . يلاحظ أنه عند حساب الخطأ المعياري لـP (المقام في تحديد قيمة Z) أننا استخدمنا قيمة π التي يدعيها الفرض العدمي(π =.1). اذن هناك احتمال قدرة 1736.. أن النسبة في العينة تساوي 0.08 أو أقل من ذلك ومعظمنا سوف يقول أن قيمة P هذه لا تقدم دليلا مقنعاً على أن انخفاضا قد تحقق في نسبة التناقضات عن القيمة التاريخية وهي 0.1 .

مثال (٦–١٦)

ابدت ادارة التسويق فكراً جديداً في البيع يسمى "البيع بروح الفريق" وفيه تستخدم وسيلة التليفون في عرض السلع على الزبائن قبل البيع . يدعي فريق البيع أنه يمكنه زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة إلى أكثر من 18% وهي نسبة البيع الحالية والمحققه. ارتأت الادارة أن تستخدم فريق البيع ولكن في البداية اشترطت أن تكون نسبة مكالمات البيع الناجحة يجب أن تتعدى النسبة الحالية للمبيعات . في إختبار ما ، جرب فريق البيع مع عينة من 100 مكالمة بيع ، نجح في اتمام22 عملية بيع . هل هذه العينة تظهر أن هناك تحسنا قد حدث مع فريق البيع ؟

الحل

هذا مثال آخر يتحدد فيه اتجاه الفرض البديل. حيث أن الفرض البديل المطلوب هو أن فريق البيع قد حسن وبنجاح من معدل البيع . وعلى ذلك يتحدد الفرض العدمي والفرض البديل على النحو التالي: $H_o : \pi = .18$, $H_a : \pi > .18$.

نسبة مكالمات البيع الناجحة في العينة : P =22/100=.22 . P-Value هي احتمال أن النسبة في العينة تتعدى 22. اذا كانت 18. = π ومن ثم :

$$P\text{-value} = P(p > .22)$$
$$= P\left(Z > \frac{.22-.18}{\sqrt{(.18)(1-.18)/100}}\right)$$
$$= P(Z > 1.04) \quad = 1-.8508 \quad = .1492$$

∴ هناك إحتمال قدره 1492. أن التحسن الظاهر كنسبة كبيرة في العينة قد يكون راجعاً لإختلافات المعاينة وحدها، على فرض أنه لا يوجد تحسن حقيقي. مع وجود قيمة –P بهذا الحجم الكبير 1492.، فإنه من غير الحكمة استخدام فريق البيع. الأمر يتطلب سحب عينه أخرى لتتأكد من أن الزيادة الظاهرية في معدل النجاح تمثل تحسنا حقيقيا.

القيمة P عندما يكون الفرض البديل من طرفين.

عودة إلى المثال (٦–١٤) الذي يشتمل على نسبة المستهلكين اللذين يفضلوا كولا A على كولاB. في عينة عشوائية من n=400: مستهلك، نسبة من يفضلوا كولا A كانت P=.52. الفرض العدمي والبديل كانا على الصورة: $H_o: \pi = .6$, $H_a\ \pi \neq .6$: تحديد قيمة P (P-Value) في حالة الفرض البديل من طرفين تأخذ في الأعتبار إمكانية ابتعاد النسبة في المجتمع في كلا الأتجاهين عن النسبة التي يدعيها الفرض العدمي. اذا كان الفرض العدمي صحيحاً لدرجة أن قيمة π تساوي 6. ، فإن قيمة Z المناظرة للنسبة المشاهدة P=,52 هي :

$$Z = \frac{.52-.6}{\sqrt{(.6)(1-.6)/400}} = -3.27$$

وحيث أن التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع متماثل، فإن قيمة P للطرفين هي :

$$P\text{- value} = 2P(Z < -3.27) = (2)(.005) = .001$$

وكما استنتجنا من قبل، فإن صغر قيمةP بهذا الشكل يوحي بأن بيانات العينة الحالية تناقض ادعاء الفرض العدمي كما أنها تشير (اعتمادا على اثبات سابق) إلى أن قيمة π هي أقل من 0.6

تمارين:

(٦–٣٥) للعينات التالية، حدد ما اذا كانت الشروط الضرورية موجودة لتكوين توزيع المعاينة للنسبة P والذي يناسبه التوزيع الطبيعي. للحالات التي يناسبها التوزيع الطبيعي، إحسب فترة الثقة 95% للنسبة π.

(a) n =142, π is unknown, P = .05

(b) n =142, π is unknown, P =.50

(c) n =36 , π is unknown, P = .05

(d) n =36 , π is unknown, P =.50

(٦–٣٦) بالرجوع إلى التمرين(٦–٣٥) واعتماداً على اجابتك من (أ) إلى (د) :

(أ) ناقش كيف يرتبط هامش خطأ المعاينة مع حجم العينة.

(ب) ناقش كيف يرتبط هامش خطأ المعاينة مع النسبة في العينة P.

(جـ) هل فترات الثقة التي تحسبها هي فترات دقيقة تماماً أم تقريبية ؟ ولماذا ؟

(٦-٣٧) حدد حجم العينة اللازم لتحقيق هامش خطأ معاينة 0.035 ± بمستوى ثقة 95% في الحالات التالية:

(a) $\pi = .12$ (b) $\pi = .40$ (c) $\pi = .60$ (d) $\pi = .50$

(٦-٣٨) في الأجزاء من (أ) إلى (د) في تمرين (٦-٣٧)، لأي قيمة من π يعطي حجم العينة هامش خطأ المعاينة المرغوب؟ وضح ذلك.

(٦-٣٩) اذا كانت نسبة المعيب المستهدفه في انتاج وحدات بعملية تصنيعية معينه هي 4% . هذه العملية تراقب بصفة يوميه بسحب عينات حجم كل منها n=160 وحدة. بفرض أن العينة التي سحبت اليوم إحتوت على 15 وحدة معيبة.

(أ) حدد فترة الثقة 95% لنسبة المعيب π في هذا اليوم.

(ب) اعتماداً على اجابتك في(أ)، هل مازلت مقتنعاً بأن نسبة المعيب في ذلك اليوم هي فعلا النسبة المستهدفه 4% ؟ وضح ذلك .

(٦-٤٠) في احدث انتخابات لعضوية الكونجرس، تبين أنه في عينه عشوائية ممن لهم حق الأنتخاب حجمها 2500، أن عدد من فضلوا المرشحA على المرشح B 1400 ناخب.

(أ) حدد فترة الثقة95% لنسبة المؤيدين للمرشحA في المجتمع. اعتماداً على هذه النتيجة، هل يمكن القول أنه من المحتمل أن يكسبA الأنتخابات ؟ ولماذا ؟

(ب) بفرض أنه اختيرت عينة من250 ناخب بدلا من 2500 وأن نسبة المؤيدين للمرشح (A) هي نفس النسبة التي في (أ). أعد حساب فترة الثقة 95%. هل النتيجة التي حصلت عليها تختلف هذه المرة ؟ ولماذا ؟

(٦-٤١) بالرجوع إلى التمرين (٦-٤٠).

(أ) حدد حجم العينة اللازم لتحقيق هامش خطأ معاينة 2.5% ±عند مستوى ثقة 95% .

(ب) أجب عن نفس السؤال في (أ) عند هامش خطأ معاينة 3.5%.

(٦-٤٢) في عينة عشوائية حجمها 100 مستهلك، وجد أن منهم 57 يفضلوا مشروب له مذاق جديد ومختلف عن المشروب التقليدي والذي كان يستخدم في أحد المحلات الكبرى لعدة سنوات.

(أ) هل نتيجة هذه العينة تكفي للأعلان أن أكثر من نصف المستهلكين تفضل المشروب الجديد ؟ دعم اجابتك.

(ب) ناقش ما هي المعايير التي تراها مهمه عند إختيار عينة المستهلكين والتي حجمها 100.

(٦-٤٣) مصنع لأنتاج الغسالات يدعي أن 5% فقط من الوحدات المباعة، سوف يحدث بها عطل اثناء العام الأول لها من الاستخدام العادي. احدى منظمات حماية المستهلك أجرت مقابلة بطريقة عشوائية مع 150 عائلة ممن إشتروا هذه الغسالات، وطلب منهم تسجيل أية أعطال قد تحدث في العام الأول. مع نهاية العام الأول، كانت هناك 18عائلة قد سجلت وجود أعطال في تلك الغسالات.

(أ) حدد فترة الثقة 95% لنسبة الغسالات التي حدث بها عطل أثناء العام الأول من الاستخدام العادي.

(ب) استخدم الأجابة في (أ) لتحديد ما اذا كانت بيانات العينة تناقض ادعاء المصنع.

(جـ) أخذاً في الأعتبار ادعاء المصنع، ساعد منظمة حماية المستهلك في تحديد الاطار الذي تسحب منه عينة الأسر.

(٦-٤٤) في استقصاء شمل 1320 من دافعي الضرائب أن منهم740 سوف يقبلوا دفع ضرائب أعلى كي ينخفض العجز في الميزانية الأتحادية. تدعى الحكومة أن نسبة من يفضلوا ضرائب أعلى هي 0.6.

(أ) إحسب فترة الثقة 95% ثم استخدمها لتحديد ما اذا كان هناك سبب مقنع للاعتقاد بأن هذه النسبة هي أقل مما تدعي الحكومة.

(ب) ناقش إلى أي مدى تناقض بيانات العينة الحالية ادعاء الحكومة.

(٦-٤٥) يدعي مورد ما أن نسبة القطع المعيبة التي تشحن لأحد المنتجين لا يمكن أن تزيد عن 8%. أختار المنتج عينة عشوائية من 200 قطعة من بين دفعة كبيرة تسلمها من المورد ووجد بها 19 قطعة معيبة.

(أ) إحسب فترة الثقة 95%ثم استخدمها لتحديد ما اذا كان هناك سبب مقنع بأن هذه النسبة تفشل في تحقيق المواصفات التي يدعيها المورد.

(ب) ناقش إلى أى مدى تناقض بيانات العينة الحالية ادعاء المورد.

(٦-٦) الإستدلال الإحصائي حول σ^2 إعتماداً على S^2: Statistical Inferences on S^2 Based on σ^2

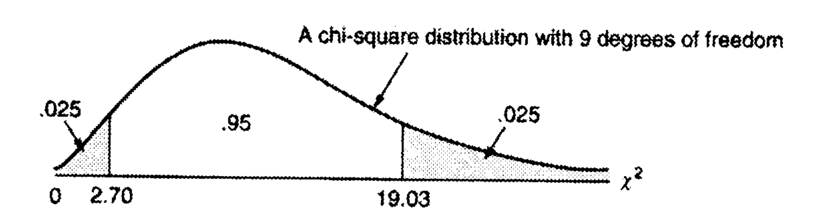
غالباً ما نهتم بالتركيز على حجم الإختلافات الموجودة في المجتمع أو العملية وهذا يقودنا إلى الاهتمام بالإنحراف المعياري. هذا الإهتمام يتحقق عندما نتناول الإستدلال المتعلق بتباين المجتمع σ^2.

نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من المشاهدات من مجتمع توزيعه هو التوزيع الطبيعي وتباينه σ^2 مجهول القيمة، وأننا نرغب في إنشاء فترة ثقة أو في إختبارات إحصائية عن σ^2، إعتماداً على الإحصاء S^2. من البند (٥-٧-٢) نعلم أنه تحت فرض أن العينة العشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي، فإن توزيع المعاينة للإحصاء: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ له توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n-1). جدير بالذكر أن المبادئ الأساسية لفترات الثقة وإختبارات الفروض باقية كما هي مع تعديل بسيط نحتاج إليه لأن توزيع المعاينة لكاي- تربيع ليس متماثلا.

(٦-٦-١) فترة الثقة لـ σ^2 : Confidence Intervals for σ^2

مرة أخرى نعود إلى مثال عملية التعبئة في الفصل (٥-٣). نفرض أننا نبحث عن فترة ثقة95% لـσ^2 إعتماداً على عينة عشوائية n=10 علب. كما وضحنا من قبل، تتحدد فترة الثقة عن طريق إيجاد مدى يشمل95% من توزيع المعاينة لـS^2. بمعنى آخر، تتركز المساحة بحيث يترك 025. من المساحة

عند طرفي توزيع كاي تربيع بدرجات حرية 9=1-10. من جدول D بالملحق نجد أن المدى الذي يشمل 95. من مساحة توزيع كاي-تربيع بدرجات حرية 9 هو: 2.70 to 19.03 . هذه القيم الجزيئية أو المعيارية موضحة في شكل (٦-١٣). ويمكننا أيضا استخدام خطوات برنامج Minitab كما هي موضحة في البند (٥-٧-٢) للحصول على تلك القيم الجزيئية.



شكل (٦-١٣) : قيم كاى تربيع الجزيئية عند فترة الثقة 95%

معنى القيم الجزيئية أو المعيارية 2.70 ,19.03 بدلاله الاحتمالات هو :

$$P(2.70 < \chi^2 < 19.03) = .95$$

بالتعويض عن: $\chi^2 = (10\text{-}1)\, S^2/\sigma^2$ ، نجد أن :

$$P(2.70 < \frac{9\ S^2}{\sigma^2} < 19.03) = .95$$

يأخذ مقلوبات كل ما بداخل القوس، نحصل على :

$$P(\frac{1}{2.70} > \frac{\sigma^2}{9\ S^2} > \frac{1}{19.03}) = .95$$

بضرب المتباينة التي بداخل القوس في $9S^2$:

$$P(\frac{9\ S^2}{2.70} > \sigma^2 > \frac{9\ S^2}{19.03}) = .95$$

or

$$P(\frac{9\ S^2}{19.03} < \sigma^2 < \frac{9\ S^2}{2.70}) = .95$$

لذلك فإن الفترة :{ $9\ S^2/19.03$ to $9\ S^2/2.70$ } هي فترة عشوائية (تذكر أن الأحصاء S^2 هو متغير عشوائي) تحتوي على σ^2 بإحتمال قدرة 95. .

معنى تلك الفترة العشوائية هو نفس المعنى السابق، أي أنه اذا كررنا سحب عينات عشوائية كل ذات الحجم n=10 من مجتمع طبيعي وفي كل مرة تسحب فيها عينة يحسب لها القيمة S^2(ومن ثم يحسب المدى للفترة العشوائية: $9\ S^2/19.03$ to $9\ S^2/2.70$)، عندئذ نتوقع أن 95% من هذه الفترات تحتوى على التباين المجهول σ^2 . فمثلا، خذ القيمة 197772. = S^2 لأول عينة (أنظر الجدول (٥-١)) بالتالي فإن فترة الثقة 95% لـσ^2 تصبح (9) (.197772) / 19.03 = .0935 to (9) (.197772) / 2.70 = .6592

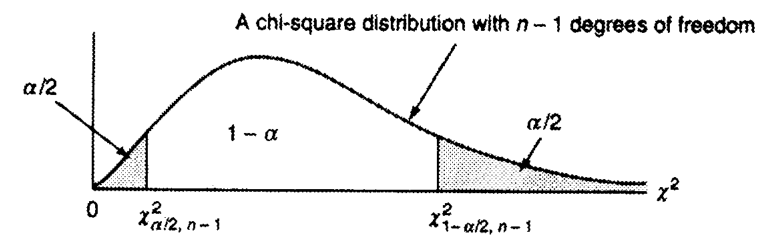
ومركز هذه الفترة: { 376.=2/(6592.+ 0935.)} لا يتطابق مع القيمة 197772. =S^2. بخلاف فترات الثقة لكل من μ , π فإن مراكز فترات الثقة لـσ^2 لا تتطابق مع قيمS^2، لأن توزيع المعاينة لكاي تربيع هو توزيع غير متماثل.

الطريقة السابقة يمكن تعميمها للحصول على فترة الثقة لـ σ^2 . لنفرض أن مستوى الثقة المرغوب فيه هو $100\ (1-\alpha)\ \%$ وأننا نركز على $(1-\alpha)$ من مساحة توزيع كاي تربيع الذي له درجات حرية $(n-1)$ مع تحديد القيم الجزيئية والتي على الصورة:

$$\chi^2_{\alpha/2,\ n-1} \quad , \quad \chi^2_{1-\alpha/2,\ n-1}$$

هذه القيم الجزئية موضحة في شكل (٦-١٤) عندئذ وإعتمادا على عينة عشوائية n من المشاهدات مسحوبة من مجتمع توزيعه هو التوزيع الطبيعي، فإن الصيغة العامة لفترة الثقة $100(1-\alpha)\ \%$ للتباين هي :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\ n-1}} \quad \text{to} \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\ n-1}} \qquad \textbf{(6.13)}$$



شكل (٦-١٤): قيم كاي تربيع عند فترة % 100(1-a)

وكتوضيح أخر، دعنا نستخدم مرة أخرى القيمة $S^2 = .197772$ لأول عينة في جدول(٥-١) لتحديد فترة الثقة 98% لـ σ^2 . هنا نركز على .98 من المساحة تاركين .01 من المساحة على كل جانب من جانبي توزيع كاي- تربيع بدرجات حرية 9= 1-10. القيمة الجزئية في الجانب الأيسر هي : $\chi^2_{.01,\ 9} = 2.09$ بينما القيمة في الجانب الأيمن هي: $\chi^2_{.99,\ 9} = 21.65$ وعلى ذلك ومن الصيغة (6.13) فإن فترة الثقة 98% تكون .

$$(9)\ (.197772)\ /21.65 = .0822 \quad \text{to} \quad (9)\ (.197772)\ /2.09 = .8516$$

وكما هو متوقع من الحالات السابقة، فإن فترة الثقة هذه تكون اوسع من الفترة عند مستوى ثقة 95%.

(٦-٦-٢) إختبارات الفروض الأحصائية حول σ^2 باستخدام فترات الثقة :

Testing Statistical Hypotheses on σ^2 Using Confidence Intervals

أساس الطريقة التي تستخدم فترات الثقة في إختبارات الفروض المتعلقة بتباين المجتمع σ^2، هي نفسها التي استخدمت من قبل في حالة μ أو π. نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية n من المشاهدات من مجتمع توزيعه هو الطبيعي. لأختبار الفرض العدمي: $H_o:\sigma^2 = \sigma_o^2$ مقابل الفرض البديل $H_a:\sigma^2 \neq \sigma_o^2$ ، حيث σ_o^2 هي القيمة التي يدعيها σ^2 ، فإنه يمكن تحديد فترة الثقة $100\ (1-\alpha)\ \%$ لـ σ^2 مستخدمين الصيغة (6.13). اذا كانت القيمة المدعى بها σ_o^2 تقع داخل فترة الثقة، فإن القيمة σ_o^2 تعد قيمة مقبولة لـ σ^2 والعكس صحيح.

مثال (٦-١٧)

معلوم من بيانات تاريخية أن الإنحراف المعياري لعدد الوحدات المنتجة في صورتها النهائية للعامل الواحد كل يوم هي 2 وحدة وذلك في أحد مصانع التجميع. مدير المصنع يوفر تدريبا إضافيا لأي

عامل لو أن بيانات عينة إنتاجية لهذا العامل تكشف عن أن الإختلافات بينها تختلف عن القيمة التاريخية. سجل مدير المصنع الاعداد التالية لعدد الوحدات المنتجة في صورتها النهائية لأحد العمال خلال 12 يوما أختيرت بطريقة عشوائية: 8,10,14,8,9,16,15,12,13,8,12,15 . فإذا كان عدد الوحدات المنتجة لكل عامل في كل يوم يلائمها التوزيع الطبيعي. هل بيانات هذه العينة توحي من خلال فترة ثقة 95%– ان هذا العامل يجب ان يتلقى تدريبا إضافيا ؟

الحـــل

حيث أن القيمة التاريخية للإنحراف المعياري هي 2 وحدة، فإن قيمة التباين تكون 4. يلاحظ هنا أنه لم يحدد إتجاها للإختلاف، لذا فإن الفرض العدمي والبديل يكونا على الصورة.

$$H_o: \sigma^2 = 4 \quad \text{and} \quad H_a: \sigma^2 \neq 4$$

بأستخدام المشاهدات الأثنى عشر، نحسب تباين العينة ليكون $S^2 = 8.9697$ (أنظر للصيغة 5.12).
عند مستوى الثقة 95% ودرجات الحرية 11= 1-12 تكون القيم الجزئية :

$\chi^2_{.025,\,11} = 3.81$ ، $\chi^2_{.975,\,11} = 21.93$ ، من الصيغة (6.13) تكون فترة الثقة هي :

$$(11)\,(8.9697)\,/21.93 = 4.499 \quad \text{to} \quad (11)(\,8.9697)\,/3.81 = 25.897$$

حيث ان القيمة التي يدعيها الفرض العدمي H_o ليست داخل هذه الفترة، فإن بيانات العينة لا تؤيد هذا الإدعاء، لذلك هذا العامل يجب ان يتلقى تدريبا إضافيا لتخفيض الإختلافات.

(٦-٦-٣) إختبارات الفروض الإحصائية حول σ^2 باستخدام القيمة P:

Testing Statistical Hypotheses on σ^2 Using P-Values

مبدئيا، منهج القيمة P لإختبارات الفروض حول σ^2 هو نفسه الذي قدم في الحالات السابقة. ومع ذلك وكما في الحالة التي تشتمل على جدول T (جدول C)، فإن قيمة P يتم تقريبها عندما يستخدم جدول كاي تربيع (جدولD). في هذا الشأن جدول كاي تربيع أكثر محدودية من جدول T ومن الواضح أن استخدام الحاسب الآلي يتجنب مشكلة التقريب هذه . المثال التالي يوضح حسابات القيمة P عندما يكون الفرض البديل من طرف واحد.

مثال (٦-١٨)

من المهم جدا ألا يتعدى الإنحراف المعياري لدرجة تلوث مياه الشرب عن 3 أجزاء لكل مليون. في 15 عينة من المياه، سجلت درجات التلوث التالية : 2, 6, 12, 14, 4, 5, 9, 8, 3, 11, 7, 5, 4, 10, 2 بأفتراض أن التوزيع الطبيعي يلائم درجات التلوث لمياه الشرب. هل بيانات تلك العينة توحي سببا للإهتمام يتعلق بأختلافات تلوث مياه الشرب ؟

الحـــل

حيث أن أقصى قيمة للانحراف المعياري هي $\sigma = 3$ ، فإن الفرض العدمي والبديل يكونا على الصورة:

$$H_o: \sigma^2 = 9, \; H_a: \sigma^2 > 9$$

من المشاهدات n=15، نحسب تباين العينة ليكون: S^2 =14.0286 ومن ثم فإن قيمة الاحصاء كاي تربيع هو :

$$\chi^2 = \frac{(15-1)(14.0286)}{9} = 21.82$$

وهكذا فإن القيمة P (P-Value) هي إحتمال الحصول على قيمة للأحصاء كاي تربيع بدرجات حرية 14 تكون أكثر تطرفا من 21.82 في إتجاه الفرض البديل لذا.

$$\text{P-Value} := P(\chi^2_{14} > 21.82)$$

ولتقريب قيمة P، نفحص في الصف عند درجات الحرية 14 في جدول D بالملحق وتوجد-إذا كان ممكنا- القيمتين اللتين تحصران $\chi^2_{14} = 21.82$ ، سنجد ان تلك القيمتين هما: 21.07 , 23.69. يلاحظ أن المساحة على يمين 21.07 هي 0.1= 9000.-1 والمساحة على يمين 23.69 هي 05,=95.-1 وهكذا تكون قيمة P المطلوبة واقعة بين (1. and 05.) وحيث أن قيمة P هذه صغيرة نسبيا، فهذا يعني أنها توحي بسبب معين لكي نهتم بدرجة تلوث مياه الشرب. من المؤكد أننا نحتاج إلى سحب عينات إضافية من مياه الشرب.

استخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

من السهولة تحديد قيمة P المشتملة على توزيع كاي- تربيع بأستخدام برنامج ميني تاب، وكما سبق، يستخدم الأمر CDF مقرونا بالقيمة المحسوبة بكاي تربيع، يتبع ذلك الأمر الفرعي: CHISQUARE ، حيث يحدد معها درجات الحرية. وحيث أن الامر CDF يحدد المساحة وحتى قيمة معينة لكاي تربيع، وأننا نرغب في تحديد المساحة التي على يمين تلك القيمة المعينة لكاي تربيع، يكون كل ما علينا ان نفعله للحصول على قيمة P المطلوبة، هو أن نطرح ناتج برنامج ميني تاب من الواحد الصحيح. قيمة P الفعلية في المثال (٦-١٨) هي 0824.= 9176.-1 حيث أن القيمة الناتجة من برنامج ميني تاب كانت 9176. وهي على النحو التالي.

```
MTB > cdf  21.82;
SUB >chisquare  14.
     21.8200   0.9176
```

تمارين:

(٦-٤٦) فترة الثقة لتباين المجتمع غير متماثلة، بمعنى أن الحد الادنى والحد الاعلى كما هو موضح بالصيغة (6.13) ليسوا على مسافة متساوية من تباين العينة S^2 اشرح سبب ذلك.

(٦-٤٧) عميد القبول باحدى الجامعات كان مهتما بتقدير إختلاف متوسطات تقديرات طلبة المدارس الثانوية العليا واللذين تقدموا بطلبات للقبول بالجامعة. في عينة عشوائية من 20 من هؤلاء الطلبة، ظهرت درجات GPA التالية: 2.28, 2.62, 3.04, 2.80, 2.82, 2.50, 2.86, 2.88, 3.22, 2.68, 3.00, 2.50, 3.28, 2.79, 2.64, 2.49, 3.15, 2.84, 3.00, 2.63 عميد القبول يعلم أن توزيع الـGPA لمثل هؤلاء الطلاب هو التوزيع الطبيعي:

(أ) حدد فترات الثقة التالية: 90%, 95%, 99% لتباين المجتمع ثم علق على ماذا يحدث للفترات كلما زاد مستوى الثقة.

(ب) هل من الضروري أن يكون توزيع المجتمع هو الطبيعي لكي تتحقق عملية الإستنتاج في (أ)؟ فسر ذلك.

(٦-٤٨) بالرجوع إلى التمرين (٦-٤٧) عند مستوى الثقة 95%، ما هي القيم المقبولة والتي يمكن أن يدعيها عميد القبول بالجامعة للتباين σ^2، وهل σ^2=.025 هي قيمة مقبولة لتباين المجتمع؟ فسر ذلك.

(٦-٤٩) بالرجوع إلى التمرين (٦-٢٨). بفرض أنه يدعي بأن الإنحراف المعياري لأجور كل فني السيارات في هذه المدينة هو 1.25 دولار كل ساعة. إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الإدعاء بأن الإنحراف المعياري هو 1.25 دولار في مقابل قيمة أكبر.

(٦-٥٠) جهاز تعبئة يقوم بتعبئة مشروب عصائر في زجاجات بمتوسط مستهدف 12 أوقية للزجاجة. التعبئة يفترض أن تتفاوت بإنحراف معياري 06. أوقية. في عينة عشوائية حديثة من 18 زجاجة معبأة، سجلت الأوزان التالية: ,12.06, 11.75, 11.91, 11.98, 11.84, 11.83, 11.95, 11.86, 11.97, 12.00, 11.96, 11.96, 11.95, 11.86, 12.03, 11.92, 11.82, 11.82 معلوم من البيانات التاريخية أن وزن كل زجاجة هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي.

(أ) إحسب فترة الثقة 95% لتباين المجتمع وذلك لتحديد ما إذا كان هناك سبب مقنع للإعتقاد بأن هناك زيادة في إختلاف كميات التعبئة عن القيمة المدعى بها.

(ب) إلى أي مدى تكون هذه البيانات مناقضة للإدعاء بأن الإنحراف المعياري هو 06. أوقية في مقابل قيمة أقل؟

(٦-٥١) بالرجوع إلى التمرين (٦-٣٠). بفرض أن الغرفة التجارية تدعي أن الإنحراف المعياري للإنفاق اليومي في هذه المدينة هو 25 دولار.

(أ) إحسب فترة الثقة 95% لتباين المجتمع، وذلك لتحديد ما إذا كانت العينة الحالية تناقض بوضوح إدعاء الغرفة التجارية.

(ب) إلى أي مدى تكون هذه العينة مناقضة للإدعاء بأن الإنحراف المعياري هو 25 دولار في مقابل قيمة أقل؟

(٦-٥٢) بالرجوع إلى التمرين (٦-١٩)

(أ) حدد فترة الثقة 95% لتباين المجتمع.

(ب) بفرض أننا ندعي أن $\sigma = 6$ طن، إعتماداً على إجابتك في (أ)، هل ما ندعية مقبولاً؟ إشرح ذلك.

(٦-٧) ملخص: SUMMARY

في هذا الفصل، استخدمت المفاهيم الأساسية التي نوقشت في الفصل الخامس، بجانب التوزيع الطبيعي المعياري، توزيع T وتوزيع كاي تربيع، وذلك لتقديم فترات الثقة وإختبارات الفروض الإحصائية للمعالم الهامة σ^2, π, μ إعتماداً على عينة عشوائية من مجتمع واحد.

فترة الثقة تتكون من تقدير فترة للمعلمه مصحوبة بدرجة ثقة أن هذه الفترة تحتوي على قيمة المعلمة المجهولة. إذا كان توزيع المعاينة لأفضل إحصاء متماثلاً، فإن فترة الثقة تساوي التقدير بنقطة زائد أو ناقص هامش خطأ المعاينة، حيث هامش خطأ المعاينة يصف دقة أفضل إحصاء.

الفرض الإحصائي هو إدعاء أو إعتقاد يتعلق بقيمة المعلمة المجهولة، وهناك فرضين متنافسين الفرض العدمي والذي يمثل حالة الإدعاء والفرض البديل الذي يمثل حالة عكسية للادعاء. مدى إمكانية قبول الفرض العدمي يتم إختبارها إما بإستخدام فترات الثقة أو بقيم P. إذا كانت القيمة التي يدعيها الفرض العدمي تقع داخل فترة الثقة فهذا يعني القبول بإدعاء الفرض العدمي والعكس صحيح. اسلوب القيمة P يقيس ألى أي مدى (بدلالة الإحتمالات) تكون بيانات العينة مدعمه أو مناقضه لادعاءالفرض العدمي. أيضا يمكن إختبار ادعاء الفرض العدمي برسم بيانات العينة بيانيا، وعلى أقل تقدير، فالأسلوب البياني يعطي مؤشر مبدئي عن مدى إمكانية قبول ادعاء الفرض العدمي.

المراجع : REFERENCES

1- W.E. Deming. *Out of the Crisis,* Cambridge, MA:MIT center for Advanced Engineering study, 1986.

2- R. Larsen and M.Marx. *Introduction to Mathematical statisistics*, 2nd ed. Englewood cliffs, NJ : prentice- Hall, 1985.

تمارين إضافية :

(٦-٥٣) صف تأثير حجم العينة على هامش خطأ المعاينة عند تقدير متوسط المجتمع بنقطة، وهل هامش خطأ المعاينة عند تقدير π بنقطة يعتمد على حجم العينة بنفس الطريقة ؟

(٦-٥٤) في دراسة عن عادات مشاهدي التليفزيون، قام مدير التليفزيون بمراقبة كل ما يشاهده عينة من 100 أسرة لمدة أسبوع، وكان هناك اهتمام خاص بنشرة الاخبار المحلية ومدتها 30 دقيقة. ملخص إحصاءات هذه الدراسة ما يلي: أن الشباب يقضي في المتوسط 90دقيقة كل أسبوع لمشاهدة نشرة الاخبار المحلية، وان الإنحراف المعياري 22 دقيقة اسبوعيا، وان 48% من كل الشباب اللذين شملتهم الدراسة شاهدوا نشرة الأخبار مرة واحده على الاقل.

(أ) حدد فترة الثقة 95% لمتوسط عدد الدقائق في كل اسبوع والتي تقضي في مشاهدة نشرة الاخبار المحلية.

(ب) حدد فترة الثقة 95% لنسبة من يشاهدوا الاخبار المحلية.

(٦-٥٥) مدير احدى شركات التأمين يرغب في أن يكون متمشيا مع الإتجاه الحديث المتعلق بتعويضات حوادث السيارات. في أحدث استقصاء عن 81 تعويض، كان متوسط حجم التعويضات 744 دولار بإنحراف معياري 585 دولار، كما أن 68% من الحوادث المسجلة شملت تعويضا عن اكثر من سيارة واحدة.

(أ) ما هو التقدير بنقطة لمتوسط حجم التعويضات التي يجب أن يدفعها المدير ؟

(ب) ما هو هامش خطأ المعاينة المقترن بهذا التقدير عند مستوى ثقة95%.

(ج) اوجد فترة الثقة 95% لنسبة التعويضات التي شملت اكثر من حادث سيارة واحد.

(د) ما هو حجم العينة اللازمة لتخفيض هامش خطأ المعاينة في (ج) إلى ±.05 ؟

(٦-٥٦) غالبا ما تستخدم إختبارات معجل الحياة لتقدير العمر المتوقع لمكونات كهربائية. هذه الإختبارات تشمل تعريض عينة من المكونات لدرجة حرارة شديدة، استخدام متكرر وغير عادي وأشياء أخرى. في أحد هذه الأختبارات والتي شملت 81مكون كهربائي، كان متوسط العمر 81 ساعة وانحراف معياري 15.2 ساعة. أوجد فترة الثقة99% لمتوسط عمر المكون الكهربائي.

(٦-٥٧) في إستقصاء حديث، طلب مدير الأذاعة من المستمعين أن يتحدثوا إليه تليفونياً ويحددوا ما اذا كانوا يرغبون في التحدث عن جريمة الرشوة المتهم فيها عضو مجلس المدينة. من بين110 مكالمة تمت في أول ساعة، طلب 77 منهم التحدث في ذلك.

(أ) أوجد فترة الثقة لنسبة المستمعين اللذين فضلوا التحدث في ذلك الموضوع.

(ب) صف المجتمع الذي يمكن أن تنطبق عليه فترة الثقة في (أ).

(٦-٥٨) صممت عملية انتاجية لكي تنتج سجائر تحتوي في المتوسط بما لا يزيد عن 3.5 ميليجرام قطران وبإنحراف معياري لا يزيد عن 0.2 ميليجرام قطران. كمية القطران التي وجدت في عينة عشوائية حديثة من 12 سيجارة كانت على النحو التالي:

4.18	3.36	4.09	4.10	3.65	3.77
3.55	3.60	3.44	4.16	3.83	3.75

(أ) ارسم هذه البيانات بيانياً. هل الشكل البياني يظهر أن متوسط كمية القطران أكبر من القيمة المدعى بها ؟

(ب) حدد إلى أي مدى تكون العينة الحالية دليلا على تناقض الادعاء بوجود 3.5 ميليجرام قطران في المتوسط مقابل كمية قطران أعلى من ذلك.

(ج) أجب عن نفس السؤال في (ب) ولكن بالنسبة للادعاء الخاص بالأنحراف المعياري.

(د) ما هو الشرط الضروري لكي تتحقق اجابتك في كل من (ب)، (جـ) ؟

(٦-٥٩) بدأ أحد المطاعم حديثا في استخدام عربة صغيرة تدفع باليد بين الزبائن ويحمل عليها بعض الحلويات. في أول عشر ليالي من استخدام العربة، وجد أن متوسط الانفاق على الحلويات في الليلة الواحدة 130دولار مقارنة بمتوسط انفاق 110 دولار قبل استخدام العربة وكان الانحراف المعياري لتلك الليالي العشرة هو 65 دولار.

(أ) هل من المبكر أن نستنتج أن استخدام العربة قد زاد في المتوسط من الانفاق على الحلويات؟ اجب عن السؤال بتحديد إحتمال أن يزيد متوسط العينة عن 130دولار، مفترضا أن متوسط العملية الجديدة هو فعلا نفس المتوسط قبل استخدام العربة.

(ب) يلاحظ أن الانحراف المعياري للعينة يشير إلى أن مبيعات الليالي العشر تختلف جوهريا فيما بينها. هل يمكنك أن تفكر في أسباب مثل هذه التقلبات الكبيرة ؟

(جـ) ما هي إجابتك عن (ب) المتعلقة بتأثير الانحراف المعياري في سياق استخدامك لتوزيع T؟

(٦-٦٠) يصر مدير الأنتاج على أن الأنتاج اليومي هو انتاج متناسق من يوم إلى آخر، وقد تبنى هذا المدير سياسة تجعل الانحراف المعياري للأنتاج اليومي لا يزيد عن 20 وحدة. في آخر 12يوم، سجل الأنتاج اليومي التالي:

1010	1085	1054	1099	1066	1033
1057	1022	1044	1008	1038	1075

(أ) عندما تعامل هذه البيانات على أنها عينة عشوائية، إلى أي مدى تكون بيانات العينة مؤيدة للأعتقاد بأن هناك زيادة في الأختلافات عن السياسة الموضوعه؟

(ب) ماهي الفروض المتعلقة بالمجتمع وبالعينة والمطلوبة للطريقة التي تستخدمها في (أ)؟ وهل تعتقد أنها أساسية وحاسمه. أشرح ذلك.

(٦-٦١) بالرجوع إلى التمرين (٦-٦٠). بفرض أن مدير الأنتاج تبنى أيضا سياسة بمقتضاها يكون متوسط الأنتاج اليومي يجب ألا يقل عن 1075 وحدة.

(أ) حدد إلى أي مدى تكون العينة الحالية تناقض الادعاء 1075 وحدة مقابل متوسط انتاج يومي أقل.

(ب) اجب عن نفس السؤال كما جاء في (ب) من التمرين (٦-٦٠). ثم حدد أي الفروض ربما تكون أقل أهمية.

(٦-٦٢) مصنع لانتاج الأغذية لديه ماكينة لتعبئة العلب بالفاصوليا. مطبوع على العلبة أنها تحتوى على 10 أوقيات، ولكن العبوة الفعلية يمكن أن تختلف إلى حد ما. في عينة عشوائية من 12 علبه، سجل لها الأوزان التالية بالأوقية:

9.78	9.90	9.67	9.68	10.06	10.02
9.61	10.08	9.77	10.03	10.17	9.82

من المعلومات التاريخية، يفترض أن عبوات العلب تتبع توزيع طبيعي.

(أ) ارسم بيانات العينة. هل الشكل البياني يظهر تغيراً في متوسط كمية التعبئة؟ وضح ذلك.

(ب) حدد فترة الثقة 90% لمتوسط التعبئة لهذه الماكينه.

(جـ) اعتماداً على اجابتك في (ب)، هل يجب على المنتج أن يكون قلقا بخصوص صدق ماهو مطبوع على العبوات؟ اشرح ذلك.

(د) حدد فترة الثقة 90% لتباين التعبئة لهذه الماكينة.

(هـ) اذا كان الانحراف المعياري المستهدف هو 0,2 أوقيه، استخدم اجابتك في (جـ) لتحديد ما اذا كان على المنتج أن يكون قلقا بخصوص اختلافات التعبئة اعتماداً على هذه العينة.

(٦-٦٣) منظمة صحية مهتمه بتحديث معلوماتها حول نسبة الرجال المدخنين. تأثيثاً علي دراسات سابقة، كانت النسبه حوالي 35%، قامت المنظمة بعمل دراسة شملت 1200 رجل تم

اختيارهم عشوائيا وسئلوا عما اذا كانوا يدخنون أم لا ، تبين أن منهم 372 مدخن.

(أ) حدد إلى أي مدى تكون بيانات العينة مناقضة للادعاء35% في مقابل نسبة أقل.

(ب) هل تعتقد أن اجابتك في (أ) من المحتمل أن تظل صالحه لعام واحد من الآن ؟ وضح ذلك في سياق هذا المثال الخاص.

(٦-٦٤) ماكينة تجمع منتج ما ليتم تغليفه بعد ذلك. من المهم رقابة الأختلافات في مخرجات عملية التجميع (أي عدد الوحدات المجمعة كل ساعة) لأن عملية التغليف تحتاج إلى عماله مكلفه. الاختلافات المستهدفه هي $\sigma = 10$ وحدة كل ساعة. في عينة عشوائية من أحدث 15 ساعة انتاج أظهرت فيها انحراف معياري 13.8 وحدة كل ساعة.

(أ) هل هذه العينة تظهر وبوضوح أن اختلافات التجميع فيها قد تجاوزت الحد المستهدف ؟ دعم اجابتك.

(ب) ما هي الفروض المتعلقة بالمجتمع وبعملية المعاينة والتي يتطلبها تحليلك في (أ) ؟

(٦-٦٥) مصلحة الضرائب بإحدى الولايات، دائما ما تفحص ملفات عملائها الأساسين بصفه منتظمة. أحد المنتجين الكبار سجل في اقراره أن متوسط المبلغ الخاضع للضريبة عن مشترواته في كل فاتورة هو 288 دولار. مجموعه المراجعين بالمصلحة سحبت عينة عشوائية من 200 فاتورة، فوجدت أن متوسط المبلغ الخاضع للضريبة هو 309 دولار بأنحراف معياري 210 دولار.

(أ)حدد إلى أي مدى تناقض بيانات العينة ادعاء المنتج في مقابل مبلغ أكبر مما جاء في التقرير.

(ب) هل يمكنك رفض الفرض العدمي المتعلق بهذا الادعاء مستخدما فترة الثقة95% لمتوسط المبلغ الخاضع للضريبة ؟ أشرح ذلك.

(٦-٦٦) افترض أنه في عينة عشوائية من 50 طفل، تم ولادتهم عن طريق التلقيح الصناعي، أن بينهم 35 بنت.

(أ) هل هذه العينة تظهر وبوضوح أن عملية التلقيح الصناعي تميل إلى أعطاء إناث اكثر من الذكور ؟ وضح ذلك.

(ب) هل التوزيع الطبيعي الذي استخدمته لتجيب عن (أ) متحققا؟ أشرح ذلك ؟

(٦-٦٧) فيما يلي 20 عينة متتابعة، كل عينه تتكون من خمس مشاهدات من عملية انتاجية تنتج نوع معين من قاعدة ارتكاز دائرية لأحد أنواع الكراسي. المشاهدات تمثل القطر الخارجي لهذه القواعد الدائرية بالسنتيمتر. يعتقد أن العملية الانتاجية مستقرة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قطر4 سنتيمتر وانحراف معياري 0.02 سنتيمتر.

(أ) عند كل عينه، حدد فترة الثقة 95% لمتوسط القطر. ارسم الفترات للعينات العشرين كما في شكل (٦-٦). هل يمكنك اكتشاف أي شئ غير عادي؟ وضح ذلك.

(ب) ارسم خريطة التتبع البياني لمتوسط قطر القواعد الدائرية مستخدما 20عينة. هل يمكنك اكتشاف العوامل السببية للأختلاف ؟ اشرح ذلك.

(جـ) لكل عينة، حدد فترة الثقة95% لتباين الأقطار، ثم ارسم الفترات كما في شكل (٦-٦). هل يمكنك اكتشاف أي شئ غير عادي ؟ وضح ذلك.

1	2	3	4	5	6	7
4.00258	3.97996	4.02209	4.02989	3.98236	3.98849	4.02171
4.02584	3.95092	3.98708	4.01681	3.98255	4.02762	3.99723
3.98991	4.00480	4.05705	3.97959	4.02488	3.99876	4.00329
4.03457	4.05146	3.97456	3.98889	4.03544	3.98490	4.01103
3.97417	3.99159	3.98445	3.98674	3.99274	4.03967	4.00937

8	9	10	11	12	13	14
3.98672	3.98115	4.01446	4.02711	3.97749	3.99577	4.02203
4.02332	4.00576	3.99356	3.98199	4.02680	3.99339	3.98947
3.97479	3.99987	4.02164	4.02385	4.00468	4.02272	3.99834
4.00428	3.98316	3.98464	4.02527	3.99437	4.00683	4.04176
3.99450	3.98258	3.97290	4.02164	4.00535	3.97484	3.98683

15	16	17	18	19	20
4.03814	3.98455	3.99278	3.99447	3.94688	3.98233
3.99283	4.00182	3.99118	3.97239	4.01361	3.98535
4.00888	3.93662	4.00199	3.95850	4.02924	4.00453
4.00598	3.98415	3.96247	3.98334	3.95708	4.01545
4.00303	3.96441	4.00644	4.01080	3.95272	3.98772

ملحق ٦ : Appendix - 6

أوامر الحاسب الآلي عند إستخدام برنامج ميني تاب :

سنستخدم الأمثلة (٦-١٠)، (٦-١١) لتوضيح أوامر برنامج ميني تاب التي أعطت مخرجات الكمبيوتر الموضحة في نهاية الجزء (٦-٤). للحصول على الأشكال (٦-٩)، (٦-١٠)، نستخدم تعليمات ميني تاب لتكوين خرائط التتبع البياني كما هي موضحة عند مناقشة ميني تاب في أخر الفصل الأول.

للحصول علي مخرجات ميني تاب للمثال (٦-١٠) كنت تحتاج إلى تتبع خطوتين أساسيتين: (1) استخدم الأمر SET لإدخال البيانات. (2) إستخدام الأمر TTEST لأختبار الفرض: $H_o : \mu = 10$ مقابل الفرض $H_a : \mu \neq 10$. الأوامر التالية تعطي مخرجات ميني تاب للمثال (٦-١٠)، حيث يلاحظ في الأمر TTEST أن"10" هي قيمة μ التي يدعيها الفرض العدمي.

```
MTB  >  Name C1 = "time"
MtB  >  Set    C1
DATA >  9.8   10.4   10.6   9.6    9.7    9.9   10.4    9.8   9.6    10.5
DATA >  10.2  10.3    9.6   9.9   11.2   10.6    9.8   10.5  10.1     9.7
DATA >  end
MTB  >  ttest   10   C1
```

نفس الخطوات تتبع بالنسبة للمثال (٦-١١) مع استثناء واحد. بسبب أن الفرض البديل في اتجاه واحد، فإننا نستخدم الأمر الفرعي ليشير إلي اتجاه H_a . عندما يكون الفرض البديل على الصورة "أكبر من"، يكتب الأمر الفرعي على الصورة التالية: ALTERNATIVE = 1 وعندما يكون على الصورة "أقل من"، يكتب الأمر الفرعي على الصورة : ALTERNATIVE = -1 اذا رغبنا في تحديد فترة الثقة 95% للمتوسط μ، فإننا نستخدم الأمر TINTERVAL يليها عمود يحتوي على البيانات. اذا رغبت في فترات ثقة عند مستويات أخرى، فإننا نشير إليها على يمين كلمة TINTERVAL. الأوامر التالية تعطي مخرجات ميني تاب للمثال (٦-١١).

```
MTB  > Name  C1 = "Strength"
MTB  > Set   C1
DATA > 502  496  510  508  506  498  512  497  515   503   510   506
DATA > end
MTB  > ttest     500   C1 ;
SUBC > alternative = 1.
MTB > tinterval      C1
```

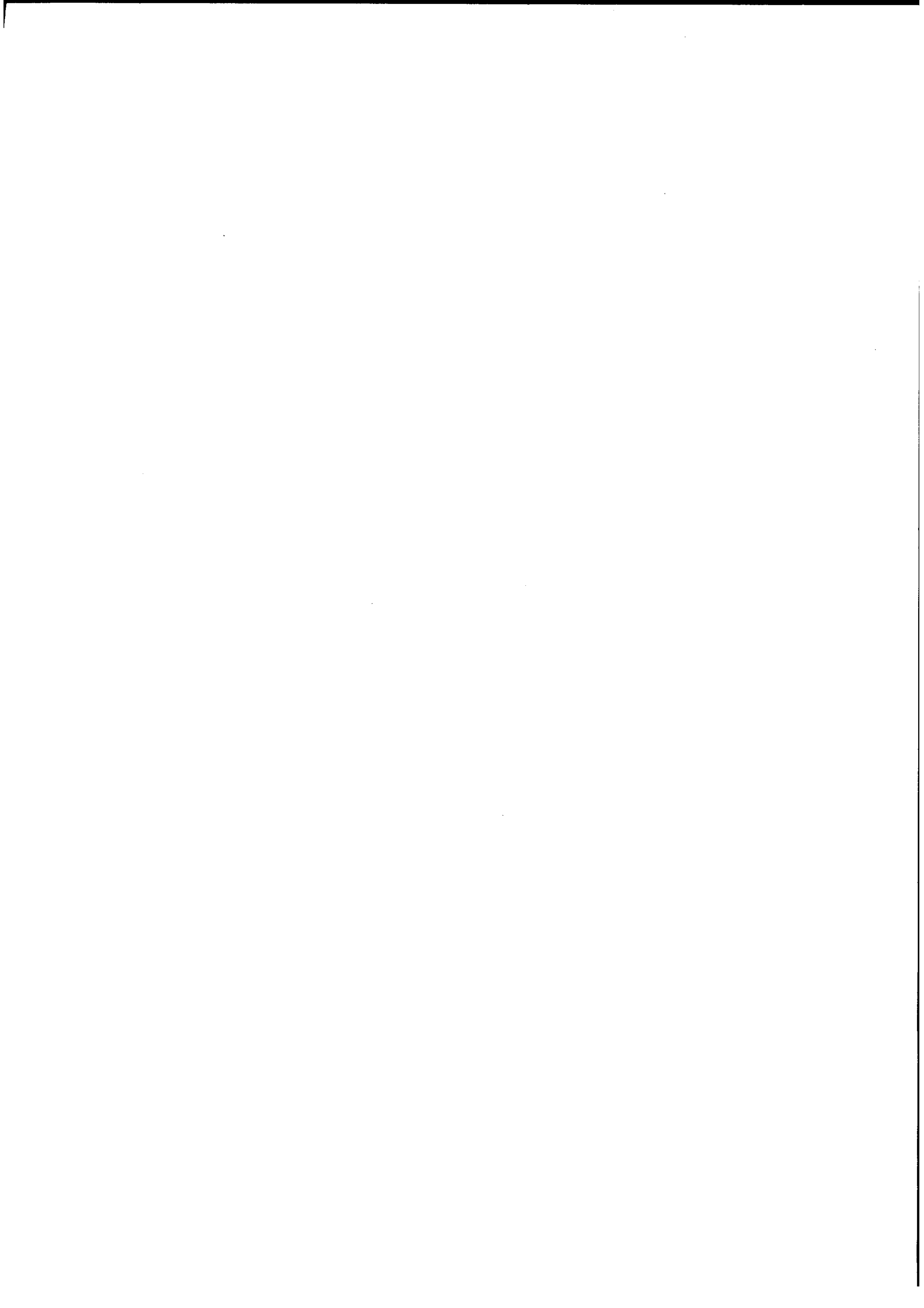
يجب أن تعرف أنه اذا كان الانحراف المعياري للعملية (المجتمع) σ معلوما، فإننا نستخدم الأوامر ZINTERVAL & ZTEST بدلا من الأوامر TINTERVAL & TTEST.

الفصل السابع

الإستنتاج الإحصائي المتعلق بمجتمعين

STATISTICAL INFERENCES FOR TWO POPULATIONS OR PROCESSES

محتويات الفصل:



الفصل السابع

الإستنتاج الإحصائي المتعلق بمجتمعين

STATISTICAL INFERENCES FOR TWO POPULATIONS OR PROCESSES

(٧-١) نظرة عامة على محتويات الفصل Bridging to New Topics

في هذا الفصل نعرض لطرق الإستنتاج الأحصائي، عند مقارنة معالم مجتمعين أو عمليتين اخذا في الإعتبار المتوسطات، النسب، التباينات. مثل هذه المقارنات من الممكن ان تحدث بصورة أكثر شيوعا عن المشاكل التي تظهر في مجتمع واحد. من أمثلة ذلك، الدراسات التي تحاول تحديد ما إذا كان متوسط الاجور للرجال أعلى من متوسط الأجور للنساء المشتعلين في نفس النشاط، مقارنة الطلب على منتج جديد مع الطلب على منتج قديم، مقارنة جودة مواد خام من مصدرين مختلفين، ومقارنة معدلات البطالة في منطقتين جغرافيتين. نضف إلى ذلك، مقارنة المتوسطات قبل وبعد حالات أو مواقف معينة، فمثلا، قد نقارن مستوى المبيعات قبل وبعد حملة تسويقية بهدف تقييم مدى فاعلية هذه الحملة،

احصائيا، الطرق التي نستخدمها في هذا الفصل، هي امتداد مباشر لتلك الطرق التي تناولناها في الفصلين الخامس والسادس. وفي الواقع، فإن المبادئ في الحالتين واحدة، بمعنى، اننا في البداية نحدد المعالم التي ستقارن، بعد ذلك نسعى لحل المشكلتين الأساسيتين التي تعرضنا لهما في الجزء (٥-٤) : تحديد أفضل احصاء للمقارنة المطلوبة ثم تحديد توزيع المعاينة لهذا الأحصاء.

نتيجة هذا أنه بمجرد أن نحدد أفضل احصاء للمقارنة بين متوسطين أو نسبتين، فإن توزيع المعاينة الناتج، إما أن يكون التوزيع الطبيعي المعياري أو توزيعT. من ناحية أخرى، مقارنة تباينين يقتضي التعرض لتوزيع معاينة جديد يسمى بتوزيع F ، **F-distribution**. الحرف F إشارة إلى اسم العالم فيشر الذي قدم هذا التوزيع.

وهناك أمثلة عديدة أخرى تظهر فيها الحاجة للمقارنة بين أكثر من مجتمعين أو عمليتين مستقرتين اخذا في الإعتبار أهم المعالم. فمثلا، قد نرغب في مقارنة متوسطات حجم المبيعات الشهرية في خمسة أقاليم. هنا تعامل الأقاليم الخمسة على أنها مجتمعات منفصلة. طرق المقارنة المستخده لأكثر من مجتمعين اخذا في الإعتبار متوسطاتها قدمت في الفصل الثامن.

الرابطة المشتركة بين الطرق المستخدمة في هذا الفصل وتلك التي استخدمت في الفصلين الثامن والثالث عشر، هو الأسلوب الذي يستخدم في الحصول على بيانات العينة المناسبة. في الحقيقة، وكما نوهنا في الفصل الأول إلى أن طريقة تجميع البيانات هي أهم مرحلة في أي دراسة احصائية. لذا سنبدأ هذا الفصل بهذه القضية. مناقشة هذه القضية سيؤدي إلى ثلاث مبادئ أساسية عند مقارنة معالم مجتمعين أو أكثر.

(٧-٢) خطط المقارنة بين متوسطين: Planning A Comparison of Two Means

نفرض أن مدير خدمة التقييم أو التسعير رغب في مقارنة مثمنين كل منهما عمل في هذا المجال لمدة عام. اراد المدير أن يعرف ما إذا كان هناك اختلاف في متوسط التثمين لكل منهما، على فرض أن كل العوامل الأخرى ثابتة. عزم المدير على تسجيل بعض البيانات (التثمين الفعلي لهم لبعض الأصول) لمقارنة متوسطات التثمين في المجتمعين μ_2, μ_1 اعتمادا على بيانات التثمين لكلا المثمنين. ما هي الخطة المناسبة للحصول على بيانات عينة في مثل هذه الحالة ؟ قبل متابعة القراءة، خذ دقائق وفكر كيف يمكنك أداء ذلك.

سوف نتناول خطتين أساسيتين متاحتين لهذا الغرض هما:

العينات المستقلة **Independent Samples** والعينات ذات القراءات المزدوجة **Paired Samples**.

(٧-٢-١) العينات المستقلة: تصميم تجربة: The Independent Samples

في تصميم العينات المستقلة، نختار عينة من الأصول المتشابهة وتقسم إلى مجموعتين. كل مجموعة يتم تثمينها أو تسعيرها من قبل شخص واحد ويؤدي عمله مستقلا عن الآخر. يراعي أن هذه الأصول تحدد لكل مثمن بطريقة عشوائية وفي هذا تأكيد على عدم وجود تحيز لأي مثمن. نفرض أننا حددنا عينة من عشر أصول متشابهة، هنا نخصص خمس أصول عشوائياً لكل واحد منهم ليتم تقييمها. هنا نعتبر المثمنين على أنهما مجتمعين منفصلين، من المجتمع الأول سحبت عينة عشوائية تمثل تثمين خمس أصول معينة ومن المجتمع الثاني سحبت عينة عشوائية تمثل تثمين خمس أصول أخرى. وبلغة تصميم التجارب التي قدمت في الفصل الأول، المثمن هو العامل الذي نهتم به، حيث أننا نقارن أثنين من المثمنين، فهذا العامل له مستويان والأصول العشر هي الوحدات التجريبية. ولذلك قيمة التثمين لأصل ما هي متغير الإستجابة. نفرض أن الأصول ارقام 4 ,10 ,1 ,8 ,5 خصصت عشوائيا للمثمن الاول وباقي الأصول كانت للمثمن الثاني، وان نتائج بيانات العينة ظهرت على الصورة التالية:

العينة1		العينة2	
رقم الأصل	المثمن1	رقم الأصل	المثمن 2
4	x	7	x
10	x	2	x
1	x	9	x
8	x	6	x
5	x	3	x
	$\bar{X}_1$		$\bar{X}_2$

حيث:

x = قيمة تثمين الأصل

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ = الفرق بين متوسط تثمين المثمن الاول والمثمن الثاني.

الفكرة في العينات المستقلة هو إختيار أصول متشابهة ثم توزع عشوائيا على كل مثمن. بعض

الفروق بين قيم متوسط التثمين في العينتين متوقعا بسبب إختلاف المعاينة العشوائية ومع ذلك، اذا كان متوسط التثمين للمثمن الأول والمثمن الثاني مختلفا بدرجة كافية، فيمكنا ان نستنتج ان المثمنين يختلفان حقيقة عن بعضهما.

(٧-٢-٢) العينات ذات القراءات المزدوجة: تصميم تجربة: The Paired Samples

في تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة، نحدد عينة من الأصول، عينة الأصول هذه قد تكون متشابهة وقد تكون مختلفة تماما. كل مثمن عليه تثمين كل الأصول التي أختيرت. ينتج عن هذا سلسلة مقارنات من التثمين لكل واحد منهم. نفرض أننا حددنا عينة (n=5) أصول. بيانات العينة ظهرت على الصورة التالية:

الأصل	المثمن 1	المثمن 2	الفرق
1	x	x	d
2	x	x	d
3	x	x	d
4	x	x	d
5	x	x	d
	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$

حيث :

x= قيمة تثمين الأصل

d= الفرق بين المثمنين للأصل الواحد

$\overline{D}$ = متوسط الفروق = $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$

الفكرة في العينات ذات القراءات المزدوجة هو تسجيل الفروق بين المثمنين ، أصل بأصل. وهذا من شأنه أن يستبعد اي غموض أو عدم وضوح في التحليل يرجع إلي الفروق الموجودة بين الأصول. وبلغة تصميم التجارب، قيمة الأصل هي المتغير الأساسي الذي يتم التحكم في تأثيره عن طريق القطاعات. وهكذا فإن التحليل ينصب على فروق التثمين الخمسة. فإذا كانت كلها أكبر من الصفر أو أصغر من الصفر . فإننا نستنتج أن كلا المثمنين ليسوا متشابهان في عملية التثمين.

(٧-٢-٣) مقارنة تصميم العينتين: Comparing the Two Sampling Designs

كل نوع من خطتي المعاينة سليم وكثيرا ما يستخدم، لكن أيهما الأفضل ؟ عمليا، الطريقة المفضلة هي العينات ذات القراءات المزدوجة إذا كان ذلك ممكنا. الهدف الرئيسي من هذه المناقشة موجه لك كي تفهم السبب في أفضلية العينات ذات القراءات المزدوجة على العينات المستقلة. لنفرض أن متوسط قيمة التثمين للمثمن الأول هي $\overline{X}_1$ =\$100,000 وللمثمن الثاني$\overline{X}_2$=\$90,000 . لأي خطة معاينة تكون الفكرة الأساسية في التحليل هو أن نطرح السؤال التالي: هل الفرق المشاهد \$10,000 بين $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ هو نتيجة اختلافات بين المعاينة العشوائية ؟ بمعنى أنه يجب ان نأخذ في الإعتبار إمكانية أن الإختلافات بين قيم الأصول قد تكون اختلافات كبيرة بدرجة كافية حتى أن التخصيص العشوائي للأصول على

المثمنين يمكن أن يتسبب في هذا الفرق الكبير عندما لا توجد فروق بين المثمنين أنفسهم. اذا لم نتمكن من ذلك ، فإنه يمكن أن نستنتج بثقة أن متوسطات المثمنين مختلفة إختلافا حقيقيا. يلاحظ أن هذه الفلسفة تتطابق مع تلك التي استخدمت في إختبارات الفروض لمتوسط واحد في الفصل السادس.

مدخل لتحليل العينات المستقلة:

في سياق السؤال المطروح ، دعنا نفحص اسلوب العينات المستقلة. الفرق المشاهد 10,000 دولار بين $\overline{X}_2, \overline{X}_1$ يمكن أن يكون راجعا إلى حد ما إلى أحد السببين التاليين أو إلى كلاهما:(1) فرقا بين μ_2, μ_1. (2) الإختلافات بين متوسطات العينات $\overline{X}_2, \overline{X}_1$ تعكس اختلافات الأصول التي وزعت عشوائيا (خطأ المعاينة). دعنا نتناول بمزيد من الدقة إختلافات المعاينة العشوائية في كل من $\overline{X}_2, \overline{X}_1$. انت تعلم من البند (٥-٥) بالفصل الخامس ، أن الإختلافات في متوسط العينة يقاس بالخطأ المعياري حيث $SE(\overline{X}) = \sigma / \sqrt{n}$ [الصيغة (5.2)]، بالتالي فإن الإختلافات في متوسط العينة يعتمد على كل من σ (والذي يصف اختلافات عملية التسعير لكل مثمن على حدة) وعلى n (حجم العينة). والآن نتناول العوامل الأخرى المسببة للأختلاف بين التسعير لكل مثمن. يمكننا الآن أن نفكر في عاملين:

1- اختلاف الأصول :

ببساطة، يتغير التسعير بسبب تغير قيم الأصول.

2- تنافر وتناقض أو عدم تناسق التسعير:

لا يوجد شخص يكون ثابتا تماما في حكمه على العديد من العوامل المختلفة. ربما يكون المثمن في حالة اعياء أو مرض في يوم معين أو ربما يكون الطقس منعشا أو غير ذلك ، وكلها عوامل تغير من حكم المثمن. وعلى ذلك ، فتسعير الأصول ممكن أن يختلف شيئا ما بسبب تنافر وتضارب أو عدم تناغم المثمن مع نفسه.

وكنتيجة لذلك ، نجد أن الأختلاف بين متوسط المثمنين وهو 10,000 دولار قد يرجع إلى ثلاث أسباب (1) أختلافا بين μ_2, μ_1 . (2) اختلافا بين قيم الأصول (3) عدم اتساق تقديرات المثمن. آخر عاملين ، اختلاف الأصول وعدم اتساق المثمن ، كلاهما يعرفا بالتأثيرات العشوائية **random effects**. تأثير اختلاف الأصول هو تأثير عشوائي ، لأننا نوزع هذه الأصول على المثمنين عشوائيا. كما يبدو أنه من المعقول والمقبول أن نفترض ان تأثير اتساق المثمن في عملية التسعير تحدث في نمط عشوائي ، لذلك فإن كلا العاملين يساهما في اختلافات المعاينة العشوائية.

مدخل لتحليل العينات ذات القراءات المزدوجة :

دعنا نعود الآن إلي تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة. كما سبق أن بينا ، فإن الأسباب المكنة للفرق المشاهد وهو10,000 دولار بين متوسطات العينتين هي: (1)اختلاف بين μ_1, μ_2 (2) اختلاف بسبب المعاينة العشوائية. دعنا الآن نعيد نتناول العوامل المسببة لاختلاف المعاينة العشوائية.

1- اختلاف الأصول:

على الرغم من تفاوت قيم الأصول ، فإن كلا المثمنين يقيما نفس المجموعة من الأصول. حيث أننا نحلل الفرق بين تسعير الأصول لكل أصل على حدة ، فإن هذه المقارنات لا تتأثر بالفروق بين قيم

الأصول نفسها. إزدواج القراءات في قطاعات يوضح أثر الفروق بين الأصول. لذلك فإن اختلاف الأصول يكون قد تم حذفه بوصفه أنه كان التفسير الممكن للفرق المشاهد بين $\overline{X}_1, \overline{X}_2$.

2- تفاوت وتضارب أو عدم اتساق عملية التسعير :

كما وضحنا من قبل، فإن العوامل العشوائية قد تتسبب في أن تكون عمليات التسعير متضاربة ومتفاوتة ومن ثم تسبب فروقاً في عمليات التسعير لنفس الثمن.

ميزة العينات ذات القراءات المزدوجة هي البساطة. بمجرد الحصول على تسعير الأصول في صورة قراءات مزدوجة وتحديد الفروق بينها، نكون قد حذفنا اختلافات الأصول بوصفها التفسير المحتمل للفرق المشاهد بين متوسطي العينتين . وهذا يخفض من اختلافات المعاينة العشوائية وكنتيجة لذلك يقل ارجاع الفرق المشاهد بين متوسطي العينتين للعوامل العشوائية. لذلك، إذا استخدم تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة، فإن الفرق المشاهد بين متوسطي العينتين يمكن اعتباره مؤشرا للفرق بين المحكمين أكثر مما لو كنا استخدمنا العينات المستقلة.

اعتبارات التصميم التي ناقشناها في مشكلة التسعير لخصت على النحو التالي:

مقارنة بين العينات المستقلة والعينات ذات القراءات المزدوجة في مشكلة التسعير

الأسباب المحتملة لمشاهدة اختلافا بين متوسطات العينات

عينات مستقلة	عينات القراءات المزدوجة
1- اختلافات المحكمين	1- اختلافات المحكمين
2- اختلافات المعاينة العشوائية	2-اختلافات المعاينة العشوائية
-اختلافات الأصول	- لا يوجد تأثير لاختلافات الأصول
- عدم اتساق المحكمين	- عدم اتساق المحكمين

(٧-٢-٤) المبادئ الأساسية في تصميم التجارب:

The Fundamental Principles of Designed Experiments

الإعتبارات السابقة في مشكلة التسعير توحي ببعض المبادئ الأساسية في تصميم التجارب والتي ذكرناها لأول مرة في الفصل الأول. المبدأ العام في أي تصميم احصائي هو ان نحصل على بيانات عينة بطريقة ما بحيث تصغر الإختلافات العشوائية، وذلك بالتحكم قدر المستطاع في العوامل التي يمكن معرفتها والمسببة للإختلافات، (مثلا: اختلاف الأصول). لتنفيذ هذا المبدأ العام، فإننا نسترشد بثلاث مبادئ محددة:

1- التعشية : **Randomization**

وحدات المعاينة (الأصول) التي يمكن أن تشاهد، توزع عشوائيا على كل مستوى من مستويات العامل موضوع الدراسة. (وعلى ذلك ، فإن الأصول توزع عشوائيا على المحكمين). يضاف إلى

ذلك، فإن كل العوامل الأخرى المسببة للإختلافات والتي يمكن أن تؤثر في متغير الإستجابة يمكن توزيعها عشوائيا. هذا يؤكد أنه لايوجد تفضيل لعامل على الآخر.

2- القطاعات: Blocking

المتغيرات الخفية أو الخلفية (مثل الأصول) التي يمكن ان تساهم بصورة جوهرية في اختلافات متغير الإستجابة، يجب وضعها في قطاعات عندما يكون ذلك ممكنا. هذا من شأنه أن يعزل تأثير تلك المتغيرات وبتلك الوسيلة تنخفض الإختلافات العشوائية.

3- التكرار: Replication

الإختلاف العشوائي يمكن تقييمه عن طريق تكرار المشاهدة لمتغير الإستجابة عند كل مستوى من مستويات العامل تحت التجربة (داخل كل قطاع إذا استخدمت القطاعات). بقياس الفروق المشاهدة بين المشاهدات المتكررة في ظل ظروف تجريبية ثابتة، يمكننا تقدير حجم الإختلافات العشوائية في البيانات.

مثال (٧-١)

يرغب أحد التجار في إختبار فاعلية عرضين قدما له. يخطط التاجر لتجربة هذه العروض في 28 متجرا تختلف كثيرا في مبيعاتها. إختار التاجر عشوائيا 14 متجرا لتجربة العرض الأول وجرب العرض الثاني في المتاجر الباقية. التحليل الذي يقوم به التاجر مبني على مقارنة متوسط مبيعات تلك العينتين المستقلتين.

(أ) هل يمكنك أن تقترح معاينة أكثر فاعلية ؟

(ب) وضح لماذا تكون فكرتك هي الأفضل.

الحل

(أ) حيث أن المتاجر تختلف بشدة فيما بينها في حجم المبيعات، فإن متوسطات العينات يمكن ان تختلف بصورة جوهرية بسبب التخصيص أو التوزيع العشوائي للمتاجر. وهكذا فإن مستوى المبيعات التاريخي (القديم) يكون أهم عامل أساسي سوف يساهم جوهريا في إختلافات متغير الإستجابة. تأثير اختلاف المتاجر يمكن حذفه بإزدواج المتاجر وفقا لمستويات مبيعاتهم التاريخية. بفرض أن المتجرين B,A هما الأعلى مستوى في المبيعات تاريخيا. أحد العروض يختار عشوائيا ويستخدم في المتجر A والعرض الآخر يستخدم في المتجر B. المتجران الأخران التاليان في مستوى المبيعات تاريخيا يتم ازدواجهم وذلك بتوزيع العروض عليهم مرة اخرى بطريقة عشوائية. باستمرار هذا الأسلوب، فإن التاجر يوزع العروض على المتاجر الـ28. هذا هو تصميم العينات ذات القراءات المزدوجة.

(ب) بوضع المتاجر ذات احجام مبيعات متماثلة في صورة ازدواج، فإننا أساسا نعزل وبصورة جوهرية حجم الإختلافات الناتجة من اختلافات مستويات المبيعات التاريخية. وهكذا فإن أي فروق مشاهدة بين متوسطات العينات لا يمكن ان تكون راجعة للإختلافات بين مستويات المبيعات التاريخية للمتاجر وإنما ترجع حقيقة للفروق بين تأثيرات العروض المقدمة للتاجر.

مثال (٧-٢)

مدير تسويق في شركة هاندلي يعتقد أن متوسط الدخل لعملائه أعلى من متوسط الدخل لعملاء شركة منافسة له. يرغب المدير في بحث ذلك عن طريق اجراء احد بحوث السوق. هل خطة المعاينة المعتمدة على المقارنات المزدوجة ممكنة لهذه المشكلة ؟ اشرح رأيك في ذلك.

الحل

هناك العديد من الأمثلة التي لا يمكن استخدام القطاعات فيها وهذه واحدة منهم. في هذا المثال لا توجد وسيلة ملائمة أو طبيعية لتسجيل بيانات العينة في قراءات مزدوجة. البديل هو أن يستخدم مدخل العينات المستقلة وذلك بسحب عينات عشوائية مستقلة من عملاء هاندلي ومن عملاء الشركة المنافسة له.

تمارين :

(٧-١) ما هي الميزة التي تحققها من تسجيل البيانات في صورة قراءات مزدوجة بدلا من عينات مستقلة؟

(٧-٢) صف الوضع الذي لا يمكن فيه استخدام تصميم معاينة القراءات المزدوجة.

(٧-٣) وضح كيف تؤثر مكونات تصميم التجارب التالية على دقة التحليل الإحصائي:

أ- التعشية.

ب- القطاعات.

جـ- المكرارات (أو التكرار)

(٧-٤) في منهج العينات العشوائية المستقلة، إلى أي مدى نعذو اختلاف بيانات العينات إلى الإختلاف داخل كل عينة ؟ هل يجب أن نستخدم اسلوب العينات المستقلة لو كنا نشك في ان الإختلافات الجوهرية في البيانات داخل العينة يكون سببها بعض عوامل غير محددة أو غير معروفة؟ وما الذي يجب أن نفعله في هذه الحالة ؟ وضح ذلك.

(٧-٥) ترغب مصلحة البريد في تنفيذ تجربة تساعدها في الإختيار بين خدمة البطاقات البريدية وخدمة توصيل البريد باليد مع مخصوص، وكان تصميم التجربة على النحو التالي: تم تحديد عشرين منطقة متباعدة المسافات عن بعضها. سوف ترسل طرود بريدية إلى عشر مناطق تم اختيارها عشوائيا وذلك بإستخدام خدمة البطاقات البريدية الأولى. طرود مماثلة سوف ترسل للمناطق العشر الأخرى بإستخدام خدمة التوصيل باليد مع مخصوص. أزمنة التوصيل للطرود العشرين سوف تسجل. متوسط زمن التوصيل بخدمة البطاقات البريدية سوف يقارن مع متوسط زمن التوصيل بخدمة التوصيل باليد مع مخصوص.

(أ) هل يمكنك اقتراح خطة افضل ؟

(ب)وضح كيف تكون خطتك هي الخطة الأكثر تحسنا ؟

(٧-٦) مشرف صحي بأحد النقابات يرغب في تنفيذ تجربة لتحديد متوسط درجة التحسن في اداء الرئة لوظائفها وذلك على مجموعة من المشاركين في برنامج للتدريبات الرياضية. أعضاء هذه التجربة هم مجموعة لم تمارس من قبل التدريبات الرياضية بإنتظام، وسوف يشاركوا في

برنامج رياضي تم الإشراف عليه لمدة ثلاث شهور. صف كيف يمكنك تصميم هذه التجربة.

(أ) ما هو المتغير الذي يجب أن تسجله لكل شخص في هذه التجربة.

(ب) بأي طريقة أو بأي طرق يمكنك أن تستخدم القطاعات (أي القراءات المزدوجة) ؟

(جـ) لماذا تعد القطاعات مفيدة ؟ اجب عن كل نوع من القطاعات التي ذكرتها في (ب).

(د) اسرد العوامل التي تعتقد انها يمكن أن تشارك في الإختلافات العشوائية في التجربة.

(٧-٧) مدير اعلان في شركة ما يفاضل ما بين توقيتين للإعلان في التليفزيون، ليشترى احدهما ليعرض اعلان تجاري عن شركته. لكي يختار أحدهما، يرغب في تنفيذ مقارنة إحصائية بين متوسطين ليرى ما إذا كانت أعمار المشاهدين للإعلان تختلف في المتوسط. ما هي خطة المعاينة المناسبة أو الأفضل هنا: العينات المستقلة أم عينات القراءات المزدوجة ؟ وضح ذلك.

(٧-٣) الاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطين اعتماداً على عينات مستقلة :

Statistical Inferences For Two Means Based on Independent Samples

نفرض أننا نرغب في مقارنة متوسطي مجتمعين أو عمليتين مستقرتين. سنرمز للمتوسطات بالرموز μ_2, μ_1 والانحرافات المعيارية للمجتمعات بالرموز σ_1 ، σ_2 ، وبعد بحث دقيق ومتأني لتحديد أي خطة معاينة سنستخدم، قررنا أن القطاعات غير ممكنة وانتهينا إلى سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين أحجامهما n_2, n_1 من ذلك المجتمعين. في التطبيق العملي، غالبا ما يكون الهدف هو تحديد ما إذا كان من الممكن اعتبار متوسطات تلك المجتمعات (أو العمليات) متساوية أم لا. في هذه الحالة يكون من المناسب رياضيا أن نعتبر الفرق بين μ_2, μ_1 أي $\mu_1 - \mu_2$ على أنه المعلمه محل الاهتمام، فإذا كان الفرق بين μ_2, μ_1 يساوي صفر فإن متوسطي المجتمعين μ_2, μ_1 يكونا متساويان.

حيث أن $\bar{X}_1$ هي أفضل إحصاء يستخدم للأستنتاج حول μ_1، وأن $\bar{X}_2$ هي أفضل إحصاء للأستنتاج حول μ_2، فيجب ألا نندهش إذا وجدت أن أفضل إحصاء للاستنتاج حول $\mu_1 - \mu_2$ هو $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. هل من الصواب اعتبار $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ وكأنه إحصاء ؟ بالطبع إنه كذلك أي $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو إحصاء، لأنه فرق بين إحصائين، بمعنى أن أي عينتين عشوائيتين تعطي القيم $\bar{X}_2, \bar{X}_1$ فهما بالتالي يعطيا القيمة $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. وحيث أن هذا الفرق إحصاء ناتج من معاينة عشوائية، فإن $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يكون له توزيع معاينة بمتوسط محدد وخطأ معياري محدد. حقيقة أن $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو أفضل إحصاء لعمل استدلال حول $\mu_1 - \mu_2$ يؤكد أن $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو إحصاء غير متحيز وله أصغر خطأ معياري عن أي إحصاء آخر غير متحيز للمعلمه $\mu_1 - \mu_2$ (أنظر الجزء (٥-٤) إذا رغبت في مراجعة هذا المفهوم).

في هذا الفصل نستعرض الخطوات التي تستخدم لتحديد فترات الثقة واختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بـ $\mu_1 - \mu_2$ اعتمادا على $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. الأسلوب المستخدم هنا مشابه تماما الأسلوب المستخدم في الجزء (٦-٤)، وقبل أن تتابع القراءة ربما ترغب في مراجعة ذلك الفصل بالإضافة إلى الجزء (٥-٥).

(٧-٣-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$: The Mean and Standard Error of $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

من الممكن تحديد المتوسط والخطأ المعياري للفرق $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ بدون أن نعرف التوزيع الخاص بالمجتمعين. ذلك التحديد نصل إليه بأسلوب مشابه في حالة مجتمع واحد والذي نوقش في

الجزء (٥-٥) . القيمة المتوقعة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ليست بغريبة علينا، فنحن نعلم من الصيغة (3.20) في الفصل(٣-٩) أن القيمة المتوقعة للفرق بين متغيرين عشوائيين هي الفرق بين توقعيهما. وحيث أن: $E(\overline{X}_1) = \mu_1, E(\overline{X}_2) = \mu_2$ فإن :

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 \qquad (7.1)$$

والصيغة (7.1) تؤكد لنا أن الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو بالفعل مقدر غير متحيز لـ $\mu_1 - \mu_2$.

لتقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$، يلزمنا في البداية تحديد تباينة. نعلم من الصيغة(3.21) في الفصل(٣-٩) أنه إذا كان المتغيرين العشوائيين مستقلين، فإن تباين الفرق بينهما يساوي مجموع تبايناتهما. هذه القاعدة تنطبق هنا لأننا سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتين. وحيث أن:

$$\text{Var}(\overline{X}_2) = \sigma_2^2 / n_2 \ , \ \ \text{Var}(\overline{X}_1) = \sigma_1^2 / n_1$$

$$\therefore \ \text{Var} \ (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \text{Var}(\overline{X}_1) + \text{Var}(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \qquad (7.2)$$

والخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو الجذر التربيعي:

$$\text{SE}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (7.3)$$

المعنى العام للصيغ(7.1) ,(7.3) هونفسه كالمعنى الذي ذكر في البند (٥-٥-١) في حالة مجتمع واحد. إذا استطعنا سرد قائمة بكل العينات العشوائية المستقلة كل ذات الحجم n_2, n_1 من المجتمعتين، فإنه يمكن تكوين قائمة بالفروق المتناظرة للنواتج $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. هذه القيم من $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ تتجه لأن تتجمع حول الفرق $\mu_1 - \mu_2$، بعضها سيكون أعلى من $\mu_1 - \mu_2$ والبعض الآخر يقل عن ذلك، ولكن بصفة عامة معظمها يتمركز حول $\mu_1 - \mu_2$. بالإضافة إلى ذلك نجد أنه كلما زاد حجم عينة واحدة أو كلاهما تناقص الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ، وبالتالي تحسنت دقة الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ كمقدر للفرق $\mu_1 - \mu_2$. في الحقيقة إذا تساوى أحجام العينات ، فإن الخطأ المعياري يتناسب عكسيا مع الجذر التربيعي لحجم العينة المشترك، وهذه هي نفس الخاصية التي تناولناها في حالة مجتمع واحد.

(٧-٣-٢) توزيع المعاينة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ عندما تكون σ_1 ، σ_2 معلومة:

The Sampling Distribution of $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ When σ_1 and σ_2 Are Known

كما أشرنا من قبل في الفصل السادس، أنه من النادر في التطبيقات الإحصائية الفعلية أن نعرف الانحرافات المعيارية للمجتمعات، لذا في المناقشة التالية سنفترض أن قيم σ_1 ، σ_2 معلومة.

نفرض أن المجتمعين الذين سنسحب من كل منهما عينة عشوائية مستقلة عن الأخر، أنها مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي لها انحرفات معيارية σ_1 ، σ_2 معلومة القيمة. من الجزء (٥-٢) نعلم أن توزيع المعاينة الطبيعي للإحصاءات $\overline{X}_2$, $\overline{X}_1$ لها أيضا توزيع طبيعي بأخطاء معيارية $\sigma_1 / \sqrt{n_1}$, $\sigma_2 / \sqrt{n_2}$ على التوالي. حيث أن الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو توليفة خطية من متغيرات عشوائية طبيعية، لذا فهو أيضا متغير عشوائي طبيعي (كما وضح ذلك في الجزء ٥-٥-٢). باختصار، توزيع المعاينة للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو توزيع طبيعي له متوسط وخطأ معياري موضحة بالصيغ (7.1),(7.3) على التوالي.

ماذا يحدث لو أن توزيع المجتمعين لم يكن طبيعي ؟ يحدث نفس الوضع كما في حالة مجتمع واحد، بمعنى، طالما أن حجم كلا العينتين n_2,n_1 كبيرا بدرجة كافية $(n_1 \geq 30)$، $(n_2 \geq 30)$، فإن توزيع المعاينة للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو تقريبا التوزيع الطبيعي وذلك بفضل نظرية النهاية المركزية.

في ظل أن الانحرافات المعيارية للمجتمعات σ_1 ، σ_2 معلومة القيمة وأن توزيع الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هو تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط وخطأ معياري محدد بالصيغ (7.1),(7.3) على التوالي، فإن توزيع الإحصاء المعياري Z حيث:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (7.4)$$

يكون له تقريبا التوزيع الطبيعي المعياري. تبدو الصيغة (7.4) مختلفة عن إحصاءات Z السابقة، لكنها جوهريا لا تختلف عنهم. وكما في إحصاءات Z السابقة، نحول قيمة الإحصاء الأصلية إلى إحصاء طبيعي معياري وذلك بطرح القيمة المتوقعة ثم قسمة الناتج على الخطأ المعياري.

وحيث أننا نفترض أن الانحرافات المعيارية في المجتمعات معلومة، وهو وضع من النادر أن يتحقق عمليا في التطبيقات الإحصائية، فإننا لن نتناول هذا الوضع بأكثر مما قدمنا في هذا الفصل.

(٧-٣-٣) توزيع المعاينة للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ عندما تكون σ_1 ، σ_2 مجهولة:

The Sampling Distribution of $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ when σ_1 and σ_2 Are Unknown

في التطبيقات الإحصائية العملية، غالبا ما تكون قيم الانحرافات المعيارية في المجتمعات مجهولة وبالتالي علينا تقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ بطريقة ما باستخدام تباين العينات. وعندما نفعل ذلك، ينتج توزيع معاينة ليس له توزيع طبيعي، حتى ولو كانت المعاينة تتم من مجتمعين لهما التوزيع الطبيعي. والسبب في هذا يتطابق مع السبب الذي ذكر في حالة مجتمع واحد، ويجب ألا تفاجأ إذا علمت أن توزيع المعاينة لهذا الإحصاء هو توزيع T.

عند تحديد توزيع المعاينة هذا، سنفترض- بالإضافة إلي افتراض أن توزيع المجتمعين لهما التوزيع الطبيعي- للتبسيط أن تباينات تلك المجتمعات متساوية. ومع ذلك، إذا كان الفرض الخاص بتساوي التباينات يبدو فرضا واهيا أو ضعيفا، خاصة بعد أن يوحي التحليل البياني لبيانات العينة باختلافات في التباين، فإن إجراء آخر لا يتطلب افتراض تساوي التباينات يمكن أن يتخذ. توضيح ذلك الفرضين نتناوله فيما يلي، ولكن ننصحك بأن تتجه لأحد البرامج الإحصائية الجاهزة، مثل برنامج Minitab لمتابعة كيفية معالجة ذلك الفرضين، كما سيوضح ذلك باختصار.

(أ) تباينات المجتمعين مجهوله لكنها متساوية:

نفرض أن تباينات المجتمعين متساوية وأن الرمز σ^2 يمثل التباين المشترك لهما وهو مجهول القيمة، أي: $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. بوضع σ^2 محل كل من σ_1^2 ، σ_2^2 في الصيغة (7.3)، نجد أن الخطأ المعياري للفرق $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يصبح:

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad (7.5)$$

كيف يمكن تقدير التباين المشترك σ^2 ؟ هنا نستخدم تباينات العينتين S_1^2 ، S_2^2 في توليفة كالموضحة

في الصيغة (7.6). حيث أن المجتمعين لهما تباين واحد، فإن كل عينة تعطي تقدير مستقل للتباين المشترك في المجتمعين. لذا فإن S_1^2، S_2^2 تعطي تقديرات مستقلة لـ σ^2 .

لتوضيح خطوات التقدير، دعنا نتناول المثال التالي. نفرض أننا نرغب في تحديد ما إذا كان برنامج صيفي مقترح في الرياضيات من شأنه أن يحسن من مستوى درجات الطلبة في الرياضيات. نفرض أن 30 طالبا بالصف السادس من مدرسة محلية بإحدى المقاطعات، ممن حققوا درجات متشابهة في الرياضيات في فصل الربيع، قد اختيروا لإجراء الدراسة عليهم. عشرة من هؤلاء الطلبة "مجموعة الاختبار" اختيروا عشوائيا للالتحاق بالبرنامج الصيفي في الرياضيات والباقي عشرون من الطلبة "المجموعة الضابطة" لم تشارك في هذا البرنامج الصيفي، كلا المجموعتين حضروا اختبار الرياضيات في الخريف وسجل لكل طالب درجته. أظهرت النتائج في مجموعة الاختبار أن متوسط الدرجات 510.2 بانحراف معياري 9.4 درجة. وفي المجموعة الضابطة كان متوسط الدرجات 501.1 بأنحراف معياري 8.5 درجه.

هناك أكثر من رؤيةمهمة لهذه الدراسة. المجتمعين اللذين نرغب في مقارنة متوسط الدرجات بينهم هي مجتمعات افتراضية، إحدهما يتكون من درجات كل طلاب الصف السادس مفترض فيهم حضورهم البرنامج الصيفي، والمجتمع الآخر يتكون من نفس المجتمع الافتراضي الأول مفترض فيهم عدم حضورهم البرنامج الصيفي والأسلوب المنطقي للمعاينة هنا هو العينات المستقلة.

فيما يتعلق بمنهج العينات المستقلة، لدينا تقديرين مستقلين للمعلمة σ^2 وهما: $S_1^2 = (9.4)^2 = 88.36$, $S_2^2 = (8.5)2 = 72.25$ ونرغب في أدماج هذه التقديرات في تقدير واحد بأخذ متوسطهم. لكن يلاحظ أن S_2^2 يعد تقديرا يعول عليه بصورة أكثر، لأنه يعتمد على عينة حجمها أكبر ($n_2=20$ بينما $n_1=10$). لذلك يكون تقدير التباين هو متوسط مرجح للقيم S_1^2،S_2^2 حيث تكون الترجيحات مبنية على أساس أحجام العينات، ولكي يكون تقدير التباين تقديرا غير متحيز لـσ^2، فإننا يجب أن نستخدم درجات الحرية n_1-1, n_2-1 كترجيحات بدلا من استخدام العينات n_1, n_2 مباشرة. طبقا لذلك فإن مقدر التباين المشترك لـ σ^2 ، يعطي على الصورة:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad \textbf{(7.6)}$$

يسمى الاحصاء S_p^2 تباين العينة التجميعي **Pooled Sample Varience** لأنه مكون من تجميع المعلومات عن العينتين. وكما تم في المناقشات السابقة عن تباين العينة، فإن مقام S_p^2 هو درجات الحرية لهذا التقدير. يلاحظ أن درجات الحرية للتقدير S_p^2 تساوي مجموع درجات الحرية للتقديرات S_1^2 ، S_2^2 . أيضا يلاحظ أن الأوزان أو الترجيحات في المتوسط المرجح كانت درجات الحرية وهيn_1-1, n_2-1، ينتج عن هذا أن S_p^2 يصبح متوسط حسابي بسيط للقيم S_2^2 , S_1^2 عندما تتساوى أحجام العينات n_1, n_2.

فيما يتعلق بالدراسة التي أجريت على البرنامج الصيفي للرياضيات، نجد أن قيمة تباين العينة التجميعي يكون:

$$S_p^2 = \frac{(10-1)(88.36)+(20-1)(72.25)}{10+20-2} = 77.4282$$

يلاحظ أن المتوسط الرجح $S_p^2=77.4282$ يقع بين القيم $S_1^2=88.36$ ، $S_2^2=72.25$، وهذه حقيقة دائما، فالتباين التجميعي يقع دائماً بين تباين العينتين. أيضا يلاحظ أن قيمة $S_p^2=77.4282$ أقرب إلى

$S_2^2 = 72.25$ من $S_1^2 = 88.36$، لأن حجم العينة $n_2=20$ أكبر من $n_1=10$.

حيث أن S_p^2 هو تقدير التباين المشترك لـ σ^2، فإنه بوضع S_p^2 مكان σ^2 في الصيغة (7.5) نجد أن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ يكون :

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \quad (7.7)$$

حيث أننا لا نعلم قيمة σ^2، فإنه لا يمكننا تحديد قيمة Z من الصيغة (7.4)، وحيث أننا قدرنا σ^2 بالإحصاء S_p^2 فإنه يمكننا تقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ بالصيغة (7.7) وبالتالي يمكننا تحديد قيمة T كما يلي:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad (7.8)$$

يلاحظ أيضا- كما في حالة المجتمع الواحد- أن الصيغة (7.8) تحتوي على أكثر من إحصاء زيادة عما تحتويه الصيغة (7.4) الا وهو S_p^2. لذا فإن الإحصاء T يكون أكبر إلى حد ما عن الإحصاء Z بسبب الاختلافات من عينة إلى عينة. جدير بالذكر أن توزيع المعاينة للإحصاء T بالصيغة (7.8) يتبع تقريبا توزيع T بدرجات حرية (n_1+n_2-2) طالما أن توزيع المجتمعين لا يبتعدا كثيرا عن التوزيع الطبيعي أو أن يكون أحجام كلا العينتين كبيرا (على الأقل30).

(ب) تباينات المجتمعين مجهولة وغير متساوية :

إذا كان افتراض تساوي التباينات يبدو غير مقبولا، فإنه يمكن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ باستخدام تباينات العينتين S_1^2، S_2^2 في الصيغة (7.3). بمعنى أن تقدير الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ يتحدد باستخدام :

$$SE(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \quad (7.9)$$

بنفس المناقشة التي تمت عند تحديد الصيغة (7.8)، نجد أن الإحصاء المناسب هنا يعطي بالصيغة:

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad (7.10)$$

توزيع المعاينة للإحصاء T بالصيغة (7.10) يتبع تقريبا توزيع T بدرجات حرية لها الصيغة المركبة التالية:

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} \quad (7.11)$$

المعلومات المتعلقة بالاستدلال حول $\mu_1-\mu_2$ اعتماداً على عينات مستقلة وتباينات المجتمعات غير معلومة ملخصة داخل الإطار التالي. وكما ذكرنا سابقا، يكون من الأفضل الرجوع إلى البرامج الإحصائية الجاهزة.

ملخص: توزيع المعاينة المتعلق بالاستدلال حول μ_1-μ_2 اعتماداً على عينات مستقلة وتباينات المجتمعات مجهولة

أ- إذا كانت الانحرافات المعيارية (أو التباينات) المجهولة للمجتمعات متساوية وكان: (1) توزيعات المجتمعات لا تختلف عن التوزيع الطبيعي. أو(2)أحجام العينات كبيرة بدرجة كافية ($n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للإحصاء: T

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

هو توزيعT بدرجات حرية ($n_1 + n_2 - 2$)، حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

هو المقدر التجميعي للتباين المشترك $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ب- إذا كانت الانحرفات المعيارية المجهولة للمجتمعات ليست بالضرورة متساوية وكان: (1) توزيعات المجتمعات لا تختلف عن التوزيع الطبيعي. أو (2) أحجام العينات كبيرة بدرجة كافية ($n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30$). فإن توزيع المعاينة للإحصاء:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

يتبع تقريباً توزيع T بدرجات حرية معطاة بالصيغة (7.11)

(٧-٣-٤) فترات الثقة واختبارات الفروض حول μ_1-μ_2 عندما تكون σ_1 ، σ_2 مجهولتان :

Confidence Intervals and Hypothesis Testing for μ_1-μ_2 when σ_1 and σ_2 Are Unkonwn

حيث أن توزيعT يستخدم في الاستنتاج حول μ_1-μ_2 عندما تكون σ_1 ، σ_2 مجهولتان، فإن تحديد فترات الثقة واختبارات الفروض الإحصائية ستتم مناقشتهما بطريقة موازية لما تم في الجزء (٦-٤).

فترات الثقة:

بمعلومية قيمة الإحصاء $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ، فإن فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ تقريبا للفرق μ_1-μ_2 هي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{1-\alpha/2,df} \quad SE(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \qquad (7.12)$$

حيث (بفرض تساوي تباينات المجتمعات):

$$SE(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad (7.13)$$

أو حيث (بفرض عدم تساوي تباينات المجتمعات):

$$SE(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \qquad (7.14)$$

الكمية $t_{1-\alpha/2,df}$ هي القيمة الجزئية من توزيع T بدرجات حرية $df=(n_1+n_2-2)$ اذا كانت تباينات المجتمعات متساوية أو بدرجات حرية كالموضحة بالصيغة (7.11) اذا كانت تباينات المجتمعات غير متساوية.

مثال (٧-٣)

تذكر مثال البرنامج الصيفي للرياضيات وفيه كانت المجموعة الاختبارية من طلبة الصف السادس مكونة من $(n_1=10)$ طالب وكان متوسط الدرجات فيها $\overline{X}_1=510.2$ وذلك بعد حضورهم البرنامج الصيفي للرياضيات. أما المجموعة الضابطة$(n_2=20)$ وهم لم يشاركوا بالحضور في البرنامج الصيفي للرياضيات فكان متوسط درجاتهم $\overline{X}_2=501.1$. لتحليل هذا المثال، سنفترض أن توزيعات المجتمعات قريبة من التوزيع الطبيعي وتبايناتها المجهولة متساوية.

(أ) قدر الفرق بين متوسط درجات الطلبة اللذين حضروا البرنامج الصيفي والطلبة اللذين لم يحضروا البرنامج الصيفي.

(ب) مستخدما مستوى ثقة 95% ، حدد هامش خطأ المعاينة للتقدير.

(جـ) هل فترة الثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد ؟ برر نتيجتك.

الحل

(أ) بيانات العينة تشير إلى أن الطلاب اللذين حضروا البرنامج الصيفي تحسن مستواهم بمقدار : $\overline{X}_1-\overline{X}_2=510.2-501.1=9.1$ عن الطلاب اللذين لم يحضروا البرنامج الصيفي.

(ب) من المناقشة السابقة لهذا المثال، حددنا قيمة تباين العينة التجميعي $S_p^2=77.4282$. من الصيغة (7.7) نجد أن الخطأ المعياري للفرق $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ هو :

$$SE(\overline{X}_1-\overline{X}_2)=\sqrt{77.4282(\frac{1}{10}+\frac{1}{10})}=3.408$$

ولتحديد مقدار الخطأ في تقدير (أ)، نحسب فترة الثقة 95% للفرق $\mu_1-\mu_2$ بأستخدام الصيغة (7.12). القيمة الجزئية من جدول C بدرجات حرية 28=2-20+10، هي : $t_{.975,28}=2.048$، وبالتالي تكون فترة الثقة 95% هي:

$$9.1\pm(2.048)(3.408)=9.1\pm6.98=2.12 \text{ to } 16.08$$

وهامش خطأ المعاينة هو:6.98±. بمعنى أنه بثقة 95% نجد أن الفرق بين متوسطي المجتمعين يقع بين 16.08, 2.12 درجة.

(جـ) من الواضح أن البرنامج الصيفي للرياضيات كان مفيداً لأن الفترة (2.12, 16.08) لا تحتوي على الصفر وتحتوي على قيم موجبة. بمعنى آخر، اعتمادا على البيانات الحالية للعينة، يكون من غير المقبول أن ندعي أن البرنامج الصيفي للرياضيات لم يحسن من درجات الرياضيات للطلاب.

إختبارات الفروض حول $\mu_1-\mu_2$:

كما وضحنا في الفصل السادس، يمكننا اختبار الفرق $\mu_1-\mu_2$ باستخدام إما فترات الثقة أو باستخدام أسلوب القيمة P. اختبارات الفروض الإحصائية حول $\mu_1-\mu_2$ باستخدام فترات الثقة، تأخذ نفس الخط كما كان في حالة مجتمع واحد والذي نوقش في الجزء (٦-٤-٤). فمثلا، نفرض أننا ندعي أن الفرق

μ_1-μ_2 هو كمية قدرها D_o. في معظم الحالات D_o تساوي الصفر، أي لا يوجد فرق، لاختبار الفرض العدمي:

$$H_o:\mu_1-\mu_2=D_o$$

مقابل الفرض البديل من طرفين:

$$H_a:\mu_1-\mu_2\neq D_o$$

فإننا نحدد فترة الثقة للفرق μ_1-μ_2 باستخدام الإحصاء T المناسب.

أذا كان الفرق المدعي به D_o يقع داخل هذه الفترة، فإنD_o تعد قيمة مقبولة للفرق μ_1-μ_2 ومن ثم فلا يوجد سببا لمناقضة الفرض العدمي. من ناحية أخرى، D_o تعد غير مقبولة للفرق μ_1-μ_2 وبالتالي يكون هناك سببا لمناقضة الفرض العدمي إذا ما وقعت D_o خارج حدي الثقة. يلاحظ أننا قد وضحنا هذه الإجراءات في المثال (٧-٣) الجزء(جـ).

اختبارات الفروض الإحصائية المتعلقة بالفرق μ_1-μ_2 باستخدام القيمة P (P-Value) يتم بنفس الأسلوب المستخدم في حالة مجتمع واحد كما في البند (٦-٤-٥). القيمة P هو احتمال مشاهدة قيمة للإحصاء ($\overline{X}_1-\overline{X}_2$) تكون أكثر تطرفا من القيمة الفعلية المشاهدة في العينة الحالية وذلك في الاتجاه المحدد في الفرض البديل، وكما هو في حالة مجتمع واحد، فإن هذا يتطلب تحويل القيمة المشاهدة للفرق ($\overline{X}_1-\overline{X}_2$) إلى قيمة T باستخدام إما الصيغة (7.8) أو (7.10) ثم تحديد الاحتمال المناظر.

مثال (٧-٤)

هل هناك فرق في متوسط الدرجات بين طلبة الكلية اللذين يشاركوا في انتخابات محلية واللذين لا يشاركوا في تلك الانتخابات؟ اختيرت عينتين عشوائيتين مستقلتين من إحدى الجامعات الرئيسية، كل عينة بها 46 طالب. البيانات التالية تكشف عن متوسط الدرجات والانحراف المعياري لعينة من 46 طالب شاركوا في الانتخابات ولعينة أخرى 46 طالب لم يشاركوا في الانتخابات:

شاركوا في الانتخابات	لم يشاركوا في الانتخابات
$\overline{X}_1=2.85$	$\overline{X}_2=2.65$
$S_1=.35$	$S_2=.42$

مفترضاً أن الانحرافات المعيارية المجهولة في المجتمعات متساوية. هل بيانات تلك العينات تشير إلى وجود فرق في متوسط الدرجات بين طلبة الجامعة الذين شاركوا واللذين لم يشاركوا في الانتخابات؟

الحل:

الفرض العدمي والفرض البديل يمكن صياغتهم على النحو التالي:

$$H_o:\mu_1-\mu_2=0 \qquad H_a:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

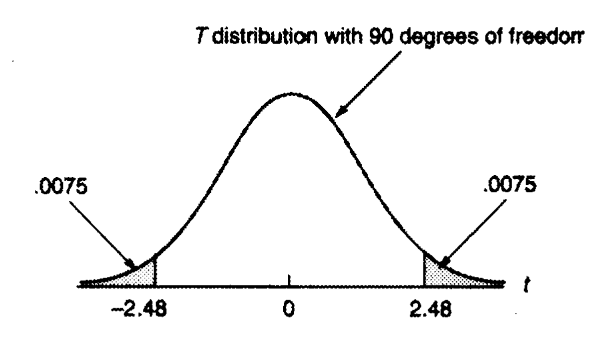
السؤال الجوهري هو ما إذا كانت قيمة الفرق $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ =2,85-2.65=.2 مختلفة بدرجة كافية عن القيمة التي يدعيها الفرض العدمي وهي الصفر أم لا. حيث أن تباينات المجتمعين المجهولة يفترض أنها متساوية، فإن تباين العينة التجميعي يكون:

$$S_p^2 = \frac{(46-1)(.35)^2 + (46-1)(.42)^2}{46+46-2} = .14945$$

قيمة T المناظرة للفرق 2.= $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ هي:

$$T = \frac{(2.85-2.65)-0}{\sqrt{.14945\left(\frac{1}{46}+\frac{1}{46}\right)}} = 2.48$$

احتمال ان قيمة Tتكون اكثر تطرفا عن 2.48 في كلا الأتجاهين أعطيت عن طريق الحاسب الآلي لتكون 015.= (2x.0075) كما هي موضحة في شكل (٧-١). وبدون الحاسب الآلي، يمكن تقريب القيمة P من الجدولC. فمن ذلك الجدول، نبحث عن القيمتين اللتين تحصران T=2.48 عند درجات الحرية 90، فنجدهما 2.368,2.632. نلاحظ أن المساحة على يسار2.632 هي995. والمساحة على يسار 2.368 هي 99. وعلى ذلك، احتمال ان الإحصاءT يأخذ قيما أكبر من 2.48 يقع بين 01.=99.-1 ، 005.=995.-1 وحيث أن الفرض البديل في اتجاهين، فإن قيمة P المطلوبة هي ضعف هذا الاحتمال. فالقيمة P تقع بين 02,.01. (ضعف المدى 005 to.01.)



شكل (٧-١): القيمة P لمثال (٧-٤)

وبسبب صغر قيمة P، فإن بيانات العينات الحالية لاتؤيد إدعاء الفرض العدمي، أي من الواضح أن هناك سبباً جيداً للإعتقاد بوجود إختلاف في متوسط الدرجات بين الطلاب اللذين شاركوا في الإنتخابات واللذين لم يشاركوا. ومع ذلك، فمن المهم أن ننوه إلى أن هذه النتيجة محددة بإطار الدراسة، بمعنى أن التحليل الإحصائي هنا يؤيد إنطباق هذه النتيجة فقط على طلبة الجامعة التي إجريت فيها هذه الدراسة. أما التعميم على طلبة من جامعات أخرى فيمكن تبريرة فقط بتوسيع حدود ونطاق الدراسة بجانب معلومات عن موضوع الدراسة.

إستخدام الكومبيوتر: Using the Computer

سنوضح إستخدام برنامج Minitab لتنفيذ مقارنة بين متوسطي مجتمعين إعتماداً على عينات مستقلة. ضع في إعتبارك أن أي برنامج إحصائي جاهز له القدرة على أداء تلك المقارنة.

مثال (٧-٥)

إحدى المنظمات الإجتماعية مهتمة بمقارنة متوسط دخول الأسر في منطقتين سكنيتين متجاورتين. أختيرت من كل منطقة عينة عشوائية مستقلة عن الأخرى حجم كل منها 14 أسرة وفيما يلي دخل كل أسرة بالألف دولار.

(1) 86.5 49.2 54 47 60.6 57.1 29.3 51.4 39.8 34.4 60 66.7 75.2 65.9

(2) 58.8 30.4 38 48.5 46 32.7 34.5 48.4 41.7 60.5 44 40.4 41.5 34.9

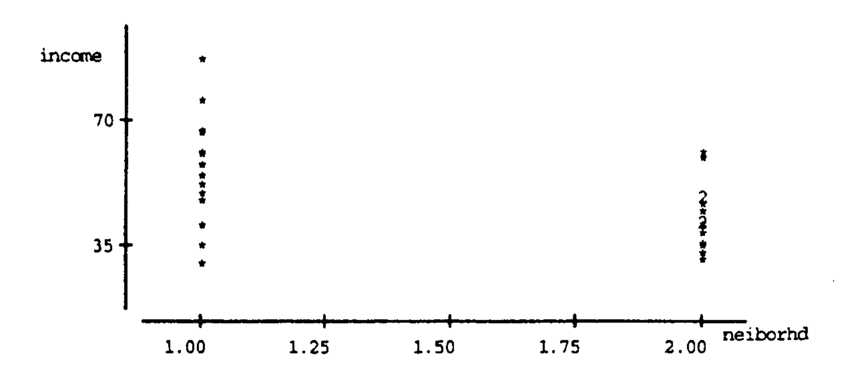
إعتماداً على هذه البيانات، هل هناك سبباً حقيقياً للإعتقاد بوجود إختلاف في متوسط دخل الأسر بين تلك المنطقتين؟

الحـــل

قبل إستخدام أي طريقة إحصائية في الحل، ننصح برسم تلك البيانات. وبفحص ذلك الرسم بإمعان، ربما نجد البداية في الأجابة على هذا السؤال. لرسم هذه البيانات، نستخدم المحور الأفقي للمنطقتين السكنيتين والمحور الرأسي للدخول المسجلة للأسر، كما هو موضح في شكل (٧-٢). الأرقام على الرسم تشير إلى أن هناك مشاهدات متعددة تشغل نفس النقطة على الرسم. أوامر برنامج Minitab للحصول على الشكل موضحة في ملحق هذا الفصل. من هذا الشكل يتضح أن التشتت الرأسي عند كلا المنطقتين ليس بنفس الدرجة، فهناك إختلاف واضح بين دخول الأسر في المنطقة الأولى أكثر مما هو موجود في المنطقة الثانية. طبقاً لذلك، فإننا يجب إستخدام الأحصاء T الموضح بالصيغة (7.10) والذي لا يتطلب فرض تساوي التباينات. من شكل (٧-٢) يلاحظ أيضاً أنه على الرغم من وضوح الفرق في التباين، إلا أن دخول الأسر في المنطقة الأولى تميل إلى أن تكون أكبر من تلك التي في المنطقة الثانية، وهذا يوحي بأن متوسط دخل الأسرة في المنطقتين ليس واحداً.

مخرجات برنامج Minitab (انظر إلى ملحق هذا الفصل) لإختبار الفرض العدمي:

$H_o:\mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرض البديل $H_a:\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ موضحة فيما يلي



شكل (٧-٢): الشكل النقطي للدخل مقابل المنطقة

```
Two Sample T For income
neiborhd      N       Mean        STDV        SE MEAN
1             14      55.5        15.5            4.2
2             14      42.88       9.04            2.4
95 PCT CI For MU 1-MU  2: (2.6, 22.7)
T TEST MU  1=MU   2  (VS  NE): T=2.63   P=0.016    DF=20
```

يلاحظ أن المخرجات تشتمل على قيمة T (2.63) وعلى القيمة P (.016) وكذلك على فترة الثقة 95% للفرق $\mu_1-\mu_2$ وهى (2.6,22.7) وحيث أن قيمة P صغيرة بدرجة كافية وأن فترة الثقة 95% لاتحتوي على الصفر، فإن نتيجتنا المبدئية التي إعتمدت على الرسم البياني تكون قد تحققت وتأكدت. الآن إعتماداً على بيانات العينة يتأكد لنا أن متوسط دخل الأسرة في المنطقتين يختلفا إختلافاً حقيقياً.

مثال (٧-٦)

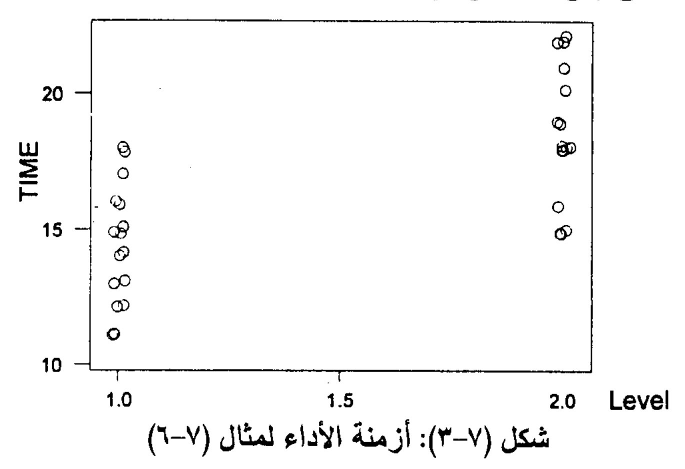
في عملية تقييم مستمرة لأثر الضوضاء المزعجة على قدرة الفرد في أداء عمل معين، قام باحث بتصميم تجربة من خلالها يطلب من عدد من الأشخاص أداء عمل معين في ظل بيئة متحكم فيها بوجود مستويين يمثلان خلفية من الضوضاء. ولكي يخفض من أثر الإختلافات العشوائية، إختار الباحث 32 شخصاً ممن لديهم القدرة على أداء هذا العمل في وقت واحد تقريباً. من هؤلاء 16 شخصاً أختيروا عشوائياً وطلب منهم إداء العمل في ظل مستوى متواضع من الضوضاء (المستوى 1) والباقي 16 يؤدوا العمل في ظل المستوى 2 وهو مستوى شديد الضوضاء ومزعج عن المستوى الأول. البيانات التالية تمثل الأزمنة المسجلة بالدقائق التي إستغرقت لإكمال العمل بواسطة 16 شخص في كل مستوى.

level 1:	14	12	15	15	11	16	17	12	14	13	18	13	18	15	16	11
level 2:	20	22	18	18	19	15	18	15	22	18	19	15	21	22	18	16

مفترضاً أن هذه البيانات تشكل عينات عشوائية مستقلة من مجتمعين كل منهما يتبع التوزيع الطبيعي. هل هناك سببا حقيقيا للإعتقاد بأن متوسط الزمن في المستوى الثاني يتعدى متوسط الزمن في المستوى الأول؟

الحل

يلاحظ هنا إستخدام العينات العشوائية المستقلة، حيث اختير لهذه الدراسة 32 شخص، تم تقسيمهم عشوائياً إلى مجموعتين، وهؤلاء الأشخاص كانوا متساوين في مقدرتهم على أداء هذا العمل في أزمنة متساوية تقريباً. التمثيل البياني لهذه البيانات موضح في شكل (٧-٣). من هذا الشكل يتضح أن التشتت الرأسي عند كلا المستويين، تقريباً بنفس الدرجة وبالتالي، يستخدم الإحصاء T الموضح بالصيغة (7.8) المعتمدة على التباين التجميعي. نضيف إلى ذلك أن الشكل يوضح أن الأزمنة المستغرقة في المستوى الثاني تميل إلى الكبر عن تلك التي في المستوى الأول ومن ثم فمتوسطي الزمن في المستويين من غير المحتمل أن يكونا متساويان.



شكل (٧-٣): أزمنة الأداء لمثال (٧-٦)

مخرجات برنامج Minitab عند اختبار الفرض العدمي $H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرض البديل $H_a: \mu_1 - \mu_2 > 0$ موضحة فيما يلي:

```
Two Sample T for level  1   VS   level    2
                N        MEAN        STDV        SE MEAN
level  1     16        14.38        2.28          0.57
level  2     16        18.50        2.45          0.61
95 PCT  CT  FOR  MU  Level 1-MU  level 2: (-5.83,-2.42)
T TEST  MU  Level   1=MU   Level  2 (VS  LT):  T=-4.93   P=0.0000
DF=30
POOLED    STDV=        2.36
```

مخرجات البرنامج تؤكد النتيجة التي توصانا إليها حالاً من الرسم البياني. فترة الثقة 95% للفرق μ_1-μ_2 تقع بالكامل على يسار الصفر وهذا يؤيد أن μ_1 هي أقل من μ_2، أيضاً قيمة p (.0000) التي تناظر قيمة T=-4.93 هي قيمة صغيرة جداً لدرجة أنه لا يمكن أن يوجد شك ولو ضئيل في أن μ_1 هي فعلاً أقل من μ_2.

مثال (٧-٧)

يرغب مدير الإنتاج في معرفة ما إذا كان هناك فروقاً في متوسط إنتاجية ورديتي النهار والليل. لهذا الغرض، إختيرت عينات عشوائية مستقلة من 15 يوماً إنتاجياً. عدد الوحدات المنتجة في كل وردية عن كل يوم كانت كما يلي:

shift 1 (day)	250	269	264	246	252	253	244	255	245	255	244	245	249	256	257
shift 2 (night)	252	241	251	239	251	259	243	258	361	251	253	284	233	251	241

مفترضاً أن المعاينة تمت من مجتمعين طبيعين مستقلين، وإعتمادا على بيانات تلك العينات، هل هناك سبب حقيقي لدى مدير الإنتاج لكي يعتقد بأن هناك إختلاف في متوسط الإنتاجية بين الورديتين؟

الحل

قبل أن نبدأ في الحل، فكر في سبب إتجاهنا لاستخدام أسلوب القراءات المزدوجة في هذا المثال. إذا كان مدير الإنتاج يعلم أن مستويات الإنتاج تتغير بدرجة كافية من يوم إلى يوم، فمن المحتمل أن تكون الإختلافات اليومية مصدراً أساسياً لاختلافات الإنتاج. عندما يتم تحديد عامل ما يكون سبباً أساسياً للإختلافات، فإن أسلوب القراءات المزدوجة وفق هذا العامل يجب أن يتبع، لذلك فمستويات الإنتاج في تلك الورديتين يجب أن تكون قراءات مزدوجة أخذا في الاعتبار عامل اليوم، هذا إذا كان هناك اختلافات بدرجة كافية بين يوم وآخر.

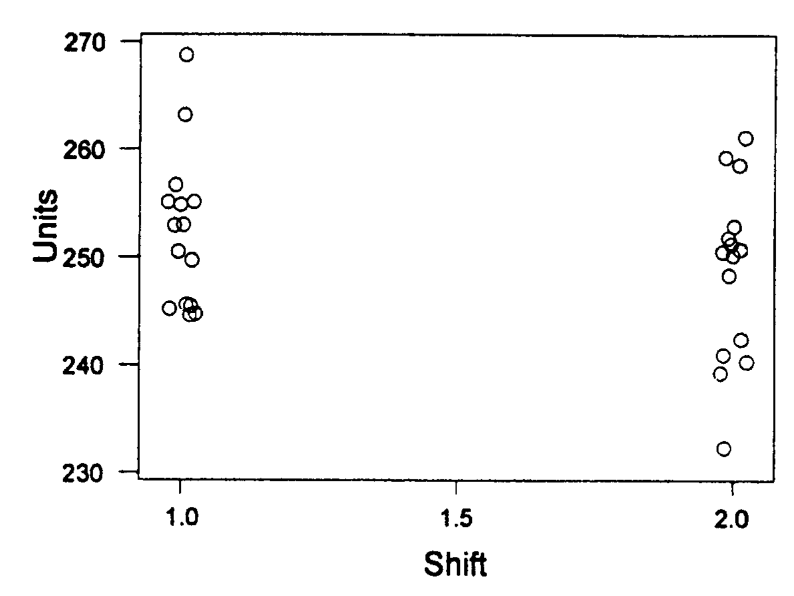
وكما في الأمثلة (٧-٥)، (٧-٦) يمكن الكشف عن الكثير عن طريق استخدام الرسم البياني لبيانات العينة. من شكل (٧-٤) يلاحظ أنه على الرغم من أن مستويات الإنتاج في وردية الصباح تبدوا أكبر إلى حد ما من تلك التي في وردية المساء، إلا أنه لا يتضح بالتأكيد وجود اختلافات حقيقية في مستويات الإنتاج. نضف إلى ذلك أن التشتت الرأسي عند كلا الورديتين لا يبدو أنه مختلف وهكذا

فإن أسلوب القراءات المزدوجة يستخدم في مثل هذه الحالة .

مخرجات برنامج Minitab لتحديد ما إذا كانت بيانات العينة تناقض ادعاء عدم وجود فرق بين μ_2,μ_1 موضحة فيما يلي:

```
TWOSAMPLE T FOR shift 1 vs shift 2
              N        MEAN       STDEV      SE MEAN
shift 1       15       252.57     7.40          1.9
shift 2       15       248.80     7.96          2.1
95 PCT CI FOR MU Shift 1 - MU  Shift 2: (-2.3 , 9.5)
TTEST MU Shift 1=MU shift 2 (VS NE): T=1.24 P=0.23 DF=28
POOLED STDEV=     7.68
```

نتائج مخرجات البرنامج تؤيد ما توصلنا إليه عند فحص شكل (٧-٤). فترة الثقة 95% للفرق μ_1-μ_2 تشمل الصفر كما أن قيمة P وهي 23. والتي تناظر قيمة T (1.24) هي بالتأكيد ليست صغيرة بدرجة كافية وعلى هذا نستنتج بثقة كبيرة عدم وجود فرق بين متوسط مستويات الإنتاج في الورديتين .



شكل (٧-٤): عدد الوحدات المنتجه في الورديتين

المعني العملي للمثال (٧-٧)

ماذا يحدث لو أن بيانات العينة أظهرت وجود اختلافات بين متوسط مستويات الإنتاج في الورديتين ؟ في مثل هذه الحالة، على الادارة أن تكتشف لماذا حدث هذا الاختلاف. فمثلا، هل العمال في الورديتين تدربوا تدريبا متساوياً ؟ أم أن عمال إحدى الورديتين ربما كانوا أكثر خبرة من عمال الوردية الأخرى. على الإدارة أن تجيب على مثل هذه الأسئلة إن أرادت أن تتخذ الإجراء المناسب.

(٧-٣-٥) الفروض وأهميتها: The Assumptions and Their Importance

أحد الفروض الضرورية في كل الاستنتاجات التي تمت في الفصل الحالي، هي أن توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي. الفرض الآخر هو أن تباينات المجتمعات متساوية.

الفرض بأن توزيعات المجتمعات هو الطبيعي:

على الرغم من ضرورة هذا الفرض عند الإثبات الرياضي في طرق الاستنتاج الأحصائي، إلا أنه غير حاسم في مواقف أو حالات عملية. استناداً إلى نظرية النهاية المركزية، فتوزيعات المعاينة لمتوسطات العينات تقريبا هي التوزيع الطبيعي، وذلك للعينات ذات الحجم المعتدل. أما إذا كانت توزيعات المجتمعات ملتوية التواء خفيف ، فإن إجراءات الاستنتاج التي قدمت في هذا الفصل تكون ملائمة لجميع الحالات باستثناء العينات الصغيرة جداً في حجمها.

الفرض بتساوي التباينات :

يمكن استخدام الإحصاء T المعتمد على فرض تساوى البيانات، إذا كان الشكل البياني لبيانات العينات يكشف عن أن تشتت العينتين تقريبا متشابه، وهكذا نصدق الاعتقاد بإن تباينات المجتمعات متساوية. من ناحية أخرى، إذا كان هذا الشكل البياني يكشف عن فروق متميزة وواضحة في تشتت العينتين، فإن الإحصاء T المعتمد على فرض عدم تساوي تباينات المجتمعين يمكن أن يستخدم. وعلى أية حال يكون التفكير جيداً بأختيار عينات متساوية الحجم عند تطبيق كلا الحالتين.

تمارين:

(٧-٨) بالنسبة للأستنتاجات حول متوسطي المجتمعين، متى يستخدم إحصاء T أكثر من إحصاءZ ؟ وهل من المحتمل أن نستخدم إحصاء T أكثر من إحصاء Z ؟ وضح ذلك.

(٧-٩) عند مقارنة متوسطي مجتمعين، متى يستخدم إحصاء التباين التجميعي S_p^2 ؟

(٧-١٠) ما هي قيمة التباين التجميعي S_p^2 عندما تكون أحجام العينات n_2,n_1 متساوية ؟

(٧-١١) عند حساب قيمة التباين التجميعي S_p^2 ، لماذا نستخدم صيغة المتوسط المرجح للقيم S_1^2، S_2^2أكثر مما نستخدم المتوسط البسيط لهم ؟

(٧-١٢) متى يستخدم إحصاء T للاستدلال حول متوسطي مجتمعين مستقلين ؟ وما هي الشروط الضرورية المتعلقة بالمجتمعين ؟

(٧-١٣) بفرض أننا نرغب في مقارنة متوسطي إنتاج ورديتين أخذا في الاعتبار عدد أيام الأجازة المرضية التي يقوم بها عمال كل وردية، اختيرت عينة عشوائية من عمال كل وردية حجمها 12 عامل وسجل لكل منهم عدد أيام الأجازة المرضية خلال العام الماضي وكانت البيانات مايلي:

الوردية الأولى	3	7	2	4	5	4	8	3	2	5	7	3
الوردية الثانية	5	4	7	9	6	5	3	8	10	4	8	6

(أ) ارسم تلك البيانات. هل يتضح لك وجود فرق في المتوسط بين عدد أيام الأجازة المرضية في الورديتين؟ اشرح ذلك.

(ب) اعتمادا علي الشكل البياني في (أ)، استخدم أسلوب مناسب لتحديد ما إذا كانت هذه البيانات دليلا كافيا على وجود فروق في المتوسط بين عدد أيام الأجازة المرضية في الورديتين. (ملحوظة: استخدام أسلوب القيمةP (P-Value)).

(٧-١٤) يرغب أحد المنتجين في مقارنة متوسط قوة الشد لأحد الخيوط القطنية المقترح استخدامها مع متوسط قوة الشد للخيط الشعبي الذي يستخدمه حاليا. اختيرت بطريقة عشوائية عينتين مستقلتين من النوعين حجم كل منها 25 قطعة وقيس في كل عينة قوة الشد وكانت النتائج كما يلي:

الخيط الشعبي	104	108	90	106	108	113	114	82	113	91	97	99	116
	99	101	122	100	102	127	104	103	103	94	103	102	
الخيط الجديد	127	109	113	98	98	95	86	108	100	119	109	122	96
	101	97	125	126	92	118	100	110	107	106	118	94	

(أ) ارسم هذه البيانات. هل يتضح لك أن قوة الشد للخيط الجديد تزيد عن الخيط الشعبي؟ وضح ذلك.

(ب) استخدم أسلوب القيمة P (P-Value) لتحديد ما إذا كان هناك دليلا كافيا على أن قوة الشد للخيط الجديد تزيد عن قوة الخيط الشعبي، في المتوسط.

(٧-١٥) مدير ما مسئول عن اتخاذ قرار بشأن خطة تسويقية جديدة تقضي بمنح العملاء فترة ثلاث شهور خدمة مجانية مع كل عملية شراء منتج معين. لاختبار تأثير ذلك على المبيعات، اختيرت 30 منطقة بيع بطريقة عشوائية، ونفذت الخطة الجديدة على 15 منطقة وترك الباقي وهو 15 منطقة تدار بالطريقة التقليدية وذلك بغرض المقارنة. بعد مرور ثلاثة شهور من تنفيذ الخطة الجديدة، كانت المبيعات في كل منطقة من مناطق الاختبار (بالألف دولار) على النحو التالي.

32.8, 39.9, 24.8, 25.3, 27.1, 28.4, 29.5, 41.2, 31.9, 28.7, 19.2, 26.2, 27.2, 27.6, 31.8

أما مبيعات المنطقة التي تركت تعمل بالطريقة التقليدية فكانت:

28.6, 19.9, 22.7, 24.2, 23.9, 34.7, 22.8, 29.9, 27.6, 18.4, 22.5, 19.3, 22.8, 18.7, 18.6

بإفتراض أن العينتين العشوائيتين مستقلتين وأنهما سحبتا من عمليتين لهما التوزيع الطبيعي.

(أ) ارسم بيانات العينتين. هل يبدو لك أن خطة التسويق الجديدة ذات مبيعات مرتفعة في المتوسط؟ اشرح ذلك.

(ب) إلي أي مدى تناقض هذه البيانات الادعاء بعدم وجود فرق في المبيعات بين المنطقتين مقابل أن هناك زيادة في مبيعات منطقة الاختبار؟

(٧-١٦) شركة تغذية ترغب في معرفة ما إذا كان استخدام نوع جديد من ورق السلوفان في عملية التغليف التقليدية يزيد من طول عمر بطاطس الشيبسي وتبقي طازجة. لمعرفة ذلك، اختيرت عينة من 15 عبوة مغلفة بالطريقة التقليدية وتم رقابتها فوجد أنها تظل طازجة لمدة 20.8 يوم في المتوسط بانحراف معياري 2.8 يوم. في نفس الوقت اختيرت عينة أخرى من 15 عبوة مغلفة بالطريقة الجديدة وتم رقابتها فوجد أنها تظل طازجة لمدة 24.2 يوم في المتوسط بانحراف معياري 2.5 يوم. مفترضا أن هذه المعلومات تعبر عن عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبة من مجتمعات لها توزيع طبيعي بتباينات متساوية.

(أ) حدد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي زمن الطريقتين: التقليدية والجديدة. اعتمادا على هذه الفترة، ما الذي يمكن أن تستنتجه؟

(ب) هل ترى أن هذه البيانات تعطي دليلا كافيا كي نستنتج أن طريقة التغليف الجديدة تزيد من متوسط زمن البقاء طازجا؟

(٧-١٧) موظفة في شركة ما مهتمة بتحديد أسرع وسيلة للوصول إلى عملها: ركوب القطار أم قيادة سيارتها. لاختبار ذلك، استخدمت كل وسيلة لمدة عشرة أيام، وهذه الأيام تم اختيارها بطريقة عشوائية. هذه الموظفة كانت تغادر منزلها كل يوم في نفس التوقيت وتسجل الزمن المنقضي حتى تصل إلي مقر عملها. الأزمنة عند استخدام القطار بالدقائق كانت: , 45 , 44 , 47 , 48 , 48 , 42 , 47 , 43 , 47 , 46 أما الأزمنة عند استخدام سيارتها فكانت بالدقائق هي:45 , 36 , 35 , 46 , 42 , 36 , 42 , 39 , 38 , 47 , مفترضا أن هذه البيانات تمثل عينات عشوائية مستقلة من مجتمعات لها توزيعات طبيعية:

(أ) ارسم هذه البيانات. هل يتضح لك أن هناك فرقا في متوسط الزمن اللازم للوصول إلى العمل؟ وضح ذلك.

(ب) هل هذه البيانات تمثل دليلا كافيا كي نستنتج أن القيادة هي الأسرع في المتوسط؟.

(جـ) هل يمكنك أن تفكر في تصميم أفضل لهذه التجربة؟ بالتحديد، كيف يمكن استخدام القطاعات لتخفيض حجم الاختلافات في هذه التجربة؟

(٧-١٨) مدير المشتريات في إحدى الشركات يرغب في مقارنة زمن التعطل عن أداء الخدمة لنوعين من ألات التصوير تستخدمها الشركة. لدى الشركة ثمان ألات من النوع Suny 1000 وعشر ألات من النوع Saban XL 100 . قام المدير بتجميع أزمنة التعطل بالساعات لكلا النوعين خلال الشهور الستة الأخيرة.

النوع	زمن التعطيل بالساعات									
Suny1000	7.2	3.6	5.5	4.6	3.7	3.1	2.6	7.2	--	--
Saban XL 100	4.4	3.3	5.6	6.1	4.2	3.6	3.4	4.2	5.0	3.0

مفترضا أن هذه العينات مستقلة ومسحوبه من توزيعات طبيعيه

(أ) ارسم هذه البيانات بيانيا. اعتمادا على الشكل البياني، هل تعتقد أن هناك فرقا في المتوسط بين زمن التعطل لكلا النوعين؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الادعاء بعدم وجود فروق في المتوسط بين أزمنة التعطل في مقابل وجود فروق ؟

(٧-١٩) يتطلب أحد المصانع الكبرى أن يكون العاملين الجدد متدربين تدريبا حديثا على عملية التجميع لمنتج معين قبل أن يسند لهم مسئولية خط التجميع. 16 من العاملين الجدد تم تقسيمهم

عشوائيا إلى مجموعتين، المجموعة الأولى من ثمان عمال خضعوا لطريقة التدريب التقليدية بينما المجموعة الأخرى خضعت للتدريب الحديث وفي نهاية فترة التدريب، سجلت أزمنة التجميع بالدقائق للمجموعتين على النحو التالي:

الطريقة التقليدية	42	38	41	37	43	44	45	36
الطريقة الحديثة	34	35	35	36	39	37	38	34

مفترضا أن هذه العينات مستقلة ومسحوبة من توزيعات طبيعية.

(أ) ارسم هذه البيانات بيانيا. هل يتضح لك أن متوسط زمن التجميع للطريقة الحديثة أقل من الطريقة التقليدية؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى تكون هذه البيانات مناقضة للادعاء القائل بعدم وجود فروق بين الطريقتين مقابل الفرض بوجود زمن أقل مع الطريقة الحديثة؟

(جـ) بالنسبة لـ 16 عامل، هل من الممكن أن نستخدم معهم أسلوب القراءات المزدوجة بغرض المقارنة بين الطريقتين؟ وضح ذلك.

(٧-٢٠) عند إنتاج المصابيح الكهربائية، يتكسر عدد كبير من المصابيح. يخطط مدير الإنتاج لاستخدام نوع حديث من نظام النقل الآلي آملا أن ينخفض معدل الفقد في المصابيح يوميا. قام مدير الإنتاج بتسجيل معدلات الفقد اليومية ولمدة عشر أيام في ظل نظام النقل القديم ثم في ظل نظام النقل الآلي الحديث لمدة عشرة أيام تالية وكانت كالآتي:

نظام النقل	معدلات الفقد اليومية									
القديم	8.7	11.1	4.4	3.7	9.2	6.6	7.8	4.9	6.9	8.3
الحديث	7.8	6.2	3.2	4.6	5.3	6.5	4.6	7.1	4.9	7.2

مفترضا أن تلك العينات مستقلة ومن مجتمعات ذات توزيعات طبيعية.

أجب عن الأسئلة المشابهة لكل من (أ)، (ب)، (جـ) من تمرين (٧-١٩).

(٧-٤) الاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطين اعتمادا على القراءات المزدوجة:

Statistical Inferences for Two Means Based on Paired Samples

دعنا نرجع إلى مشكلة التسعير التي قدمت في بداية الجزء (٧-٢) حيث كان مدير خدمات التسعير يرغب في مقارنة التسعير الذي قام به اثنين من المثمنين. نتذكر أن السبب في ازدواجية الأصول كان لعزل الاختلافات التي قد تحدث بين الأصول ونمنع الأختلاف في قيم الأصول من أن يجعل المقارنة بين متوسطات العينات غير واضحة. طبقا للخطة الموضحة في الشكل(٧-٢)، فإن التسعير (بالألف دولار) للأصول الخمسة والتي قدمها كل من المثمن الأول والثاني كانت على النحو التالي:

الأصل	المثمن الأول	المثمن الثاني	الفرق
1	90	93	-3
2	94	96	-2
3	91	92	-1

4	85	88	-3
5	88	90	-2
المتوسطات	89.6	91.8	-2.2
الانحرافات المعيارية	3.3615	3.0332	.83666

تريث قليلا وتفحص البيانات قبل متابعة القراءة. هل تعتقد أن البيانات تشير إلى فروق بين الثمنين؟ بكل تأكيد أنت تعلم ماذا تعنيه هذه البيانات، وهذا أمر هام لأنه يوضح ميزة محددة من استخدام المقارنات المزدوجة بدلا من العينات المستقلة.

فحص هذه البيانات يظهر أنه على الرغم من أن الفروق بين التسعير ليست كبيرة، إلا أن تسعير الثمن الأول أقل إتساقا من تسعير الثمن الثاني. لذلك، ربما نخمن بأن التحليل الإحصائي قد يشير إلى اختلاف متوسطي التسعير. لاحظ أن هذه النتيجة نصل إليها عن طريق ازدواج البيانات. لاحظ أيضا أنه في حالة استخدام عينتين مستقليتين، فإن فرصة ظهور هذا النوع من المقارنة بين الثمنين تكون غير ممكنة.

هذا التحليل يقوم على الفروق بين القراءات المزدوجة لكلا الثمنين. في الأساس، فنحن لدينا عينة من خمسة فروق مسحوبة من مجتمع يمثل فروق لكل الأصول الممكنة في المجتمع. وهكذا فإن تحليل المقارنات المزدوجة ينخفض إلى تحليل عينة واحدة تهتم بمتوسط الفروق بين الثمنين.

نفرض أن μ_D ترمز إلى متوسط مجتمع الفروق لكل الأصول الممكنة. نحن نبحث عن أفضل إحصاء للاستدلال به عن μ_D وعن توزيع المعاينة لهذا الإحصاء. بالطبع يجب ألا نندهش إذا علمت أن أفضل إحصاء لـ μ_D هو $\overline{D}$ ، أي متوسط فروق العينة.

(٧-٤-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ $\overline{D}$: The Mean and the Standard Error of $\overline{D}$

من المعلوم أن أفضل إحصاء لـ μ_D هو المقدار غير المتحيز للمؤشر μ_D أي :

$$E(\overline{D}) = \mu_D \tag{7.15}$$

بفرض أن σ_D^2 هو تباين الفروق في المجتمع. في واقع الأمر وكما في كل الحالات، فنحن لا نعلم قيمة σ_D^2 . المقدر غير المتحيز للمؤشر σ_D^2 هو تباين فروق العينة S_D^2. لاحظ أن تباين فروق العينة S_D^2 لبيانات التسعير يمكن حسابه كالآتي:

$$S_D^2 = \frac{(-3+2.2)^2 + (-2+2.2)^2 + ... + (-2+2.2)^2}{5-1} = .7$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري للفروق يكون: $S_D = \sqrt{.7} = .83666$ وحيث أن الإحصاء $\overline{D}$ هو متوسط، فإن الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{D}$ يقدر كما يلي:

$$SE(\overline{D}) = \frac{S_D}{\sqrt{n}} \tag{7.16}$$

حيث n هي عدد أزواج القراءات (بمعنى n=5 أصول في مشكلة التسعير). لذا فإن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء $\overline{D}$ هو :

$$SE(\overline{D}) = \frac{.83666}{\sqrt{5}} = .37417$$

(٧-٤-٢) توزيع المعاينة لـ$\overline{D}$: The Sampling Distribution of $\overline{D}$

حيث أن الأنحراف المعياري للفروق في المجتمع غير معلوم، فإننا نتوقع طبقا للمناقشات السابقة، ان الأستنتاج الأحصائي حولμ_D إعتماداً على $\overline{D}$ يجب أن يتضمن توزيع T بدلا من التوزيع الطبيعي المعياري. بأسلوب مماثل لـ $\overline{X}$، فإن معايرة الأحصاء $\overline{D}$ تؤدى إلى الأحصاءT:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \qquad (7.17)$$

وهو إحصاء له تقريباً توزيع T بدرجات حرية (n-1)، تذكر أن n تمثل عدد الفروق أي عدد القراءات المزدوجة. وعلى ذلك، فالأستنتاج المتعلق بمتوسطي مجتمعين عندما تكون العينات في صورة قراءات مزدوجة، يؤدي عن طريق فروق الأزواج المتناظره باعتبارها عينه عشوائية واحدة ثم تطبيق الطرق التي تعرضنا لها في الجزء (٦-٤).

(٧-٤-٣) فترة الثقة وإختبارات الفروض لـμ_D:
Confidence Intervals and Hypothesis Testing for μ_D

من المناقشة السابقة، يمكن أن نتوصل إلى أن الاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطي مجتمعين يؤدي بمعالجة فروق القراءات المزدوجة للعينتين على أنها عينة عشوائية واحدة ثم استخدام الإحصاء T- الصيغة (7.17)- وفق الطرق في الجزء (٦-٤).

فترة الثقة لـμ_D:

تأثيثا على المناقشة التي تمت في الجزء(٦-٤) وخاصة في البند (٦-٤-٣)، فإن فترة الثقة: 100(1-α)% للمؤشر μ_D يكون :

$$\overline{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \qquad (7.18)$$

حيث هامش خطأ المعاينة:

$$\text{Margin of Sampling Error} = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \qquad (7.19)$$

أما $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ فهي قيمة T الجزئية بدرجات حرية (n-1).

للتوضيح، نفرض أننا نرغب في تحديد فترة ثقة95% لمتوسط الفروق في مثال التسعير. حددنا من قبل: $\overline{D}$ =-2.2 ، S_D=.83666 . عند مستوى ثقة 95%، فإننا نركز في المنتصف 95. من المساحة لتوزيع T بدرجات حرية 4=1-5 وهذا يعني أننا نترك مساحات 025. في كل جانب من التوزيع، وعندها نجد أن القيمة الجزئية تكون: $t_{.975,4}$ =2.776 وبالتالي نجد أن فترة الثقة 95% تصبح :

$$-2.2 \pm (2.776)\left(\frac{.83666}{\sqrt{5}}\right) = -2.2 \mp 1.04 = -3.24 \text{ to } -1.16$$

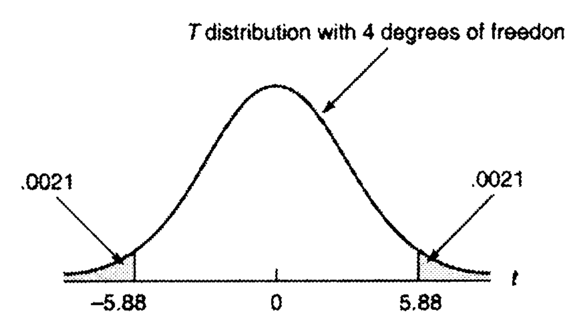
اختبارات الفروض لـμ_D : Hypothesis Testing for μ_D

يلاحظ أن فترة الثقة 95% أي (-3.24 to -1.16) للمؤشر μ_D في مثال التسعير لا تحتوي على الصفر، لذلك فالفرض العدمي $H_o : \mu_D = 0$ يتناقض مع نواتج العينة، وأن الادعاء بعدم وجود فرق بين تسعير المثمنين غير مقبول.

نفس النتيجة نصل إليها باستخدام القيمة P (P-Value)، ففي المثال الحالي، نجد أن قيمة الإحصاء T (صيغة (7.17)) هي:

$$T = \frac{-2.2 - 0}{.8366 \ / \ \sqrt{5}} = -5.88$$

القيمة P هي احتمال أن الإحصاء T سوف يعطي أقل قيمة من 5.88- أو أكبر من 5.88+. أحتمال أن قيمة T تكون أكثر تطرفاً عن 5.88 في أي من الاتجاهين تحددت بواسطة الحاسب الآلي لتكون 0042. وهذا الاحتمال موضح في شكل (٧-٥). إذا لم يكن لديك حاسب آلي، فيمكن استخدام قيمة تقريبية لـP من الجدول C. من هذا الجدول ومن السطر الذي به 4 درجات حرية، نجد أن القيم 7.173-,4.604- تحصران القيمة 5.88- =T. يلاحظ أن المساحة على يسار7.173- هي 001. والمساحة على يسار 4.604- هي 005. . وبالتالي المساحة على يسار 5.88- =T تقع بين 001. ، 005. وحيث أن الفرض البديل من طرفين فإن قيمة P تقع بين 01,.002 (ضعف المدى من 001. إلى 005.). وبسبب أن قيمة P صغيرة جدا، فإن بيانات العينة تناقض ادعاء الفرض العدمي وتدعم الفرض البديل. لذلك فمن الواضح أن كلا الثمنين لا يمكن أن يكونا متشابهين في عملية التسعير التي قاما بها.



شكل (٧-٥): القيمة P في مثال التسعير

استخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

مع المثال التالي نوضح استخدام برنامج Minitab في حالة عينات القراءات المزدوجة.

مثال (٧-٨)

مدير أحد المراكز الصحية كلف بتحسين صحة العاملين به. أحد المجالات المتاحة أمامه هي تخفيض ضغط الدم للعاملين خاصة اللذين يتعرضوا لضغوط قاسية. اقترح المدير برنامجا لتخفيض ضغط الدم الانقباضي. تم اختيار عشرة من الموظفين من ذوي ضغط الدم المرتفع وتم قياس ضغط الدم قبل وبعد الاشتراك في برنامج تخفيض الضغط وكانت :

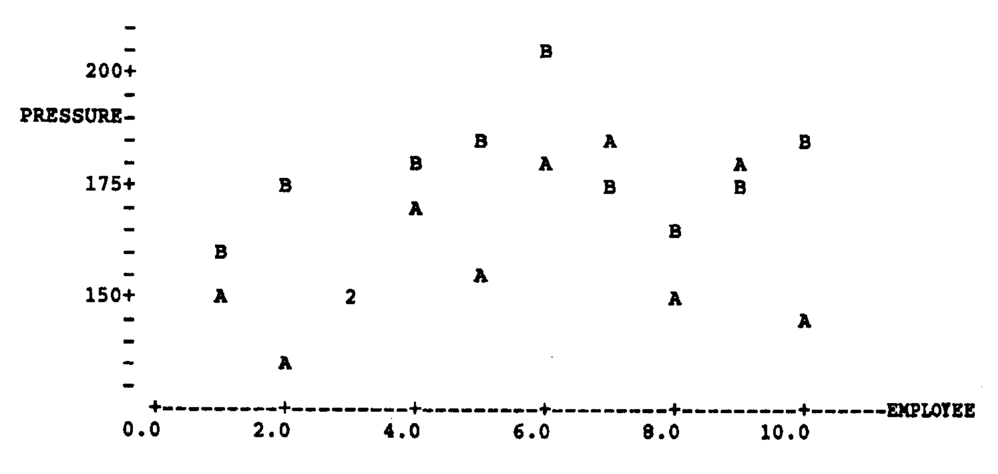
الموظف	ضغط الدم الانقباضي قبل	بعد
1	158	148
2	176	133
3	150	152
4	179	170
5	183	155
6	206	178
7	177	185
8	165	151
9	175	180
10	186	144

هل بيانات تلك العينة تناقض الادعاء بأن برنامج تخفيض الضغط لم يخفض ضغط الدم الانقباضي؟

الحل

حيث أن ضغط الدم تم قياسه قبل وبعد برنامج تخفيض الضغط لكل موظف في العينة، فهذا يعني أننا أمام تصميم عينات القراءات المزدوجة. وبسبب اعتقادنا بوجود فروق ذات قيمة في ضغط الدم الانقباضي بين الموظفين، فإننا نرغب في تجنيب هذه الفروق حتى نتمكن بدقة من تحديد فاعلية برنامج تخفيض ضغط الدم.

الكثير من المعلومات يمكن تحقيقها برسم بيانات العينة بيانيا. في شكل (٧-٦) يخصص المحور الأفقي للموظفين العشرة، والمحور الرأسي لضغط الدم الانقباضي والرموز B,A تدل على ضغط الدم قبل وبعد على التوالي.



شكل(٧-٦): تمثيل ضغط الدم بيانيا بالمثال(٧-٨)

من هذا الشكل يلاحظ أن معظم قياسات ضغط الدم قبل أعلى من بعد، وبالتالي فإن برنامج تخفيض الضغط يبدو أنه ذو فائدة ومنفعة. من ناحية أخرى، بإيجاد الفروق عن طريق طرح الضغط بعد من الضغط قبل لكل موظف، فإذا كان هناك انخفاضا في قياس الضغط الانقباضي كنتيجة لبرنامج تخفيض الضغط، فإن متوسط الفروق خلال العينة كلها يجب أن يكون أكبر من الصفر. وبالتالي فإننا نضع الفروض على الصورة: $H_o : \mu_D = 0$ مقابل $H_a : \mu_D > 0$.

من برنامج Minitab نحصل على المخرجات التالية:

TEST OF MU=0.000 VS MU G.T 0.000

	N	MEAN	STDEV	SE.MEAN	T	P.VALUE
C6	10	15.900	18.628	5.891	2.70	0.012

	N	MEAN	STDEV	SE.MEAN	95.0 PERCENT C.I.
C6	10	15,90	18.63	5.89	(2.57, 29.23)

يلاحظ أن القيمة P عند الفرض البديل من طرف واحد هي قيمة صغيرة (.012). بالإضافة إلى ذلك فإن فترة الثقة 95% للمؤشر μ_D (2.57,29.23) لا تحتوي على الصفر، لذا فإن بيانات العينة لا

تؤيد ادعاء الفرض العدمي القائل بأن برنامج تخفيض الضغط غير مفيد. وعلى ذلك فهناك سببا للاعتقاد في منفعة برنامج تخفيض الضغط.

(٧-٤-٤) فرض تحليل T للقراءات المزدوجة وأهميته:
The Assumption of the Paired T Analysis and its Importance

كما وضحنا من قبل، يشتمل تحليل العينات ذات القراءات المزدوجة على عينة واحدة، أي عينة من الفروق الناتجة من ازدواج القراءات. الفرض أننا نجري المعاينة من مجتمع توزيعه هو الطبيعي، وهو نفس الفرض الذي تطلبه استخدام T عند الاستدلال عن مجتمع واحد، انظر الجزء (٥-٥-٤). التغير الوحيد هنا ان هذا الفرض يطبق على مجتمع الفروق الناتجة من إزدواج القراءات. ولكن كنا قد ذكرنا أن توزيع T غير حساس لسقوط فرض الإعتدالية طالما أن حجم العينة (أي عدد الفروق) كبيرا إلى حد ما. وهكذا- وكما في الجزء(٧-٣) - فإن إجراءات الإستدلال التي قدمت في هذا الفصل تعتبر متحققة بصفة عامة لكل أحجام العينات باستثناء العينات الصغيرة جدا. ايضا هي متحققة حتى لأحجام العينات الصغيرة إذا كانت المجتمعات قريبة جدا من التوزيع الطبيعي.

تمارين:

(٧-٢١) يرغب مدير المبيعات لسلسلة من محلات التجزئة في مقارنة المبيعات المفضلة في القسم النسائي في فرعين أساسيين. احد محللي البيانات قام بجمع المبيعات الشهرية التالية (بالألف دولار) في ذلك الفرعين:

الشهر	الفرع الشمالي	الفرع الجنوبي
يناير	35	28
فبراير	22	29
مارس	39	33
أبريل	44	44
مايو	41	38
يونيو	49	47
المتوسط	39.5	35.3

(أ) أفحص بيانات العينة بدون عمل أي تحليل رسمي. هل تعتقد أن هذه البيانات تدل وبوضوح على إختلاف مستوى متوسط المبيعات في كلا الفرعين؟ ولماذا؟

(ب) أرسم هذه البيانات. هل تفسيرك للشكل البياني متفق مع إجابتك في (أ)؟

(ج) حدد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي مبيعات الفرعين.

(د) إعتماداً على فترة الثقة السابقة، هل متوسط مبيعات الفرعين مختلفة؟ وضح ذلك.

(هـ) في إجابتك عن (ج) لماذا يكون ضرورياً أن تكون الشهور في شكل قطاعات.

(و) بفرض أن مستويات المبيعات المسجلة في الفرعين أعتبرا كأنهم عينتين مستقلتين من مجتمعات طبيعية ذات تباينات متساوية. (هذا فرض أكاديمي بحت، فالعينات ليست مستقلة بسبب إستخدام القطاعات). أجب عن (د) بفرض إستقلال العينات ثم إشرح لماذا تختلف الإجابة هنا.

(٧-٢٢) نظم إسترجاع الوثائق هو أحد برامج الكومبيوتر التي تستخدم للتعرف على المقالات، الكتب ومصادر أخرى للمعرفة. يرغب المدير الفني للمكتبة في مقارنة نظامين (A,B) من نظم إسترجاع الوثائق مؤهلين للإستخدام. إستخدم كل نظام للتعرف على مدى إمكانية إسترجاع المقالات في إختبار على عشر طلبات. الإستجابة لهذه الطلبات قيمت بمعيارين، الأول: عدد الوثائق التي وجدت ووثيقة الصلة بالموضوع (الأكثر هو الأفضل)، الثاني: عدد الوثائق التي وجدت وغير وثيقة الصلة بالموضوع (الأقل هو الأفضل). وكانت النتائج كما يلي:

الطلب	وثيقة الصلة بالموضوع وثائق وجدت		غير وثيقة الصلة بالموضوع وثائق وجدت	
	النظام A	النظام B	النظام A	النظام B
1	8	11	12	16
2	5	8	7	9
3	11	16	5	2
4	22	29	16	20
5	14	12	11	17
6	10	15	7	13
7	12	11	14	13
8	15	22	13	13
9	6	11	8	11
10	18	27	5	16

(أ) لماذا تكون هناك حاجة لإستخدام القطاعات فيما يتعلق بالطلبات؟

(ب) حدد فترة الثقة 98% للفرق بين متوسطي عدد الوثائق المتصلة بالموضوع والتي تم التعرف عليها من كلا النظامين. هل هذه الفترة تظهر فرقاً بين متوسطي النظامين؟ وضح ذلك.

(ج) أجب عن (ب) أخذاً في الإعتبار الوثائق غير وثيقة الصلة بالموضوع.

(د) إعتماداً على إجابتك في (ب)، (ج)، حدد أي النظامين يجب على مدير المكتب أن يختاره؟ ما هي الإعتبارات غير الاحصائية التي يجب على الإدارة أن تتنبه لها قبل قرار الإختيار؟

(٧-٢٣) مصنع لوفورد ينتج أكياس المخدات مع الحشو اللازم لها. عملية تنجيد المخدات مرهقة يدوياً وهناك أثنين من العمال المتدربين يتوقع أن ينتجا في المتوسط نفس العدد من المنتج النهائي في فترة معينة. فيما يلي عدد وحدات المنتج النهائي (المخدة) المنتجة يومياً لكلا العاملين خلال أسبوع واحد.

اليوم	العامل الأول	العامل الثاني
الإثنين	108	110
الثلاثاء	115	118
الأربعاء	118	120
الخميس	116	117
الجمعة	110	113

(أ) أرسم هذه البيانات بيانياً. هل الشكل البياني يدعم الإعتقاد بأن العامل الثاني ذو أداء أفضل في المتوسط؟

(ب) لماذا يكون هناك حاجة لوضع الأيام في قطاعات؟ إشرح ذلك.

(ج) إلى أي مدى تكون هذه العينة مدعمة للإعتقاد بأن العامل الثاني ينتج أكثر في المتوسط؟ إشرح ذلك.

(د) بفرض أن هذه البيانات تعبر عن عينات مستقلة من مجتمعات طبيعية، بتباينات متساوية. (هذا فرض أكاديمي بحت، فالعينات غير مستقلة بسبب القطاعات التي استخدمت)، هل إجابتك في (ج) تختلف الآن؟ وضح ذلك.

(٧-٢٤) عين مدير مكتب مستشارا له لكي يقيم نظام كمبوتر جديد مقترح. إذا أقر المستشار بأن النظام الجديد يستخدم زمن تشغيل أقل من النظام الحالي، فسوف يعمل به. أختار المستشار عينة من ثمان وظائف تعبر عن عمل المكتب وتم تشغيلها على كلا النظامين. أزمنة التشغيل (بالثوان) كانت على النحو التالي:

الوظيفة	نظام الكومبيوتر القديم	نظام الكومبيوتر الجديد
1	7	5
2	8	7
3	11	8
4	8	7
5	14	11
6	15	10
7	6	9
8	10	6

(أ) أرسم هذه البيانات. ما هي النتيجة المبدئية التي تتوصل إليها؟

(ب) حدد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسطي زمن التشغيل القديم والجديد.

(ج) ما الذي تظهره فترة الثقة في (ب) حول مدى قبول رأي المستشار بأن النظام الجديد يحسن من متوسط زمن التشغيل؟

(د) إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الإدعاء بعدم وجود تحسن في متوسط زمن التشغيل في مقابل أن هناك تحسن مع النظام الجديد؟

(هـ) لماذا يكون من الضروري وضع الوظائف في قطاعات.

(٧-٢٥) اختبر نظاما للتنبؤ بالمبيعات على النحو التالي: سجلت المبيعات المتنبأ بها للعام الحالي لخمس منتجات وذلك بإستخدام بيانات العام الماضي. فيما يلي المبيعات الفعلية والمبيعات المتنبأ بها للعام الحالي (بالألف دولار) للمنتجات الخمس:

المنتج	الفعلي	المتنبأ به
1	185	110
2	75	55
3	168	230
4	17	22
5	311	314

(أ) أرسم هذه البيانات بيانياً. ما هي النتيجة المبدئية التي تتوصل إليها؟

(ب) إستخدم فترة الثقة 95% لتحديد ما إذا كان هناك فرقاً بين متوسط المبيعات الفعلية ومتوسط المبيعات المتنبأ بها.

(ج) لماذا تكون هناك حاجة إلى وضع المنتجات في قطاعات؟

(٧-٢٦) اختيرت عينة عشوائية من عشرة أعضاء من هيئة التدريس بكلية التجارة، وطلب منهم ترتيب الأداء بصفة عامة لإثنين من المديرين على مقياس يتدرج من 1 (أصغر ترتيب) إلى 5، وكانت التراتيب التي وضعوها كما يلي:

عضو الهيئة:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ترتيب دكتور/وليام:	3.7	4.1	4.2	3.8	3.1	3.6	3.9	4.4	2.9	4.0
ترتيب دكتور/نوكس:	3.9	4.3	3.4	3.9	3.4	3.5	3.9	4.6	3.1	4.4

أراد عميد الكلية أن يستخدم هذه المعلومات في تقييم الأداء لكل من الدكتور وليام والدكتور نوكس.

(أ) اعرض هذه البيانات بيانياً. ما هي النتيجة المبدئية التي تتوصل إليها.

(ب) استخدم فترة الثقة 95% لتحديد ما إذا كانت هذه البيانات تكشف عن إختلاف واضح بين متوسط معدل الأداء من وجهة نظر الكلية.

(ج) إلى أي مدى تدعم هذه البيانات الرأي بوجود فروق بين متوسط الأداء؟

(د) هل كان من المهم أن تستخدم القطاعات في تصميم التجربة؟ وضح سبب الإجابة بنعم أو لا؟

(٧-٥) الإستنتاج الإحصائي المتعلق بنسبتين إعتماداً على عينات مستقلة:
Statistical Inferences for Two Proportions Based on Independent Samples

في الجزء (٦-٥) ناقشنا خطوات عمل إستنتاجات حول النسبة في المجتمع π. ونحن غالباً ما نهتم بالمقارنة بين نسبتي صفة معينة بين مجموعتين متمايزتين. فمثلا، ربما نهتم بمقارنة نسبتي المعيب لمنتج معين أنتج في مصنعين متنافسين، أو قد نهتم بمقارنة نسب خريجي المدرسة الثانوية في منطقتين جغرافيتين والذين إلتحقوا بالجامعة. بالتالي، فنحن في حاجة إلى توسيع الطرق التي قدمت في الجزء (٦-٥) وذلك للمقارنة بين النسب المعلمية π_2, π_1.

نفرض أن مدير الحسابات يرغب في مقارنة نسب الفواتير الخطأ بين منطقتين أو فرعين للشركة. أكثر تحديداً، فهو يهتم بتحديد ما إذا كان هناك أي إختلاف بين π_1: نسبة الفواتير الخطأ في الفرع الأول و π_2: نسبة الفواتير الخطأ في الفرع الثاني. وكما في حالة مقارنة متوسطي مجتمعين، يكون من الأفضل إعتبار المعلمة التي نهتم بها هي الفرق بين π_2, π_1 أي $(\pi_1-\pi_2)$. إذا كان هذا الفرق يساوي

صفر، فإن π_1 تساوي π_2. الأن، ما هو أفضل إحصاء يمكن أن نفكر فيه للإستدلال حول $(\pi_1-\pi_2)$؟ أنه بالطبع، الفرق بين نسبتي عينيتين (P_1-P_2)، حيث P_1 هي أفضل إحصاء لـ π_1, P_2 هي أفضل إحصاء لـπ_2.

في هذا الفصل نناقش خطوات الإستنتاج المتعلقة بالفرق $(\pi_1-\pi_2)$ إعتماداً على أفضل إحصاء (P_1-P_2). والأسلوب المتبع هنا مماثل لأسلوب الإستنتاج حول النسبة π إعتماداً على النسبة في العينة P. لذلك، فإننا نبدأ بالتعرف على المتوسط، الخطأ المعياري وتوزيع المعاينة للإحصاء (P_1-P_2). الخطوات اللازمة لفترات الثقة وإختبارات الفروض تعتمد على التوزيع الطبيعي المعياري، مثلما كان الأمر في حالة مجتمع واحد والذي نوقش في الجزء (٦-٥).

(٧-٥-١) المتوسط والخطأ المعياري لـ P_1-P_2: The Mean and Standard Error of P_1-P_2

دعنا نرجع إلى المثال الذي يتضمن الفواتير الخطأ في فرعين للشركة. نفرض أننا سحبنا عشوائياً عينتين مستقلتين: n_1 من حسابات الفرع الأول، n_2 من حسابات الفرع الثاني، وبحثنا عن عدد الحسابات التي بها فواتير خطأ فكانت X_1, X_2 على التوالي. من المعلوم أن نسب العينات $P_1=X_1/n_1$, $P_2=X_2/n_2$ هي إحصاءات غير متحيزة وأن الخطأ المعياري لها هو:

$$\text{SE}(P_1)=\sqrt{\pi_1(1-\pi_1)/\text{n}_1} \qquad SE(P_2)=\sqrt{\pi_2(1-\pi_2)/\text{n}_2}$$

على التوالي. وحيث أن الأحصاء (P_1-P_2) هو الفرق بين إحصاءات مفردة P_1 , P_2، فإنه يمكن إستخدام ما جاء بالفصل (٣-٩) (انظر الصيغ (3.20) , (3.21)) لإثبات أن (P_1-P_2) هو مقدر غير متحيز للمعلمة $\pi_1-\pi_2$، أي:

$$E(P_1-P_2)=\pi_1-\pi_2 \qquad \textbf{(7.20)}$$

أكثر من هذا، فإن تباينه هو مجموع تباينات P_1, P_2.

$$\text{Var}(P_1-P_2)=\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2} \qquad \textbf{(7.21)}$$

لذا فإن (P_1-P_2) هو إحصاء غير متحيز له خطأ معياري على الصورة:

$$\text{SE}(P_1-P_2)=\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} \qquad \textbf{(7.22)}$$

يلاحظ على الصيغة (7.22) أن الخطأ المعياري لـ P_1-P_2 لا يمكن تحديده، حيث أن π_1, π_2 هي مجاهيل. (إذا كانت معلومة فإننا لن نكون بحاجة إلى إجراء دراسة) عملياً، نقوم بإحلال النسب في العينات P_1, P_2 محل المعالم المجهولة π_1, π_2 وذلك لتقدير $\text{SE}(P_1-P_2)$ وهكذا يكون تقدير الخطأ المعياري للإحصاء P_1-P_2 هو:

$$\text{SE}(P_1-P_2)=\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \qquad \textbf{(7.23)}$$

يلاحظ أن هناك خطأ ضئيل يظهر عند إستبدال π_1, π_2 بالتقديرات P_1, P_2 والسبب في ذلك أن أي خطأ يحدث من إستخدام القيمة P_1 كتقدير لـπ_1 يتم تعويضه بخطأ في الإتجاه المعاكس عند إستخدام $(1-P_1)$ كتقدير $(1-\pi_1)$ ونفس الوضع يتحقق لكل من P_2, π_2.

(٧-٥-٢) توزيع المعاينة لـ P_1-P_2: The Sampling Distribution of P_1-P_2

من مناقشة البند(٥-٦) نتذكر ان توزيع المعاينة للنسبة في العينة، هو توزيع قريب من التوزيع الطبيعي في حالة العينات الكبيرة، وحيث أن الإحصاء P_1-P_2 هو ببساطة الفرق بين نسبتي عينتين، ينتج عن هذا ان توزيع المعاينة للإحصاء P_1-P_2 يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي في حالة العينات كبيرة الحجم*. متوسطه والخطأ المعياري موضح بالصيغ(7.20),(7.23). لذلك نجد أن الأحصاء P_1-P_2 يمكن تحويله إلى الإحصاء Z كما يلي:

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\dfrac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \dfrac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \qquad (7.24)$$

حيث ان توزيع المعاينة للإحصاء Z يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي المعياري، فإن الإستنتاج الأحصائي حول (π_1-π_2) يعتمد على التوزيع الطبيعي المعياري.

(٧-٥-٣) فترة الثقة واختبارات الفروض حول (π_1-π_2):
Confidence Intervals and Hypothesis Testing for π_1-π_2

حيث ان توزيع المعاينة للإحصاء Z يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي المعياري في حالة العينات كبيرة الحجم، فإن اجراءات إعداد فترات الثقة وإختبارات الفروض المتعلقة بالفرق (π_1-π_2) هي نفس الإجراءات التي وضحت في الجزء (٦-٥).

فترة الثقة لـ π_1-π_2 :

فترة الثقة % 100(1-α) تقريبا للفرق π_1-π_2 هي :

$$(P_1\text{-}P_2) \pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \qquad (7.25)$$

حيث هامش خطأ المعاينة:

$$\text{Margin of sampling error} = Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \qquad (7.26)$$

وللتوضيح، دعنا نعود إلى مثال مدير الحسابات، لنفرض أنه عاين n_1=400 فاتورة من الفرع الأول، n_2=400 فاتورة من الفرع الثاني ووجد أنها تحتوي X_1=30,X_2=10 فواتير خطأ. من هذه العينات نجد أن بها النسب P_2=10/400=0.025 ,P_1=30/400=.075. وبالتالي فإن فترة الثقة 95% تقريبا للفرق π_1-π_2 أي الفرق بين نسب الفواتير الخطأ بين الفرع الأول والفرع الثاني تكون :

$$(.075\text{-}.025) \pm 1.96\sqrt{\frac{(.075)(1-.075)}{400} + \frac{(.025)(1-.025)}{400}}$$

$$= .05 \pm .03 = .02 \text{ to } .08$$

بناء على النتائج السابقة، هل ترى أن هناك فرقا بين نسب الفواتير الخطأ في هذين الفرعين؟ الإجابة نعم، الآن فترة الثقة 02 to .08.. لا تتضمن الصفر. ومن الواضح أن نسبة الفواتير الخطأ في الفرع الأول أعلى من النسبة في الفرع الثاني (لاحظ أن فترة الثقة تقع كاملا على يمين الصفر).

* القاعدة الملائمة للتقريب أن كل من العدد المتوقع لحالات النجاح والعدد المتوقع لحالات الفشل يجب أن يكون على الأقل خمسة أى: $n_1\pi_1 \geq 5,\ n_1(1-\pi_1) \geq 5,\ n_2\pi_2 \geq 5,\ n_2(1-\pi_2) \geq 5$

أختبارات الفروض المتعلقة بالفرق π_1-π_2 :

بفرض أن مدير الحسابات يرغب في إختبار الأدعاء بعدم وجود فرق بين نسب الفواتير الخطأ في الفرعين، أي يرغب في إختبار الفرض العدمي:

$$H_o : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

مقابل الفرض البديل :

$$H_a : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

بالطبع، نحن لدينا فكرة جيدة عن هذا الإختبار، حيث أن فترة الثقة من 02. إلى08. لا تحتوي على "$\pi_1-\pi_2=0$".

من ناحية أخرى، نفس النتيجة يمكن الحصول عليها عن طريق اسلوب القيمة P. يلاحظ أنه اذا كان الفرض العدمي صحيحا، فإن $\pi_1=\pi_2$، دعنا نستخدم الرمز π ليمثل نسبة مشتركة بينهما ولكنها قيمة مجهولة. بمعنى آخر: $\pi = \pi_1 = \pi_2$ إذا كان الفرض العدمي صحيحا. في هذا الأسلوب، نقوم بتجميع المعلومات من العينتين المستقلتين لتقدير π، مثلما جمعنا معلومات من العينة لتقدير التباين المشترك σ^2 في الجزء (٧-٣-٣). ينشأ عن عملية التجميع هذه تناقض ضئيل جدا بين فترة الثقة واسلوب القيمة P لأختبار الفرض العدمي بعدم وجود فرق بين π_2,π_1.

عندما تكون $\pi_1 = \pi_2$، فإن الخطأ المعياري للأحصاء P_1-P_2 والموضح بالصيغة (7.22) يصبح :

$$SE(P_1 - P_2) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n_1} + \frac{\pi(1-\pi)}{n_2}} = \sqrt{\pi(1-\pi)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \qquad \textbf{(7.27)}$$

دعنا نستخدم الرمز P كمقدر تجميعي لـ π **Pooled estimator**. نسبة العينة التجميعية P هي متوسط مرجح لنسب العينات P_2,P_1 حيث الترجيحات هنا تتناسب مع أحجام العينات. وعلى ذلك يعرف المقدر P على النحو التالي:

$$P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2} \qquad \textbf{(7.28)}$$

أو بصيغة مماثلة :

$$P = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \qquad \textbf{(7.29)}$$

والصيغة (7.29) تعني ببساطة أن النسبه التجميعية P عبارة عن مجموع حالات النجاح في كلا العينتين مقسوما على مجموع حجمي العينتين. عندما يكون $H_o : \pi_1 - \pi_2 = 0$ صحيحا، فإن تقدير الخطأ المعياري للأحصاء P_1-P_2 نحصل عليه بأحلال التقدير التجميعي P محل π في الصيغة (7.27)أي:

$$SE(P_1 - P_2) = \sqrt{P(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} \qquad \textbf{(7.30)}$$

من المناقشة السابقة نجد أن الإحصاء:

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - 0}{\sqrt{P(1-P)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \qquad \textbf{(7.31)}$$

يقترب بشدة من التوزيع الطبيعي المعياري.

دعنا الآن نقيم ادعاء مدير الحسابات مستخدمين أسلوب القيمة P (P-Value). حيث أن :

$X_2=10, X_1=30, n_1=n_2=400$ فإن قيمة النسبة التجميعية تكون :

$$P=\frac{30+10}{400+400}=.05$$

مفترضين أن $H_0: \pi_1-\pi_2=0$ صحيحا، فإن تقدير الخطأ المعياري للإحصاء P_1-P_2 من الصيغة (7.30) يكون:

$$SE(P_1-P_2)=\sqrt{(.05)(1-.05)(\frac{1}{400}+\frac{1}{400})}=.015411$$

وهكذا تصبح قيمة الإحصاء Z هي :

$$Z=\frac{(.075-.025)-0}{.015411}=3.24$$

القيمة P (P-Value) عندما يكون الفرض البديل من طرفين هي ضعف الاحتمال بأن الإحصاء Z سوف يأخذ قيمة أكبر من3.24 . هذا الاحتمال حصلنا عليه من جدول B في الملحق وقيمته 0006.. وعلى ذلك تصبح القيمة P هي : $.0012=(.0006)(2)$ وحيث أن قيمة P هذه صغيرة جداً جداً، فإن بيانات العينة تناقض الادعاء بعدم وجود فرق بين نسب الفواتير المعيبة في فرعي الشركة.

مثال (٧-٩)

تستخدم شركة كميات كبيرة من المكونات الإليكترونية في إنتاجها، وتبحث في الاقتصار على التعامل مع عدد محدود من الموردين ممن يتميز إنتاجهم بجودة عالية. قامت الشركة بالشراء من موردين B,A. ورغبة في مقارنة معدلات الانتاج المعيب بينهما، قامت بسحب عينة عشوائية من الكمية الكبيرة التي أتت من كل مورد، فسحبت 125 وحدة من إنتاج المورد 100,A وحدة من إنتاج المورد B وتم فحص هذه العينات فوجد سبع وحدات معيبة في كل عينة.

(أ) حدد توزيع المعاينة لـ P_A-P_B.

(ب) حدد فترة الثقة 95% بين π_B,π_A أي الفرق بين نسب المعيب لكل من B,A.

(جـ) حدد القيمة P (P-Value) واعتماداً على هذه القيمة، ناقش ما إذا كان هناك دليلا على وجود اختلاف بين نسب المعيب.

الحل

(أ) توزيع المعاينة لـ P_A-P_B هو تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط $\pi_A-\pi_B$ وخطأ معياري $\sqrt{\pi_A(1-\pi_A)/125+\pi_B(1-\pi_B)/100}$ وحيث أننا لانعلم قيمة π_B,π_A ، فإنه لا يمكن تحديد قيمة الخطأ المعياري بدقة. ومع ذلك وباستخدام نسب العينات التالية:

$P_B=7/100=.07, P_A=7/125=.056$ يمكن تقديره كما يلي:

$$SE(P_1-P_2)=\sqrt{\frac{(.056)(1-.056)}{125}+\frac{(.07)(1-.07)}{100}}=.0328$$

(ب) من الصيغة (7.25)، فإن فترة الثقة 95% تقريبا للفرق $\pi_A-\pi_B$ تكون على النحو التالي:

$$(.056-.07)\pm 1.96\sqrt{\frac{(.056)(1-.056)}{125}+\frac{(.07)(1-.07)}{100}}=-.014\pm .0642=-.0782 \text{ to } .0502$$

وحيث أن هذه الفترة تحتوي على الصفر فهذا يعني دليل ضعيف على وجود فرق بين π_A,π_B.

(جـ) ترغب الشركة في تحديد ما إذا كان هناك فرقا في نسب المعيب في الكميات التي يوردها B,A، كما ترغب في معرفة ما إذا كان إنتاج كلا الموردين يتم عند نسب معيب منخفضة أم لا. لذلك يمكن وضع الفرض العدمي والبديل على الصورة التالية:

$$H_o: \pi_A - \pi_B = 0$$

$$H_a: \pi_A - \pi_B \neq 0$$

بافتراض أن $\pi = \pi_A = \pi_B$ صحيحا كما نص على ذلك في الفرض العدمي، فإننا نبحث عن قيمة المقدر التجميعي للنسبة π من الصيغة (7.29):

$$P = \frac{7+7}{125+100} = .0622$$

وبالتالي فإن تقدير الخطأ المعياري لـ $P_A - P_B$ نحصل عليه من الصيغة (7.30) ليكون:

$$SE(P_A - P_B) = \sqrt{(.0622)(1-.0622)\left(\frac{1}{125} + \frac{1}{100}\right)} = .0324$$

وعليه تكون قيمة الإحصاء Z هي:

$$Z = \frac{(.056 - .07) - 0}{.0324} = -.43$$

إحتمال أن الإحصاء Z يأخذ قيمة أقل من $-.43$ هو .3336 (استخرجت قيمة هذا الاحتمال مباشرة من جدول B بالملحق)، وحيث أن الفرض البديل من طرفين، فإنه يتم مضاعفة قيمة P لتصبح .6672، بالتأكيد قيمة P ليست صغيرة بدرجة كافية كي نقول أن بيانات العينة تناقض ادعاء الفرض العدمي. من ناحية أخرى فإن بيانات العينة لا تظهر أن أي من الموردين ينتجا مكونات عند مستوى منخفض من المعيب، ولذلك فإن الشركة لا تفضل التعامل مع كلا الموردين اعتمادا على هذه الدراسة.

النتيجة العملية للمثال (٧-٩)

يوضح مثال (٧-٩) مرة أخرى عدم جدوى استخدام العينات العشوائية للمقارنة بين نسب صغيرة جداً من المنتجات المعيبة، لذلك، فالأمر يتطلب أحجام عينات كبيرة جدا حتى تتحقق دقة كافية، وهو أمر من الصعب أن يتحقق عمليا في كثير من الحالات. لهذا السبب كثير من الشركات تتخلى عن نظم الفحص بالعينة كوسيلة للتأكد من جودة المنتج الخام أو المنتج النهائي. والأسلوب الأكثر فاعلية هو إدارة الجودة الشاملة TQM، حيث يتم التأكد من الجودة عند كل مرحلة من مراحل العملية الإنتاجية.

تمارين :

(٧-٢٧) عند تقديم فترة الثقة بين نسبتين، استخدم في حساب الخطأ المعياري قيم P_1,P_2 لتقدير π_1,π_2 على التوالي. ولكن عند تقديم اختبارات الفروض، استخدمنا قيمة المقدر التجميعي P في حساب الخطأ المعياري. اشرح هذا الفرق في الطريقتين.

(٧-٢٨) ماهي الشروط الخاصة بالمجتمع، باجراء المعاينة المطلوبة لاستخدام التوزيع الطبيعي عند إنشاء فترات الثقة وعند اختبارات الفروض المتعلقة بين نسبتين؟

(٧-٢٩) لماذا يعد من الضروري معرفة توزيع المعاينة للفرق P_1-P_2 ؟

(٧-٣٠) بفرض أننا سحبنا العينات n_2=100,n_1=150 من المجتمعات 2,1 وسجلنا 15,12 حالات نجاح على التوالي.

(آ) حدد تقديرات لنسب المجتمعات π_2,π_1.

(ب) حدد، وبدقة إذا أمكن ذلك، توزيع المعاينة لـ P_1-P_2.

(جـ) احسب فترة الثقة 95% لـπ_1-π_2. هل هذه الفترة تظهر فرقا بين π_2,π_1 ؟ وضح ذلك.

(د) عند اختبار : $H_a : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$ مقابل $H_o : \pi_1 - \pi_2 = 0$
حدد قيمة P (P-Value).

(هـ) هل الخطأ المعياري الذي حسب في (جـ) يختلف عن الخطأ المعياري الذي حسب في (د) ؟ وضح سبب الإجابة بنعم أو لا.

(٧-٣١) بالرجوع إلى التمرين (٧-٣٠) وفي اختبارات الفروض. كم يكون الفرق بين استخدام النسبة التجميعية P في حساب الخطأ المعياري [كما هي موضحة بالصيغة(7.30)] بدلا من استخدام القيم P_2, P_1 لتقدير π_2, π_1 [كما في الصيغة (7.23)] ؟ قارن بين حسابات الخطأ المعياري في كل من (جـ)، (د) ثم علق على النتائج.

(٧-٣٢) بالرجوع إلي تمرين (٧-٣٠). بفرض أن حجم العينات كانت :n_2=20,n_1=40 وأن عدد حالات النجاح كانت4,3 على التوالي. باعادة العمل مع أسئلة ذلك التمرين، هل نفس الأسلوب يكون مناسبا؟ وضح ذلك.

(٧-٣٣) مصنع آلات تصوير رئيسي يواصل بحوثه الربع سنوية مع عملائه في محاولة لرقابة قدرتهم على اداء خدمة التصوير بصورة جيدة. في الربع الرابع، وفي عينة عشوائية من 150 عميل تبين أن 42 عميل يؤدوا الخدمة بمتوسط زمني قليل. أحدثت تغيرات في سياسة الخدمة بهدف تخفيض متوسط زمن الخدمة وفي الربع التالي من استخدام هذه التغيرات، تبين في عينة عشوائية من 177 عميل أن منهم 32 عميل يؤدوا الخدمة بمتوسط زمني ضئيل جداً.

(أ) احسب فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي المجتمعين قبل وبعد تغير السياسة.

(ب) حدد ما إذا كانت فترة الثقةفي (أ) تظهر نقصا في نسبة العملاء اللذين وجدوا متوسط زمني ضئيل جداً في أداء الخدمة.

(جـ) هل دليل العينة هذه يظهر بوضوح أن نسبة العملاء الجدد غير المقتنعين بتلك التغيرات في سياسة الخدمة ستكون منخفضة ؟ اشرح ذلك.

(٧-٣٤) يقر الناخبون في إحدى الولايات أن النساء يختلفن تماما عن الرجال في تفضيلهم لأحد المرشحين الحكوميين. بالتحديد 640 من 1000 سيدة يفضلن المرشح الديموقراطي بينما 416 من 800 رجل يفضلن نفس المرشح.

(أ) احسب فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي النساء والرجال المفضلين لهذا المرشح الديموقراطي.

(ب) اعتمادا على فترة الثقة في (أ) هل يمكنك أن تكتشف أن هناك فرقا بين الناخبين الذكور والإناث ؟ وضح ذلك.

(جـ) هل دليل العينة يظهر وبوضوح أن نسب النساء والرجال اللذين يفضلوا المرشح الديموقراطي هي نسبة مختلفة ؟

(٧-٣٥) وكالة للدعاية والإعلان تراقب فاعلية إعلاناتها التجارية في التليفزيون، وذلك بمواصلة اللقاءات التي تجريها مع عينات عشوائية من المشاهدين. في أحد هذه اللقاءات ومن مقابلة 418 مشاهد لنشرة الأخبار المحلية على القناة 12 تذكر 188 مشاهد أنهم شاهدوا الإعلان التجاري. أما في عينة أخرى من 338 مشاهد لنشرة الأخبار المحلية على القناة 5 أقر منهم 172 أنهم شاهدوا الإعلان التجاري.

(أ) احسب فترة الثقة95% للفرق بين نسبتي المشاهدين في القناتين للإعلانات التجارية. هل هذه الفترة تظهر وجود فرقا ؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى تناقض بيانات العينتين الادعاء بعدم وجود فرق بين النسبتين مقابل أن هناك فرقا ؟

(جـ) بغض النظر عن إجابتك في (أ) ، (ب)، لماذا يجب على وكالة الإعلان الاستمرار في الرقابة على فاعلية إعلاناتها التجارية ؟ وضح ذلك.

(٧-٣٦) أراد مدير ادارة الأفراد لتجمع كبير من عدة شركات، مقارنة مدى التقدم الوظيفي للمعينين الجدد بعضهم يحمل درجة الماجستير في إدارة الأعمال والباقي يحملون مؤهلات مختلفة. وجد أنه بعد مرور خمس سنوات تم ترقية 158 إلى مناصب عليا من بين 263 ممن يحملون درجة الماجستير، بينما رقي1188 من بين 2177 ممن يحملون مؤهلات مختلفة.

(أ) هل هذه البيانات تظهر أن حملة الماجستير حققوا معدلا أكبر في الترقية عن حملة المؤهلات الأخرى؟.

(ب) صف المجتمع أو العملية الذي يمكن أن ينطبق عليه استدلالك في (أ).

(جـ) هل يمكن لمدير إدارة الأفراد أن يفترض أن النتيجة التي توصل إليها في (أ) سوف تطبق خلال العامين القادمين؟ وضح ذلك .

(٧-٦) الاستنتاج الإحصائي المتعلق بتباينين اعتمادا على عينات عشوائية مستقلة :

Statistical Inferences for Two Variances Based on Independent Random Samples

غالبا ما تظهر حاجتنا للمقارنة بين تباينات مجتمعين (أو عمليتين). فمثلا، في كثير من العمليات التصنيعية يكون التركيز على اختلافات العملية الانتاجية أكثر أهمية من التركيز على متوسط العملية.

فيما يتعلق بالإستنتاج الإحصائي حول تباينات مجتمعين σ_1^2 ، σ_2^2 ، يكون من المناسب رياضيا أن نستخدم النسبة σ_1^2 / σ_2^2 كأساس لهذا الاستنتاج. فإذا كانت هذه النسبة تساوي واحد، فهذا يعني تساوي تباينات المجتمعين. جدير بالذكر أن أفضل احصاء لـ σ_1^2 / σ_2^2 هو S_1^2 / S_2^2 ، أي نسبة تباينات العينتين، وتوزيع المعاينة لهذا الإحصاء لم يقابلنا حتى الآن. الاستنتاج الاحصائي المتعلق بمقارنة تباينات مجتمعين يعتمد على ما يعرف بتوزيع F.

(٧-٦-١) توزيع المعاينة لنسبة S_1^2 / σ_1^2 إلى S_2^2 / σ_2^2 :توزيع F:

The Sampling Distribution of the Ratio of S_1^2 / σ_1^2 to S_2^2 / σ_2^2 :The F Distribution

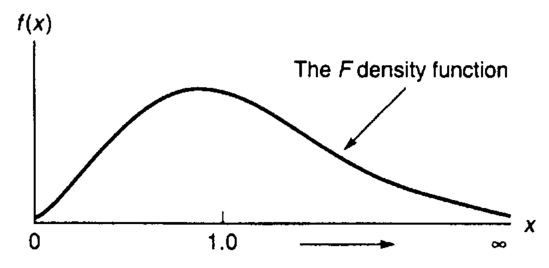
بفرض أننا سحبنا عينات عشوائية من مجتمعين، كل مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي. لكل عينة نتناول نسبة تباين العينة إلى تباين المجتمع الذي سحبت منه، أي: S_1^2 / σ_1^2 ، S_2^2 / σ_2^2 . بفرض أننا كونا إحصاءاً عبارة عن نسبة من هذه القيم على الصورة:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \qquad (7.32)$$

توزيع المعاينة لهذا الإحصاء يعرف على أنه توزيع: F ، **F distribution.**

مثلما كان توزيع T وتوزيع كاي تربيع دالة في درجات الحرية، فإن توزيع F أيضاً هو دالة في درجات الحرية، ولكن بخلاف توزيعT وتوزيع كاي تربيع، فإن توزيع F له نوعين من درجات الحرية: درجات حرية مقترنة بتباين العينة S_1^2 في البسط، ودرجات حرية مقترنة بتباين العينة S_2^2 في المقام. ويرمز لدرجات الحرية بـ γ_2, γ_1 على التوالي، وعلى ذلك فدرجات الحرية في البسط والمقام هي على التوالي : $\gamma_1=n_1-1$, $\gamma_2=n_2-1$. ويتحدد توزيع F تماما بدلالة درجات الحرية ولا يتوقف على أي معالم أخرى.

أي متغير عشوائي يتبع توزيع F لا يمكن أن يأخذ قيما سالبة، وهذا واضحا من الصيغة (7.32)، حيث يلاحظ أن مكوناتها لا يمكن أن تكون سالبة. يتمركز توزيعF حول القيمة واحد، ويرجع ذلك إلى أن تباينات المجتمعين يتم تقديرهما بتباينات العينتين، وبالتالي فمن المتوقع أن يكون كل من S_1^2 / σ_1^2 ، S_2^2 / σ_2^2 قريبا من القيمة واحد، لذلك نجد أن النسبة $(S_1^2 / \sigma_1^2)/(S_2^2 / \sigma_2^2)$ تقترب أيضا من الواحد الصحيح. وتوزيع F هو توزيع ملتوي إلى اليمين ومداه نظريا من الصفر إلى مالانهاية وشكل (٧-٧) يوضح توزيع F.



شكل (٧-٧): شكل توزيع F

وتوزيعF مثل توزيع T وتوزيع كاي تربيع، نجده متوجدا في معظم البرامج الإحصائية الجاهزة، بالإضافة إلى كونه مجدولا بتوسع. وحيث أن توزيع F يعتمد على قيمتين من درجات الحرية، فإن هذا يقتضي إعداد مجلد كامل لجداولF. في هذا الكتاب نجد جزء من جداولF عند توليفات مختلفة من درجات الحرية تناظر الاحتمالات : .01, .025, .05, .10, .90, .95, .975, .99 وذلك في جدول E بالملحق. لاحظ أن هناك جدول منفصل لكل احتمال من هذه الاحتمالات.

لاستخدام هذا الجدول، نحدد أولا الاحتمال المرغوب فيه (محدد بالمساحة A وهي المساحة التي تقع على يسار القيمة الجزيئية المطلوبة)، بعد ذلك نبحث عن درجات حرية البسط $\gamma_1=n_1-1$ من بين قمم الأعمدة، ونبحث عن درجات حرية المقام $\gamma_2=n_2-1$ من بين قمم الصفوف. قيمة F التي تنتج من تقاطع درجتي حرية البسط والمقام هي القيمة الجزيئية المطلوبة ، حيث أن المساحة التي تقع على يسار تلك القيمة تمثل الاحتمال المرغوب فيه.

كمثال، نفرض أن $n_2=20, n_1=16$ ونرغب في إيجاد القيم الجزيئية (أي الجدولية) التي تناظر الاحتمالات .95,.025. هنا درجات حرية البسط $\gamma_1=n_1-1=15$ ودرجات حرية المقام $(\gamma_2=n_2-1=19)$. عند A=.025، نجد أن القيمة الجزيئية هي .36. وعند A=.95 نجد أن القيمة الجزيئية هي 2.23. هذا يعني أن احتمال أن متغير عشوائي يتبع توزيع F بدرجات حرية 19,15 احتمال أن يأخذ قيمة لا تزيد عن .36 هو .025. وأن احتمال أن هذا المتغير يأخذ قيمة لا تزيد عن 2.23 هو .95. وقيم F الجزيئية هذه يرمز لها بالرمز : $f_{.025,15,19}=.36$ ، $f_{.95,15,19}=2.23$, وهي موضحة بيانيا في شكل(٧-٨) . أو يمكن أن تكتب بصورة رمزية أخرى كما يلي:

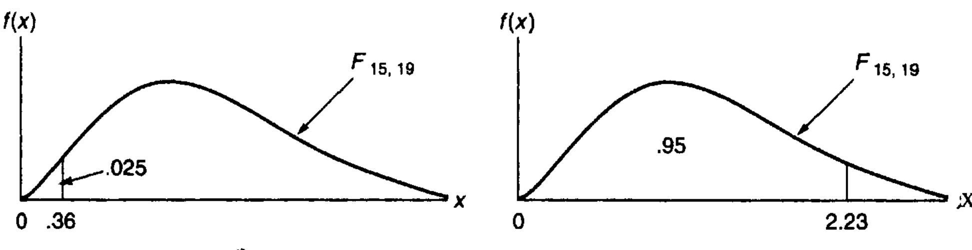
$$P(F_{15,19} \leq .36) = .025$$

$$P(F_{15,19} \leq 2.23) = .95$$

لاحظ أنه يمكن استخدام قاعدة الاحتمال للحوادث المكملة على الصورة:

$$P(F_{15,19} > .36) = .975$$

$$P(F_{15,19} > 2.23) = .05$$



شكل (٧-٨) :) توضيح قيم F عند درجات الحرية 19,15

استخدام الحاسب الآلي:

مثلما حدث مع توزيع T ومع توزيع كاي تربيع، يمكن أيضا استخدام برنامج Minitab لتوليد القيم الجزيئية المطلوبة لتوزيع F . وكما رأينا من قبل، يستخدم الأمر INVCDF مصحوبا بالمساحة الاحتمالية التي تقع على يسار القيمة الجزيئية المطلوبة، ثم الأمر الفرعي F مصحوبا بدرجات حرية البسط والمقام بهذا الترتيب. القيم الجزيئية المبينة في شكل(٧-٨) تم توليدها ببرنامج Minitab كما يلي:

```
MTB  > INVCDV     .025  ;
SUBC > f 15  19
     0.0250          0.3606
MTB  > INVCDV   .95   ;
SUBC > f 15  19
     0.9500        2.2341
```

(٧-٦-٢) فترة الثقة واختبارات الفروض حول σ_1^2 / σ_2^2 :

Confidence Intervals and Hypothesis Testing for σ_1^2 / σ_2^2

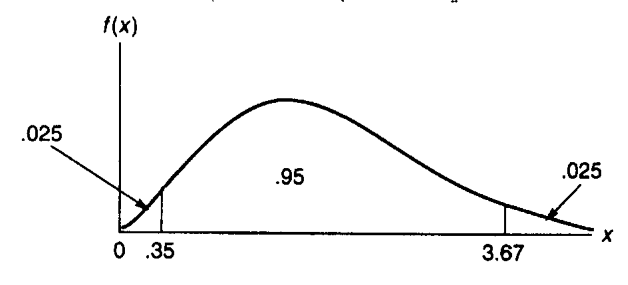
كما أشرنا من قبل فإن أفضل إحصاء لـ σ_1^2 / σ_2^2 هو S_1^2 / S_2^2 وأن الاستنتاج الإحصائي حول σ_1^2 / σ_2^2 يعتمد على توزيع F.

فترة الثقة لـ σ_1^2 / σ_2^2 :

سنتذكر المثال المتعلق ببرنامج الرياضيات الصيفي. أحجام العينات والانحرافات المعيارية كانت$n_1=10$، $S_1=9.4$ لمجموعة الاختبار، $n_2=20$، $S_2=8.5$ للمجموعة الضابطة. نفرض أننا نرغب في تحديد فترة ثقة95% للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 وأن العينات التي سحبت هي عينات عشوائية مستقلة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي وعليه فإننا سنتعامل مع توزيع المعاينة للإحصاء:

$$F = \frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2}$$

سوف يتضح حالا السبب في شكل هذه الصياغة. من المناقشة التي تمت في الفصل(٧-٦-١)، علمنا أن توزيع المعاينة هو توزيع F بدرجات حرية 19=1-20 للبسط، ودرجات حرية للمقام9=1-10. وكما سبق، تتحدد فترة الثقة بإيجاد المدى الذي يستوعب 95% من توزيع المعاينة هذا. بمعنى آخر، تتركز المساحة في المنتصف بحيث يقع025. من المساحة على يسار كل ذيل لمنحنىF ذو درجات حرية 9,19. من جدول E بالملحق نجد أن القيم الجزيئية هي 3.67,.35. (لاحظ أننا عمليا استخدمنا درجات الحرية 20 للبسط لأنها الأقرب إلى القيمة 19 في الجدول). هذه القيم الجزيئية موضحة في(شكل٧-٩).



شكل (٧-٩) : قيمF عند فترة الثقة 95%

ومعنى المدى من 35. إلى 3.67 بعبارة إحتمالية هو:

$$P(.35 < F < 3.67) = .95$$

وبالتعويض عن: $F=(S_2^2 / \sigma_2^2)/(S_1^2 / \sigma_1^2)$ في العبارة الإحتمالية السابقة نجد أن:

$$P\left(.35 < \frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2} < 3.67 \right) =.95$$

ويمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$P\left(.35 < \frac{S_2^2}{S_1^2} \times \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.67 \right) =.95$$

وبضرب الحدود التي بداخل القوس في S_1^2، ثم بعد ذلك القسمة على S_2^2، تحصل على:

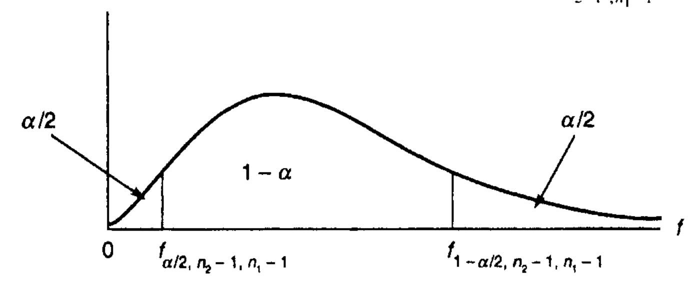
$$P\left(\frac{.35\ S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{3.67\ S_1^2}{S_2^2} \right) =.95$$

وعلى ذلك نجد أن المدى من (S_1^2 / S_2^2 .35) إلى (S_1^2 / S_2^2 3.67) عبارة عن فترة عشوائية (تذكر أن الإحصاء S_1^2 / S_2^2 هو متغير عشوائي) تحتوي على σ_1^2 / σ_2^2 بإحتمال قدره 0.95.

والمعنى لهذه الفترة العشوائية هو نفسه المعنى الذي وضع من قبل. فإذا كررنا سحب عينات عشوائية كل بحجم 10 طلاب لمجموعة الإختبار وأخرى كل بحجم 20 طالب للمجموعة الضابطة وفي

كل مرة تسحب فيها العينات تحسب قيمة خاصة S_1^2 / S_2^2 (ومن ثم نحسب مدى خاص عبارة عن فترة عشوائية مثل الفترة من (S_1^2 / S_2^2 .35) إلى (S_1^2 / S_2^2 3.67) ومن ثم فمن المتوقع أن نجد %95 من هذه الفترات الخاصة تحتوي على النسبة المجهولة σ_1^2 / σ_2^2 . وفيما يتعلق ببيانات المثال الحالي نجد أن: $S_1^2=(9.4)^2=88.36$ وأن $S_2^2=(8.5)^2=72.25$ وبالتالي فإن فترة الثقة للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 يكون حدها الأدنى مساوياً: $(.35)(9.4)^2/(8.5)^2=.428$ وحدها الأعلى مساوياً: $(3.67)(9.4)^2/(8.5)^2=4.488$.

بإتباع الخطوات السابقة، يمكن تعميم هذه الطريقة وذلك لتحديد فترة الثقة للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 عند أي مستوى ثقة. إعتبر فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 ودعنا نمركز $(1-\alpha)$ من المساحة تحت منحنى توزيع F والذي له درجات حرية للبسط n_2-1 ودرجات حرية للمقام n_1-1. القيمة الجزيئية التي تقع في الجانب الايمن يرمز لها بالرمز ($f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$) والقيمة الجزئية التي تقع في الجانب الأيسر يرمز لها بالرمز ($f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$) وهذه القيم موضحة في شكل (٧-١٠).



شكل(٧-١٠): قيم F الجزيئية عند فترة ثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة σ_1^2 / σ_2^2

بمعلومية أحجام عينات عشوائية مستقلة n_1, n_2 مسحوبة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي، نجد أن الصيغة العامة لفترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 هي:

$$(f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1})\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \text{ to } (f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1})\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \qquad \textbf{(7.33)}$$

مايجب أن ننتبه له عند حساب القيم الجزيئية أننا نستخدم درجات حرية البسط والمقام بصورة عكسية كما هو موجود في النسبة σ_1^2 / σ_2^2 .

مثال (٧-١٠)

في مثال (٧-٦) افترضنا أن البيانات كانت عن عينتين عشوائيتين من مجتمعين مستقلين يتبعا التوزيع الطبيعي. لهذه البيانات، حدد فترة الثقة %98 للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 أي نسبة تباين المجتمع ذو المستوى الأول إلى تباين المجتمع ذو المستوى الثاني. إعتماداً على هذه الفترة، هل هناك سبباً مقنعاً للإعتقاد بأن تباينات المجتمعين مختلفين وغير متساويين؟

الحــل

قبل أن نشرع في تقدير فترة الثقة، دعنا نتأمل شكل (٧-٣). إذا كانت التباينات بين المستويين هي حقاً مختلفة، فإن تشتت عينة المفردات في أحد المستويين يجب أن تكون مختلفة وبوضوح عن تشتت المفردات في المستوى الآخر. كما ذكرنا في الحل للمثال (٧-٦) أنه يظهر وبوضوح أن التشتت في كلا المستويين تقريباً نفس الشئ أي أن تباينات المجتمعين غير مختلفين.

فيما يتعلق بفترة الثقة %98، يلاحظ أن مخرجات الحاسب الألي في مثال (٧-٦) أن:

$n_1=16$, $S_1=2.28$, $n_2=16$, $S_2=2.45$. بتركيز 0.98 من مساحة توزيع F الذي له n_2-1=15 درجة حرية للبسط، n_1-1=15 درجة حرية للمقام، تاركين 01. من المساحة عند كل ذيل من المنحنى وكنتيجة لذلك نجد أن القيم الجزيئية هي: $f_{.01,15,15}=.28,\ f_{.99,15,15}=3.52$

عندئذ ومن الصيغة (7.33) تصبح فترة الثقة 98% للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 هي:

$$(.28)\frac{(2.28)^2}{(2.45)^2} \quad \text{to} \quad (3.52)\frac{(2.28)^2}{(2.45)^2} \quad \text{or} \quad .24 \quad \text{to} \quad 3.05$$

لتقدير ما إذا كان – وإعتماداً على هذه الفترة – هناك سبب مقنع للإعتقاد بأن تباينات المجتمعين مختلفين، أعتبر ما يلي: إذا كان المجتمعين متشابهين وغير مختلفين، فإن نسبتيهما σ_1^2 / σ_2^2 تصبح واحد وحيث أن القيمة واحد متواجدة داخل الفترة من 24. إلى 3.05 فهذا يعني أنه إعتماداً على تلك البيانات، لا يوجد سبباً مقنعاً للإعتقاد بإختلاف تباينات المجتمعين.

إختبارات الفروض لـ σ_1^2 / σ_2^2 :

بينا في مثال (٧-١٠) كيف تستخدم فترة الثقة في إختبار الإدعاء بأن تباينات المجتمعين متساوية عندما تتم المعاينة من مجتمعات مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي، بمعنى: إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ فإن $\sigma_1^2 / \sigma_2^2=1$. أي إذا كان الواحد الصحيح يقع داخل فترة الثقة، فإن بيانات العينة لا تناقض هذا الإدعاء. بالطبع يمكننا أيضا إستخدام أسلوب القيمة P (P-Value) كما وضحناه من قبل.

بفرض أننا نرغب في إختبار الفرض العدمي:

$$H_o: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

مقابل الفرض البديل:

$$H_a: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

من البند (٧-٦-١)، نعلم أن توزيع المعاينة للإحصاء:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \qquad \textbf{(7.34)}$$

هو توزيع F بدرجات حرية n_1-1, n_2-1. الآن، إذا كان الفرض العدمي صحيحاً، فإن الإحصاء الموضح بالصيغة (7.34) يصبح نسبة بين تباينات عينتين وهو أفضل إحصاء للنسبة σ_1^2 / σ_2^2. وهكذا، إذا كان الفرض العدمي صحيحاً، وأن العينات العشوائية سحبت مستقلة من المجتمعين اللذين يتبعان توزيعات طبيعية، فإن توزيع المعاينة للإحصاء:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad \textbf{(7.35)}$$

هو توزيع F بدرجات حرية n_1-1 للبسط، ودرجات حرية n_2-1 للمقام.

بصفة أساسية، أسلوب القيمة P (P-Value) هو نفسه كما وضح من قبل، بمعنى آخر، فإننا نحدد أولاً قيمة الأحصاء الموضح بالصيغة (7.35)، بعد ذلك نحدد إحتمال أن يتطرف هذا الإحصاء عن هذه القيمة في إتجاه الفرض البديل. وقيم P موجودة في معظم البرامج الإحصائية الجاهزة. أما فيما يتعلق بجدول E، فإننا نأخذ قيمة P بالتقريب في معظم الأحوال بسبب محدودية هذا الجدول والمثال التالي يوضح أسلوب القيمة P.

مثال (٧-١١)

معدن معين يصنع حالياً وفق طريقة تقليدية. اقترحت طريقة جديدة للتصنيع بموجبها يتم إضافة مادة معينة أثناء العملية التصنيعية، حيث تعتقد إدارة المصنع أن هذه المادة سوف تزيد من متوسط قوة الكسر لهذا المعدن ولكنها تخشى من أن الإختلافات في قوة الكسر ربما أيضاً تزيد. ست عشرة قطعة من المعدن تم إختيارها عشوائياً من إنتاج كلا الطريقتين وأخضعت كل قطعة للضغط حتى شوهد الكسر عليها. فيما يلي قوى الكسر لعينة القطع (بالكيلو جرام على السنتيمتر المربع):

الطريقة التقليدية	50	38	50	58	46	51	50	45	35	51	51	45	41	40	56	42
الطريقة الجديدة	45	27	42	48	40	43	45	49	44	51	54	58	65	76	25	38

مفترضاً أن المعاينة تمت من مجتمعين يتبعا التوزيع الطبيعي. هل بيانات تلك العينات تؤدى بنا إلى مصداقية ما تخشاه إدارة المصنع من إزدياد إختلافات قوة الكسر؟

الحل

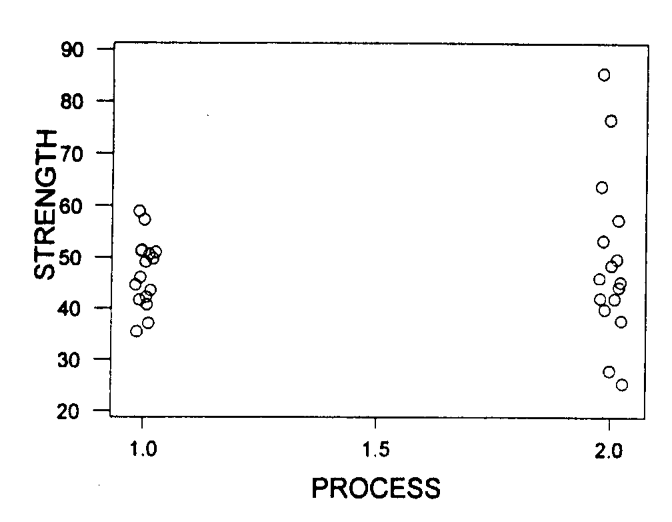
قبل أن نبدأ في تحليل البيانات بالصورة المنهجية، دعنا أولاً نعرض تلك البيانات بيانياً كما فعلنا ذلك من قبل في الأشكال (٧-٢، ٧-٤). وقد حصلنا من الحاسب الآلي على الشكل البياني رقم (٧-١١). قوى الضغط للعينة المنتجة وفق الطريقة التقليدية عرفت على أنها العملية 1 بينما للطريقة الجديدة عرفت على أنها 2. من هذا الشكل، يتضح تماماً أن التشتت الرأسي في العمليتين ليس واحداً، حيث نجد أن هناك تشتتاً أكثر في قوى الكسر للقطع المنتجة وفق الطريقة الجديدة (العملية 2) عن التشتت المشاهد في العملية 1. من هذا الشكل وحده يتضح أن ما تخشاه إدارة المصنع قد ثبت صحته. في الواقع، فإن تباينات العينتين هما: $S_1^2 = 41.3625$ ، $S_2^2 = 248.25$, ومن البديهي أن هذه القيم تظهر إختلافاً كبيراً لدرجة تجعل أنه من غير المعقول قبول الإدعاء بتساوي تباينات العمليتين. ولكن أحياناً يكون التخمين خطراً، لذا فإن التحليل المنهجي أو الرسمي يجب إستخدامه من قبل أن نثب إلى النتيجة.

ولكي نبدأ في التحليل المنهجي، نفرض أننا نختبر الفرض العدمي:

$$H_o: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

مقابل الفرض البديل:

$$H_a: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$$



شكل (٧-١١): قوى الكسر بيانياً لمثال (٧-١١)

حيث σ_1^2 ، σ_2^2 هما تباينات المجتمعين التقليدي والجديد على التوالي. يلاحظ أنه إذا كانت بيانات العينة تناقض إدعاء الفرض العدمي (أي: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) فإنه يتضح أن σ_1^2 تكون أقل من σ_2^2 وهذا يعني أن σ_2^2 أكبر من σ_1^2 وهو الأمر الذي تخشاه إدارة المصنع.

من البيانات السابقة، نحدد قيم تباينات العينتين وهي $S_2^2 = 248.25$ ، $S_1^2 = 41.3625$ وبالتالي تصبح قيمة الإحصاء F هي:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{41.3625}{247.25} = .167$$

وحيث أن $n_1=16, n_2=16$ فإن قيمة P هي نفسها كإحتمال أن المتغير العشوائي F (بدرجات حرية بسط 15 ودرجات حرية مقام 15) أن يأخذ قيمة أقل من (في إتجاه الفرض البديل) 167.، أو بمعنى آخر:

$$\text{P-value} = P(F_{15,15} < .167)$$

ومن الحاسب الآلي، نجد أن قيمة P هي0006. وقيمة P هذه حصلنا عليها ببرنامج Minitab وذلك باستخدام الأمر CDF (حيث نحدد قيمةF) يتبع ذلك الأمر الفرعي F (حيث نحدد درجات الحرية للبسط والمقام) كما يلي:

```
MTB  > cdf   .167;
SUBC > f       15    15
         0.1670    0.0006
```

وبدون حاسب آلي، فإن أفضل ما يمكن أن نفعله هو الحصول على قيمة لـP باستخدام جدول E. عند درجات الحرية $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 15$ نبحث عن قيم F في الجدول حتى نصل إلى أقرب قيمة لـ167. هذه القيمة نجدها 28. عندما تكون A=.01 وهذا يعني أن :01. =($P(F_{15,15} < .28)$، لذا فإن احتمال أن $F_{15,15}$ يأخذ قيمة أقل من 167. يجب أن يكون أقل من 01. أي:

$$\text{P-value} = P(F15,15 < .167) < .01$$

ومن الواضح أن قيمة P صغيرة بدرجة كافية، لذلك فإن بيانات العينة تناقض ادعاء الفرض العدمي مثلما كان ذلك واضحا في شكل (٧-١١). وهذا يدعم الاعتقاد الذي تخشاه إدارة الصنع من أن إضافة تلك المادة الجديدة سوف يزيد من اختلافات قوة الكسر.

أسلوب فترة الثقة يعطي نفس النتيجة التي توصلنا إليها، فعند مستوى ثقة98%، نجد أن القيم الجزيئية هي: $f_{.01,15,15} = .28$, $f_{.99,15,15} = 3.52$. ومن الصيغة (7.33) تصبح فترة الثقة على الصورة:

$$(.28)\left(\frac{41.3625}{248.25}\right) \quad \text{to} \quad (3.52)\left(\frac{41.3625}{248.25}\right)$$

أو من 0.047 إلى 0.586 وحيث أن هذه الفترة لا تحتوي على الواحد، فإن ادعاء الفرض العدمي بأن$\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$ لا تدعمه ولا تؤيده بيانات العينة أي لا تؤيد الادعاء بتساوي تباينات المجتمعين.

(٧-٦-٣) الفروض وأهميتها: The Assumptions and Their Importance

الفرض الأساسي والضروري لمحتويات هذا الفصل، هو أن تكون العينات العشوائية قد تم اختيارها مستقلة عن بعضها من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي. توزيع المعاينة للإحصاء $(S_1^2 / \sigma_1^2) / (S_2^2 / \sigma_2^2)$ هو توزيع F بشرط أن تكون المجتمعات لها توزيع طبيعي، وهذا

الشرط يشبه كثيرا شرط الاعتدالية الضروري للاستنتاج الإحصائي المتعلق بمتوسطي مجتمعين اعتمادا على عينات مستقلة، أو المتعلق بتباين مجتمع واحد. ولكن بخلاف توزيعT، فإن توزيع F شديد الحساسية لشرط الاعتدالية. فإذا كان توزيع أحد المجتمعين مختلفا كثيرا عن الاعتدالية (الطبيعي) فإن الاستنتاج الإحصائي حول σ_1^2 / σ_2^2 اعتمادا على توزيع F يكون غير مناسبا. وإذا كانت هناك معلومات كافية متاحة عن المجتمعين، فإنه يمكن استخدام الطرق البيانية التي وردت في الفصل الثانى، وذلك لتقييم الاعتدالية (الطبيعي) لتلك المجتمعات، أما عدا ذلك فإنه يمكن استخدام طريقة ليليفورس الموضحة في الفصل(١٤) . وعلى كل حال فإنه ينصح دائما باختيار عينات عشوائية متساوية الحجم.

تمارين:

(٧-٣٧) حدد القيم الجدولية التالية:

(a) $f_{.05,5,8}$ (b) $f_{.05,11,18}$ (c) $f_{.95,11,18}$

(d) $f_{.99,11,18}$ (e) $f_{.01,5,28}$ (f) $f_{.90,5,28}$

(g) $f_{.95,5,28}$ (h) $f_{.99,5,28}$

ثم لخص أثر التغيرات في درجات الحرية (البسط والقام) والإحتمال على قيم توزيع F.

(٧-٣٨) بفرض أن المتغير العشوائي X له توزيع F بدرجات حرية 15,10:

(أ) ما مدى القيم الممكنة لـX؟ أشرح.

(ب) اوجد احتمال أن X تقل عن 0.22

(ج) اوجد احتمال أن X تزيد عن 2.54

(د) اوجد قيمة X بحيث يقع على يمينها 97.5% من المساحة.

(هـ) اوجد قيمة X بحيث يقع على يسارها 97.5% من المساحة.

(٧-٣٩) بفرض أن المتغير العشوائي X له توزيع F بدرجات حرية 5,10:

(أ) ما مدى القيم الممكنة لـX؟ اشرح.

(ب) اوجد احتمال أن X تقل عن 0.24.

(ج) اوجد احتمال أن X تزيد عن 4.73.

(د)اوجد قيمة X بحيث يقع يمينها 90% من المساحة.

(هـ)اوجد قيمة X بحيث يقع يسارها 90% من المساحة.

(٧-٤٠) العينات العشوائية $n_2=13, n_1=7$ هي عينات مستقلة سحبت من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي. الإنحراف المعياري في هذه العينات هو$S_2=37.7,\ S_1=21.7$.

(أ) حدد فترة الثقة 95% لنسبة تباينات المجتمعين، أي σ_1^2 / σ_2^2 . واعتمادا على هذه الفترة، هل يمكنك القول بوجود فرق بين تباينات المجتمعين ؟ اشرح ذلك.

(ب) عندما تحسب القيمة P، هل بيانات العينة تظهر وبقناعة آن σ_1^2 أقل من σ_2^2؟ اشرح ذلك.

(٧-٤١) بالرجوع إلى تمرين (٧-٤٠). دعنا نعكس نسبة تباينات المجتمعين، بحيث تصبح σ_2^2 / σ_1^2 وأجب عن الجزء (ب) في تمرين (٧-٤٠). هل العينة تدل بوضوح على أن σ_2^2 هو أكبر من σ_1^2 ؟. وعلى ذلك فهل من المهم تحديد أي تباين مجتمع يوضع في البسط وأيهما يوضع في المقام عند صياغة هذه النسبة ؟ فسر ذلك.

(٧-٤٢) مستثمر يرغب في المقارنة بين مخاطر نوعين مختلفين من الأسهم B,A. مخاطر أي نوع من الاسهم تقاس بالاختلافات التي تحدث في تغيرات سعرة اليومي. يعتقد المستثمر أن المخاطرة مع السهمB أكبر مما هي مع السهمA. سجلت تغيرات سعر A خلال عينة عشوائية من 21 يوما وتغيرات سعر B خلال عينة عشوائية من 16 يوما وحصلنا على النتائج التالية:

السهم B	السهم A
$\overline{X}_B=.41$	$\overline{X}_A=.32$
$S_B=.45$	$S_A=.25$

(أ) بفرض أن العينتين مستقلتين وأنهما سحبا من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي، فهل بيانات العينات تناقض الأدعاء بعدم وجود فروق بين المجتمعين، ومن ثم يتدعم أعتقاد المستثمر؟ وضح ذلك.

(ب) بالرجوع إلى الفروض المذكورة في (أ). هل تعتقد أنه يمكن تصديق هذه الفروض؟ اشرح ذلك.

(٧-٤٣) بالرجوع إلى تمرين(٧-١٥) والذي كنا فيه نقارن بين مناطق الاختبار ومناطق التحكم بالنسبة إلى خطة تسويق جديدة.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-١٥)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف المبيعات بين مناطق الإختبار والتحكم؟ وضح ذلك.

(ب) حدد فترة الثقة 95%لـ σ^2 test/σ^2control . هل هذه الفترة تظهر فرقا في الإختلافات ؟ وضح ذلك.

(٧-٤٤) بالرجوع إلى تمرين(٧-١٧) وفيه كنا نقارن بين وسيلتي إنتقال إلى مكان العمل.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-١٧)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف تلك الوسيلتين؟ اشرح ذلك.

(ب) حدد فترة الثقة 95% لـ σ^2train / σ^2auto . هل هذه الفترة تظهر فرقا في الإختلافات ؟ وضح ذلك.

(٧-٤٥) بالرجوع إلى تمرين(٧-١٨) وفيه كنا نقارن بين متوسط زمن التعطل لنوعين من آلات التصوير.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين (٧-١٨)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف أزمنة التعطل بين ذلك النوعين ؟ وضح ذلك.

(ب)حدد فترة الثقة 95% لـ(σ^2 suny / σ^2 saban). هل هذه الفترة تظهر فرقا في الإختلافات؟ وضح ذلك.

(٧-٤٦) بالرجوع إلى تمرين (٧-١٩) المتعلق بتدريب العاملين على عملية تجميع منتج ما.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-١٩)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف طريقتي التجميع؟ وضح ذلك.

(ب) هل دليل العينة يظهر وبقناعة أن أختلافات أزمنة التجميع في ظل الطريقة الحديثة هو أقل من تلك التي في ظل الطريقة التقليدية؟ برر أجابتك باستخدام التحليل الإحصائي المناسب.

(٧-٤٧) بالرجوع إلى تمرين (٧-٢٠) والذي يتناول معدلات الكسر في إنتاج المصابيح الكهربائية.

(أ) اعتمادا على الشكل البياني في (أ) من تمرين(٧-٢٠)، هل ترى أن هناك فرقا في اختلاف نظامي النقل؟ اشرح ذلك.

(ب) هل دليل العينة يظهر وبقناعة أن الإختلافات في نسب الفقد في المصابيح كل يوم مع نظام النقل الآلي القديم هي أكبر مما هي عليه مع نظام النقل الآلي الجديد؟ وضح اجابتك باستخدام تحليل احصائي مناسب.

(٧-٧) الأستنتاج الأحصائي المتعلق بمجتمعين أو عمليتين: مثال شامل A Comprehensive Example

يقوم أحد البنوك بتعيين المتدربين الجدد على أساس برنامج تدريبي يعقد مرتين في السنة، يقدم لهم بعض المفاهيم الأساسية في البنوك مثل السياسة النقدية، التمويل، التسويق، الإدارة، الأقتصاد. يقاس النجاح التدريبي في الأجل القصير بمقارنة وتقييم درجات الأختبار القبلي والأختبار البعدي للمتدربين في الجزء النظري (الأكاديمي) من البرنامج، بمعنى أن كل متدرب يعقد له إختبار قبل وبعد المشاركة في البرنامج. كفاءة هذا البرنامج تقاس بمدى التحسن في هذه الأختبارات.

المتدربين هم خريجين من كليات وجامعات متنوعة، ودرجاتهم العلمية في مجالات متنوعة. عملية التعين لا ترتكز على متوسط درجة التقدير. عدد سنوات الخبرة العملية للمتدربين داخل البنك تتفاوت جوهريا ما بين صفر، 15 سنة. أيضاً أعمارهم تتفاوت على نطاق واسع من 21 سنة إلى 52 سنة وهكذا، فإن الفروق بين مجالات الدرجة العلمية للمتدربين، بين متوسط درجات التقدير، سنوات الخبرة، الأعمار كلها من الممكن أن تكون مصدراً للأختلافات في درجاتهم القبلية والبعدية.

مدير إدارة الأفراد بالبنك هو المسئول عن متابعة فاعلية وكفاءة البرنامج التدريبي. لقد قام المدير بدراسة درجات الأختبار القبلية والبعدية لعينة من 28 متدرب ألتحقوا حديثاً بالبرنامج. كما أهتم أيضاً بمعرفة هل المتدرب الحاصل على درجة إدارة الأعمال يكون أفضل في آداء الأختبارات عن المتدربين الحاصلين على درجات اخرى، وهذه النقطة يكون لها اعتبار خاص عند التعيين. أيضاً أهتم مدير إدارة الأفراد بمعرفة أثر كل من متوسط درجة تقدير التخرج، سنوات الخبرة، العمر، ولكن هذه المعلومات لم تكن متاحة في الوقت الذي اجريت في هذه الدراسة. درجات الأختبار القبلي والبعدي لعدد 28 متدرب والزيادة في هذه الدرجات، درجة التخصص العلمي(إدارة أعمال أو اخرى) كلها أعطيت في جدول (٧-١).

الشكل (٧-١٢) يوضح أن درجات الأختبار البعدي هي أكبر من درجات الأختبار القبلي. إزدواج الدرجات رسمت متتالية ووصلت فيما بينها بخط رأسي ومن الواضح الدرجات البعدية أكبر من الدرجات القبلية في كل زوج من ازواج الدرجات.

جدول (٧-١) : النتائج القبلية والبعدية للمتدربين حسب نوع المؤهل

Trainee	Degree	Pretest Score	Post test Score	Change
1	Business	35	44	9
2	Business	49	66	17
3	Business	38	51	13
4	Business	41	63	22
5	Business	45	62	17
6	Business	51	66	15
7	Business	36	57	21
8	Business	41	63	22
9	Business	41	60	19
10	Business	43	63	20
11	Business	38	60	22
12	Business	43	58	15
13	Business	31	55	24
14	Business	33	52	19
15	Business	46	75	29
16	Business	33	50	17
17	Other	44	55	11
18	Other	33	54	21
19	Other	44	58	14
20	Other	42	63	21
21	Other	38	58	20
22	Other	47	65	18
23	Other	41	63	22
24	Other	38	67	29
25	Other	41	64	23
26	Other	42	57	15
27	Other	34	62	28
28	Other	34	52	18

جدول (٧-٢) يوضح التحليل الوصفي للدرجات القبلية والبعدية والتغير في الدرجات لكل مشترك. متوسط الدرجات القبلية والبعدية هي 40.07 ,59.39 على التوالي وهكذا متوسط التحسن في الدرجات حوالى 19.3 كنتيجة للبرنامج التدريبي(زيادة 48%)٠

حيث ان البيانات مجمعة في صورة أزواج من الدرجات لكل متدرب ، فإن تحليل العينات ذات القراءات المزدوجة الذي يركز على الفروق بين أزوج القراءات قبل وبعدالاختبار يعد ملائماً هنا٠ المدرج التكراري للفروق بين أزواج القراءات معطى في شكل (٧-١٣)٠ التوزيع ذو قمة وحيدة ملتوي قليلا إلى اليسار. فرض الأعتدالية للفروق بين ازواج القراءات يجب الا يكون مشكلة في إستخدام تحليلT٠

شكل (٧-١٢) يليه جدول(٧-٢): يلخصا الإحصاءات الوصفية

FIGURE 7.12
Graph of pretest and posttest scores for 28 management trainees

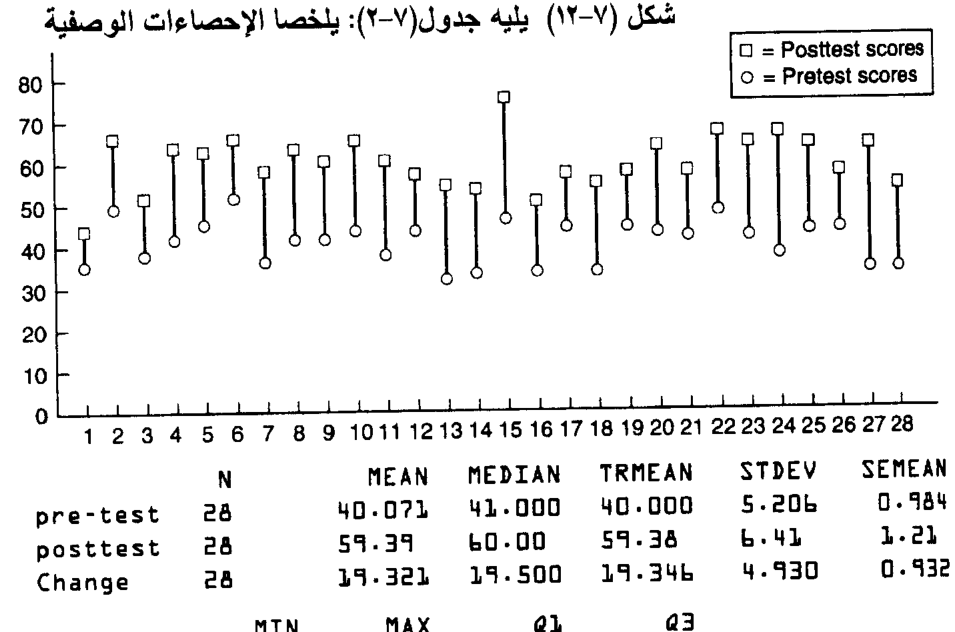


TABLE 7.12
Descriptive Summary of Pretest Scores, Posttest Scores, and Increases in Score

	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV	SEMEAN
pre-test	28	40.071	41.000	40.000	5.206	0.984
posttest	28	59.39	60.00	59.38	6.41	1.21
Change	28	19.321	19.500	19.346	4.930	0.932

	MIN	MAX	Q1	Q3
pre-test	31.000	51.000	35.250	43.750
posttest	44.00	75.00	55.00	63.00
Change	9.000	29.000	15.500	22.000

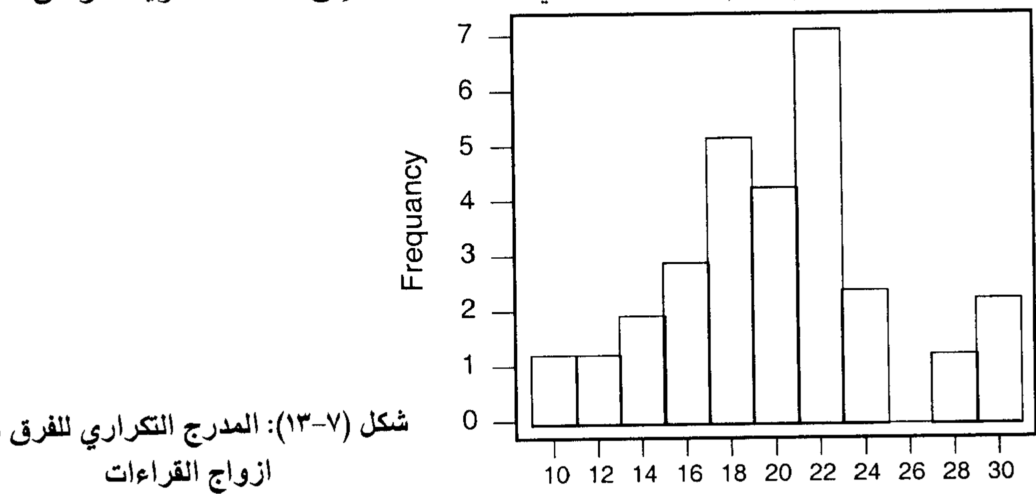
جدول (٧-٣) يعطي فترة الثقة95% لمتوسط التغير في الدرجات للمجتمع وثيق الصلة بالموضوع (أي كل المتدربيين الحاليين وفي المستقبل إذا كانت عملية التعيين والتدريب مستمرة بدون تغير)٠ عند درجة ثقة 95%، يمكن القول أن متوسط التحسن للمجتمع يقع داخل حدى الثقة(17.410 to 21.233)٠

وحيث ان حدي الثقة لا تحتوي على صفر، فليس من المقبول الأدعاء بعدم وجود تحسن فعلي٠ بالطبع متوسط التحسن يمكن ان يتحرك خارج هذه الحدود إذا كان هناك تغيراً حقيقياً في عملية التعين والتدريب٠

جدول(٧-٣): فترة الثقة 95% لمتوسط التغير في درجات الأختيار بإستخدام ميني تاب

	N	MEAN	STDEV	SEMEAN	95.0 PERCENT C.I
Change	28	19.321	4,930	0.932	(17.410,21.233)

قيمة P (P-Value) عند إختبار الفرض العدمي بعدم وجود تحسن مقابل الفرض البديل بوجود تحسن، معطاه في جدول(٧-٤)٠القيمة P وهي 0,0000 تشير إلى مناقضة قوية للفرض العدمي٠



شكل (٧-١٣): المدرج التكراري للفرق بين ازواج القراءات

جدول (٧-٤): مخرجات ميني تاب

TEST OF MU = 0.000 VS MU G.T. 0.000

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN	T	P VALUE
Change	28	19.321	4.930	0.932	20.74	0.0000

جدول (٧-٥): ملخص بالأحصاءات الوصفيه

Descriptive Summary of Pretest and Posttest Scores by Degree

	Degree	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV
pre-test	0	12	39.83	41.00	39.80	4.47
	1	16	40.25	41.00	40.14	5.84
posttest	0	12	59.83	60.00	59.90	4.80
	1	16	59.06	60.00	59.00	7.54
Change	0	12	20.00	20.50	20.00	5.31
	1	16	18.81	19.00	18.79	4.74

	Degree	MIN	MAX	Q1	Q3
pre-test	0	33.00	47.00	35.00	43.50
	1	31.00	51.00	35.25	44.50
posttest	0	52.00	67.00	55.50	63.75
	1	44.00	75.00	52.75	63.00
Change	0	11.00	29.00	15.75	22.75
	1	9.00	29.00	15.50	22.00

الآن ماذا عن درجة تأثير المؤهل التعليمي؟ جدول(٧-٥) يعطي تحليلا وصفيا لدرجات الأختبار لكل من طلبة إدارة الأعمال في مقابل الدرجات العلمية في مجالات أخرى(1:إدارة أعمال، 0:أخرى). هذا الجدول يظهر أختلافات بسيطة جدا-وقد لا توجد- بين المجموعتين.

إجراء T التجميعي تم تنفيذه ليلحق بالنتائج المبدئية المستمدة من التحليل الوصفي. حيث أن مؤهل إدارة الأعمال يبدو أنه الأكثر أحتمالاً في إظهار فروق في درجات الأختبار القبلي، فإن إختبار T التجميعي يركز على هذا المتغير. النتائج موضحة في جدول(٧-٦). فترة الثقة95% للفرق بين متوسطي المجموعتين وهو(4.4 , 3.6-) يتضمن القيمة الصفرية للفرض العدمي. القيمة P وهي0.83 كبيرة جداً لدرجة أنه من الناحية الواقعية لا يوجد سبباً للشك في أي فرق بين متوسطي المجموعتين. هذه الدراسة تظهر أنه لا يوجد سبباً لتفضيل أن تكون الأغلبية من إدارة الأعمال عن المؤهلات العلمية الأخرى في قرارات التعيين.

جدول(٧-٦): تحليل T التجميعي لمتوسط درجات الأختبار القبلي: إدارة الأعمال مقابل التخصصات الأخرى

TWOSAMPLE T for per - test

Degree	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
1	16	40.25	5.84	1.5
0	12	39.83	4.47	1.5

95 PCTCI FOR MU 1 - MU 0 : (-3.6 , 4.4)

TTEST MU 1 = MU 0 (VS NE) : T = 0.21 P = 0.83 DF = 25

(٧-٨) ملخص SUMMARY

في هذا الفصل ناقشنا الطرق الأحصائية المستخدمة للمقارنة بين معالم مجتمعين أو عمليتين أخذاً في الأعتبار المتوسطات ، النسب ، التباينات • فاعلية هذه المقارنات تعتمد على أسلوب جمع البيانات ، وهي أهم سمة في أي دراسة إحصائية • المبدأ العام في أي تصميم إحصائي هو أن نتحصل على بيانات العينة بالطريقة التي تصغر الأختلاف العشوائي وذلك بالتحكم كلما أمكن ذلك في العوامل الغير محددة والمسببة للأختلاف •

عند المقارنة بين متوسطين ، فإننا نعتبر المجتمعين أو العمليتين وكأنهم يمثلوا مستويين متمايزين للعامل موضوع الأهتمام ، هناك خطتين أساسيتين يسمحا بالحصول على البيانات: عينات مستقلة وعينات ذات قراءات مزدوجة. الفرق بين هاتين الخطتين أنه مع الخطة الثانية نجد أن تأثير المتغير الخلفي أو الخفي يتم التحكم فيه بعملية الأزدواج (قطاعات) • في كل التطبيقات العملية ، نجد أن الأستنتاجات الأحصائية الخاصة بالفرق بين متوسطي مجتمعين تعتمد على توزيع T • وكما في الفصل السادس ، نستخدم التحليل البياني كخطوة أولى في إختبارات الفروض. المقارنة بين نسبتين تعتمد على عينات عشوائية مستقلة مسحوبة من مجتمعين • إجراءات فترة الثقة وإختبارات الفروض تعتمد على التوزيع الطبيعي المعياري ، كما كان الأمر في حالة مجتمع واحد الذي نوقش في الفصل السادس .

في هذا الفصل قدم توزيع معاينة جديد للمقارنة بين تبايني مجتمعين • وهو يعتمد عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعين يتبع كل منهما التوزيع الطبيعي. هذا التوزيع الجديد يتبع توزيع F • وتوزيع F يتركز حول القيمة 1 (واحد) وهو توزيع ملتوي إلى اليمين ومدى قيمته نظريا تتراوح من الصفر إلى اللانهاية •

المراجع References

1 - W.E. Deming. *Out of Crisis.* Combridge MA: MCT Center for Advanced Engineering Study. 1986

2 - R. Larsen and M. Marx. *Introduction to Mathematical Statistics,* 2nd ed. Englewood cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985 .

3 - J.Mc Clave and F. Dietrich. *Statistics*. 6th ed. New York,Macmillan,1994.

تمارين إضافية

(٧-٤٨) محلل تسويقي قد تم تعينه لمهمة تقسيم السوق إلى مجموعات من المؤسسات التي تستوعب طلبات متشابهة من المنتج ، ولكي يقوم بهذه المهمة فإنه يستعين بنتائج دراسة السوق . هذا المحلل يعتقد أن مؤسسات البنوك يجب أن توضع في نفس مجموعة مؤسسات التأمين. نتائج الدراسة كانت على النحو التالي. مفترضاً أن العينات مستقلة ومسحوبة من مجتمعين كل منهما له التوزيع الطبيعي وأن تباينات المجتمعين متساويين •

التأمين	البنوك
$\overline{X}_2 = 22.1$	$\overline{X}_1 = 16.6$
$S_2 = 10.9$	$S_1 = 12.3$
$n_2 = 40$	$n_1 = 40$

(أ) أحسب فترة الثقة 95% لتحديد ما إذا كان الأختلاف موجود بين متوسط مستويات الطلب لمؤسسات البنوك والتأمن.

(ب) إذا كانت بيانات العينات تشير إلى أختلاف محسوس، فهل هذا يشير بالضرورة إلى ان مؤسسات البنوك والتأمين يجب ألا يوضعا في نفس قطاع التسويق؟ فسر ذلك.

(جـ) هل أي من الفروض التي عمل بها في الإجابة عن (أ) متحققة؟ أشرح ذلك.

(٧-٤٩) بالرجوع إلي التمرين (٧-٤٨).

(أ) معتمدا على فترة الثقة 95% لـ σ_1^2 / σ_2^2 ، هل تستنتج أن هناك فرقاً بين أختلافات الطلب لهذين النوعين من المؤسسات؟ إشرح ذلك.

(ب) أجب على (جـ) كما في التمرين (٧-٤٨) في ضوء التحليل الذي قمت به في (أ) من هذا التمرين.

(٧-٥٠) فحصت دراسة حديثة درجة آداء شركات المحاسبة في مراجعة حسابات عملائها، وكان أحد العناصر ذات الأهتمام الخاص في تلك الدراسة، هو نسبة المراجعة التي تقوم بها الشركة. في ثمان من شركات المحاسبة الكبرى، كان متوسط نسبة المراجعة44.6% بإنحراف معياري 16.4%. اما في 22 شركة محاسبة أصغر من ذلك، كان المتوسط 33.9% بأنحراف معياري 10.8%.

(أ) يعتقد الباحث أن متوسط نسبة المراجعة في الشركات الكبرى هو اكبر من متوسط نسبة المراجعة في الشركات الصغرى لأسباب عديدة. هل دليل العينة يؤكد صحة هذا الأعتقاد؟ افترض أن تباينات المجتمعات متساوية.

(ب) هل الفرض بتساوي تباينات المجتمعات يبدو متحققاً هنا؟ دعم إجابتك. ملحوظة: أستخدم فترة ثقة 95%.

(٧-٥١) بالرجوع إلى تمرين (٦-٢٥) بالفصل السادس المتعلق بتكاليف الرعاية الطبية لضحايا الحوادث واللذين كانوا يرتدون أحذمة الآمان(كانت التكاليف بالدولار هي): 2436 5932 307 862 186 643 597 761 508 1135 242 582 698 1029 732

في عينة عشوائية أخرى من ضحايا الحوادث وكانوا لا يرتدون احذمة الآمان وحجمها 15 كانت التكاليف بالنسبة لهم بالدولار هي: 819 1845 946 1438 3946 8629 1631 2207 973 1593 694 6924 950 548 2938

مفترضاً أن تلك العينتين مستقلتين.

(أ) عبر عن هذه البيانات بيانياً. هل يتضح لك أن إرتداء أحذمة الآمان أدى إلى إختلاف في تكلفة الرعاية الطبية في المتوسط؟ وضح ذلك.

(ب) هل دليل العينة يناقض الإدعاء بعدم وجود فروق؟ دعم إجابتك.

(جـ) إعتماداً على الشكل البياني في (أ) هل ترى فرقاً في تباين من يرتدون ومن لا يرتدون أحذمة الآمان؟ دعم إجابتك مستخدماً فترة الثقة 95%.

(٧-٥٢) بالرجوع إلى التمرين(٦-٢٦) بالفصل السادس. سحبت شركة المياة عينة عشوائية أخرى حجمها 20 من المقيمين في يوم آخر أثناء أزمة نقص المياه وفيما يلي حجم الأستهلاك بالجالون:

214	189	192	196	228	262	236	249	175	213
187	234	206	229	194	206	237	243	219	224

الأستهلاك في يوم آخر كما أعطى قي التمرين(٦-٢٦) كانت على الصورة:

238	212	248	196	175	245	265	195	180	235
246	223	218	240	236	228	214	208	220	252

مفترضاً أستقلال تلك العينتين.

(أ) أرسم تلك البيانات بيانيا. هل يتضح لك أن إستهلاك المياه في هذين اليومين متشابهين في المتوسط؟ أشرح ذلك.

(ب) اجب عن (ب)، (جـ) كما في التمرين (٧-٥١).

(٧-٥٣) المدير المسئول عن اجهزة الكمبيوتر عليه أن يوزع شحنة أجهزة كمبيوتر على قسمين بالشركة: تحليل التسويق، وبحوث التسويق. سياسة المدير في توزيع هذه الشحنة تعتمد على زمن تشغيل أجهزة الكمبيوتر في العام الماضي في كل قسم على مدار 12 شهراً السابقة، كانت تكاليف تشغيل الكمبيوتر في كل قسم بالدولار على النحو التالي:

الشهر	قسم التحليل	قسم البحوث
1	1780	2440
2	2120	2010
3	2440	2780
4	1860	2290
5	2760	3190
6	2020	2240
7	1680	1550
8	1550	1530
9	2780	2790
10	2660	3000
11	2540	2710
12	1930	2090

(أ) أرسم هذه البيانات • اعتماداً على هذا الرسم، هل ترى فرقاً في مستوى متوسط التكاليف في كلا القسمين؟ أشرح •

(ب) هل دليل العينة يناقض الادعاء بعدم وجود فرق بين مستوى متوسط التكاليف في كلا القسمين؟ برر إجابتك بالتحليل المناسب •

(٧-٥٤) شركة يتم إنتاجها في مصنعين: مصنع بلتيمور، ويعتقد أنه أقل أنتاجية إذ يستغرق وقتاً أطول في المتوسط في عملية التجميع عن مصنع كانساس. وفي محاولة للتحقق من هذا الشك أو الأعتقاد، سجلت أزمنة التجميع لعينة عشوائية من 16 وحدة انتجت في كل مصنع. من البيانات التاريخية يعتقد أن أختلاف أزمنة التجميع في كلا المصنعين متشابهة. البيانات(بالساعات) لخصمت على النحو التالي:

بلتيمور 6.1 5.4 6.2 6.1 6.4 6.8 6.7 6.4 6.6 6.9 5.6 5.7 6.9 6.8 6.4 7.2

كانساس 5.1 6.2 5.8 6.3 4.9 5.7 5.6 4.8 4.9 6.1 5.9 5.8 5.4 6.2 5.7 6.8

(أ) ارسم هذه البيانات • هل ترى فرقاً في الأنتاجية بين هذين المصنعين في المتوسط؟ اشرح •

(ب) هل دليل العينة يؤكد بقناعة هذا الشك؟ دعم إجابتك •

(جـ) هل الفرض الخاص بتساوي التباينات في المصنعين يبدو متحققا هنا؟ دعم إجابتك • (ملحوظة: استخدم فترة الثقة95%) •

(٧-٥٥) نفذ إستقصاء بالعينة على منطقتين متجاورتين لدراسة نسب خريجي المدارس الثانوية واللذين التحقوا بالجامعة • في منطقة سوليفان وجد88 من 171 من خريجي المدارس الثانوية قد التحقوا بالجامعة، اما في منطقة مونتجومري فوجد 131 من220 قد التحقوا بالجامعة •

(أ) هل دليل العينة يشير إلى إختلاف محسوس بين المنطقتين في نسب من التحقوا بالجامعة ؟ دعم إجابتك.

(ب)إفترض أنه في عينة من 220 وتمثل خريجي المدارس الثانوية في المنطقتين معاً هذا العام إلتحق منهم 171 بالجامعة، هل إستنتاجك في (أ) يختلف الآن ؟

(٧-٥٦) يبحث إتحاد المستهلكين في تكاليف الأصلاح لنوعين من السيارات. سجلت تكاليف الأصلاح على عينة من ثمان سيارات من كل نوع بالدولار وكانت:

النوع x	النوع y
88	339
221	101
149	189
44	181
310	244
720	388
121	199
310	479

(أ) أرسم تلك البيانات . أعتماداً على ذلك الرسم، هل ترى إختلافاً في متوسط التكاليف للنوعين x, y ؟ ماهي الأشياء الأخرى التي تثير إنتباهك في الرسم ؟ وضح ذلك.

(ب) مفترضاً أن العينتين سحبتا عشوائياً وباستقلال من مجتمعين لهما التوزيع الطبيعي، حدد إلى اي مدى يكون دليل العينة هذا مدعماً للأدعاء القائل بعدم وجود فروق في متوسط التكاليف لهذين النوعين من السيارات.

(٧-٥٧) يهتم مدير أحد المطاعم بإستخدام قوائم طعام مختلفة الشكل، أملا في أن يزداد أنفاق الزبون على مشهيات الأطعمة، خاصة وأنها مربحة. لقد كان مهتماً بتغير شكل قائمة الطعام، لكن مفردات القائمة الأساسية لن تتغير. في أختبار نفذ مساء أحد أيام السبت، اعطي100 زبون قائمة الطعام الحالية وأعطي 100 زبون آخرين قائمة الطعام بالشكل الجديد المقترح . لخصت النتائج بتحديد نسبة الزبائن اللذين طلبوا مشهيات الأطعمة، متوسط الأنفاق على المشهيات للزبائن اللذين طلبوها وكذلك الأنحراف المعياري للإنفاق على المشهيات وكانت على النحو التالي:

	القائمة الحالية	القائمة المقترحة
نسبة من طلبوا مشهيات	$P_1 = 0.52$	$P_2 = 0.66$
متوسط الإنفاق للزبائن اللذين طلبوا مشهيات	$\overline{X}_1 = \$5.58$	$\overline{X}_2 = \$5.70$
الإنحراف المعياري للإنفاق على المشهيات	$S_1 = .40$	$S_2 = 0.44$

(أ) هل بيانات العينة تعطي دليلا كافياً للقول بأن نسبة طلب المشهيات هي الأكبر مع القائمة المقترحة ؟ دعم إجابتك.

(ب) هل بيانات العينة تعطي دليلاً كافياً للقول بأن متوسط الإنفاق على المشهيات هي الأكبر مع القائمة المقترحة ؟ دعم إجابتك. (أفترض تساوي تباينات المجتمعين).

(جـ) معتمداً على فترة الثقة95%، هل يمكنك الأدعاء بعدم وجود اختلاف في الأنفاق على المشهيات في كلا القائمتين ؟ وضح ذلك.

(د) معتمداً على التحليل في (أ)، (ب) هل القائمة الجديدة مفيدة ؟ ناقش ذلك بإختصار.

(٧-٥٨) في 29 أكتوبر من عام 1990 نشرت إحدى مجلات الإدارة تقريرها السنوي عن بداية الرواتب السنوية للرجال والنساء الحاصلين على درجة الماجستير في إدارة الأعمال MBA من أفضل كليات الإدارة وكانت:

الكلية	رجال	نساء
MET	$77539	$58500
Columbia	65009	54917
Dartmouth	57393	54643
Rochester	46521	40367
Cornell	53762	54433
Virginia	67397	54306
UCLA	62785	51147
Stanford	80412	74925
Berkeley	54322	52934
Michigan	54058	51702

(أ) أرسم تلك البيانات. هل ترى أختلافاً في متوسط الرواتب بين الرجال والنساء ؟

(ب)عندما تعامل هذه البيانات على أنها عينات، إلى أي مدى تناقض هذه البيانات الأدعاء بعدم وجود فرق بين متوسط بداية الرواتب ؟

(جـ) إلى أي مدي يكون دليل العينة مناقضاً بوجود فرق قدره 5000$ بين متوسط رواتب الرجال والنساء مقابل الأدعاء بوجود فرق اكبر من هذا المبلغ ؟

(٧-٥٩) محلل في قسم شئون العاملين باحدى الشركات يرغب في دراسة تغيب العاملين في مصنعين كبيرين تمتلكهما الشركة. هذا الرجل يرغب بالتحديد في مقارنة متوسط عدد أيام التغيب خلال ثلاث سنوات في المصنعين. هذا الرجل يعتقد أن عدد سنوات الخدمة لكل موظف هي العامل المؤثر في الدراسة التي يجريها.

(أ)ساعد هذا المحلل في تصميم خطة المعاينة المناسبة.

(ب) هل يمكنك أن تفكر في عوامل اخرى قد يكون لها تأثير في عدد أيام التغيب؟ وضح ذلك.

(٧-٦٠) أجرى باحث في قسم بحوث التسويق مقابلة مع 16 مطعم بيتزا في مدينة ريتشموند ومع 16 مطعم بيتزا في مدينة فرجينيا وقام بتسجيل سعر البوصة المربعة (بالسنت) لفطيرة بيتزا الجبنة الكبيرة ولفطيرة بيتزا بيبروني الكبيرة وذلك لحساب الأختلافات بين السعر للبوصة المربعة والسعر للوحدة الواحدة ككل. نتائج العينة لخصت على النحو التالي:

	ريتشموند		فرجينيا	
	المتوسط	الإنحراف المعياري	المتوسط	الإنحراف المعياري
فطيرة الجبنة	4.092	0.810	3.975	0.893
فطيرة بيبروني	4.690	0.952	4.557	0.912
عدد الوحدات المجانية	7 من 16		10 من 16	

(أ) لكل نوع من أنواع البيتزا، إحسب فترة الثقة95% للفرق بين متوسط السعر في كل من ريتشموند وفرجينيا، مفترضاً تساوي تباينات المجتمعين. هل ترى أن هناك إختلافاً بين متوسط السعر في المجتمعين؟ وضح ذلك.

(ب) هل إفتراض تساوي تباينات المجتمعين متحققاً هنا؟ دعم إجابتك (ملحوظة:أستخدم فترة الثقة 95%)

(جـ) هل هذه العينة تعطي دليلاً كافياً للقول بأن نسبة البيتزا التي تقدم مجاناً في مطاعم ريتشموند أقل مما تقدمه مطاعم فرجينيا؟دعم إجابتك.

(د) ما هو الفرض الضروري اللازم لأجابتك في (جـ)؟ وهل هو متحقق هنا؟ دعم إجابتك.

(٧-٦١) قام احد الأساتذة بتقيم آداء طلاب الفرقة الثانية و الثالثة في مادة نظم المعلومات. بيانات العينة التالية تظهر الدرجات التي حصلوا عليها في أول اختبارين.

الفرقة الثالثة			الفرقة الثانية		
رقم الطالب	إختبار1	إختبار2	رقم الطالب	إختبار1	إختبار2
1	68	75	1	60	53
2	68	60	2	62	52
3	68	82	3	62	68
4	70	63	4	64	63
5	70	72	5	64	73
6	72	75	6	66	62
7	72	78	7	68	58
8	76	65	8	70	53
9	76	78	9	70	52
10	76	65	10	72	58
11	78	67	11	72	60
12	80	93	12	74	72
13	82	70	13	76	60
14	84	67	14	78	68
16	88	82	15	80	68
17	90	78	17	86	88
18	94	78	18	88	75
19	94	85	-	-	-

(أ) أرسم درجات كل من طلاب الفرقة والثانية كل على حدة(منفصلين). نفذ ذلك الرسم مرة بالنسبة للأختبار الأول ثم بالنسبة للأختبار الثاني. هل يتبين لك أن آداء الفرقة الثالثة أفضل من أداء الفرقة الثانية؟ وضح ذلك.

(ب) إلى أي مدى يناقض دليل العينة الأدعاء بأن متوسط الآداء واحد لكل من الفرقتين الثالثةوالثانية مقابل الفرض بأن متوسط الفرقة الثالثة هو الأعلى؟ نفذ تحليلا مناسباً على الأختبار الأول ثم كرر ذلك على الأختبار الثاني.

(جـ) بالنسبة لطلاب الفرقة الثالثة، هل بيانات العينة تعطي دليلا كافياً للقول بأن هناك فرقا في متوسط مستوى صعوبة الأختبارين؟ دعم إجابتك.

(د) بالنسبة لطلاب الفرقة الثانية، هل بيانات العينة تعطي دليلا كافيا للقول بأن هناك فرقاً في متوسط صعوبة الأختبارين؟ دعم إجابتك.

(هـ) أكد إجابتك في (جـ)، (د) بتحديد فترة الثقة 95%.

(٧-٦٢) هذا التمرين يوضح أزمنة الأستجابة في محطة المطافي في فرجينيا. زمن الإستجابة عرف على أنه عدد الدقائق التي تنقضي من وقت الإستدعاء هاتفياً وحتى مغادرة سيارة المطافي للمحطة. البيانات التالية تمثل أزمنة الأستجابة لكل المكلمات الهاتفية خلال ستة أشهر وكل مكالمة صنفت إلى مكالمة حريق او غير حريق.

حريق:

14	12	5	7	15	11	5	9	11	7	0	10
9	15	8	10	6	12	8	13	14	24	10	11
3	9	9	4	13	5	5	14	6	12	3	13
13	7	9	0	4	6	7	6	4	12	13	4
					-	-	3	11	6	7	20

غير حريق:

8	5	10	7	5	7	5	9	0	23	11	15
6	4	2	7	8	3	12	8	10	4	9	9
						5	13	3	23	13	8

(أ) أرسم بيانياً أزمنة الإستجابة لكل من مكالمات الحريق ومكالمات غير الحريق. صف أي اختلافات تراها بين توزيعات أزمنة الأستجابة لكلا النوعين من المكالمات.

(ب) معتمداً على الشكل البياني في (أ) استخدم إجراء مناسب لتحديد ما إذا كان دليل العينة يناقض الأدعاء بعدم وجود إختلاف بين متوسط زمن الإستجابة لكلا النوعين من المكالمات.

(٧-٦٣) محلل في شئون العاملين بإحدى الشركات يرغب في دراسة تغيب العاملين في مصنعين للشركة يقعا في ريتشموند، لويسفيل. في عينة من 30 عامل من كل مصنع، سجل لكل واحد عدد أيام التغيب التراكمية خلال ثلاث سنوات وكانت البيانات على الصورة التالية:

ريتشموند:

7	1	10	11	5	0	2	13	18	0	7	5	24	14	18
13	5	23	9	11	16	13	9	5	9	12	2	18	21	2

لويسفيل:

4	9	13	9	50	19	14	3	48	51	30	28	18	0	24
3	0	8	12	64	33	6	5	13	9	15	11	15	49	50

(أ) أرسم البيانات بيانا لكلا المصنعين. هل الشكل البياني يبدو أنه يشير إلى أن متوسط عدد أيام الغياب مختلفة بين المصنعين؟

(ب) معتمداً على الشكل البياني في (أ) إستخدم إجراء مناسب لتحديد ما إذا كان دليل العينة كافياً لتدعيم الرؤية بإختلاف متوسط عدد أيام الغياب في المصنعين.

(٧-٦٤) أستاذاً بأحدى الجامعات قام بتدريس إحدى المواد الأدبية لمن يرغب من الطلاب، وذلك قبل عقد الإمتحان النهائي لجميع الطلاب في محاولة منه لتقييم فاعلية هذه الطريقة. في أول إختبار سجلت درجات الطلاب اللذين حضروا تطوعاً هذه المحاضرات، وسجلت أيضاً درجات الطلاب اللذين لم يحضروا وكانت النتائج لعدد 91 طالباً على النحو التالي:

75	88	75	95	95	75	75	75	85	65	75	95
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

85 88 72 82 82 82 85 92 98 78 85 78
1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0

95 95 85 75 72 78 65 75 72 95 98 88
1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1

75 82 85 78 88 92 65 78 88 82 88 78
1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0

75 75 85 95 92 75 95 75 88 85 82 92
0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0

85 95 65 82 75 98 65 98 75 85 85 78
1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1

85 85 75 88 95 92 95 92 88 78 72 75
1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1

92 72 92 92 92 82
0 0 0 1 1 1

ملحوظة:

1: تشير إلى حضور الطالب للمحاضرات.

0: تشير إلى عدم حضور الطالب للمحاضرات.

(أ) صف تصميماً تجريبياً لهذه الدراسة.

(ب) إقترح عوامل أخرى يمكن أن تفسر وجود بعض الإختلافات العشوائية في هذه البيانات.

(ج) إرسم هذه البيانات. هل الشكل البياني يظهر وجود فروقاً في المتوسط في درجات الأختبار بين الطلاب اللذين حضروا أو اللذين لم يحضروا المحاضرات؟

(د) هل يؤثث على هذا التحليل الرسمي أن- في المتوسط- الطلاب تحقق درجات أعلى في الأختبار إذا ما حضروا تلك المحاضرات؟

ملحق ٧ : Appendix - 7

أوامر الحاسب الآلي عند إستخدام برنامج Minitab:

سنستخدم الأمثلة (٧-٥) و(٧-٦) و(٧-٨) لتوضيح أوامر برنامج Minitab التي نتج عنها الأشكال (٧-٢) و(٧-٣) و(٧-٦) على التوالي وكذلك المخرجات المناظرة لتلك الأمثلة.

للحصول على الشكل (٧-٢) ومخرجات برنامج Minitab للمثال (٧-٥) فإننا نستخدم منهج يسمح للحاسب الآلي برسم نقطي لعدد 14 دخل لكل ضاحية أو منطقة بصورة رأسية، وهذا المنهج يتطلب أحجام متساوية من العينات. لاحظ أن في جملة DATA، والتي تأتي بعد الأمر SET للعمود C1 (الضاحية) أرقام داخل قوسين ترمز إلى الضاحيتين 2, 1 بينما الرقم الذي يلي القوس المغلق يشير إلى عدد المشاهدات في كل ضاحية. يلي ذلك الأمر SET للعمود C2 (الدخل) ثم جملة DATA على سطرين، كل سطر يحتوي على 14 قراءة دخل لكل ضاحية. أخيراً، الأمر PLOT لرسم الدخول بيانياً على محور رأسي مقابل الضاحيتين التي تظهر على المحور الأفقي ثم الأمر TWOT الذي ينتج عنه المخرجات اللازمة لإختبار الفرض: $H_o{:}\mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل $H_a{:}\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

```
MTB > name c1='neiborhd' c2='income'
MTB > set c1
DATA> (1 2)14
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 86.5 49.2 54 47 60.6 57.1 29.3 51.4 39.8 34.4
DATA> 60 66.7 75.2 65.9
DATA> 58.8 30.4 38 48.5 46 32.7 34.5 48.4 41.7 60.5
DATA> 44 40.4 41.5 34.9
DATA> end
MTB > plot c2 c1
MTB > twot c2 c1
```

للحصول على شكل (٧-٣) ومخرجات برنامج Minitab للمثال (٧-٦)، فإننا نستخدم نفس المنهج كما في مثال (٧-٥) مع إستثنائين: (1)حيث أن الفرض البديل من طرف واحد، فإننا نستخدم الأمر الفرعي ALTERNATIVE، (2)حيث أن الفرض بتساوي تباينات المجتمعين فرض مقبول ومعقول، فإننا نستخدم الأمر الفرعي POOLED ليشير ذلك إلى إستخدام إحصاء T التجميعي والموضح بالصيغة (7.8). أوامر برنامج Minitab هي على النحو التالي:

```
MTB > name c1='level' c2='time'
MTB > set c1
DATA> (1 2)16
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 14 12 15 15 11 16 17 12 14 13 18 13 18 15 16 11
DATA> 20 22 18 18 19 15 18 15 22 18 19 15 21 22 18 16
DATA> end
MTB > plot c2 c1
MTB > twot c2 c1;
SUBC> alternative=-1;
SUBC> pooled.
```

ويمكن إستخدام خطوات أخرى بديلة في برنامج Minitab خاصة عندما تكون أحجام العينات غير متساوية وإن كان هذا لا يمنع من استخدامها في حالة العينات متساوية الحجم وسوف نوضح ذلك من خلال بيانات تمرين (٧-١٨) وفيما يلي أوامر برنامج Minitab:

```
MTB > set c1
DATA> 7.2 3.6 5.5 4.6 3.7 3.1 2.6 7.2
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 4.4 3.3 5.6 6.1 4.2 3.6 3.4 4.2 5 3
DATA> end
MTB > stack (c1) (c2) (c3);
SUBC> subscripts c4.
MTB > plot c3 c4
MTB > twot c3 c4
```

لاحظ أنه بعد أستخدام الأمر SET لتخزين بيانات العينتين C2,C1 على التوالي، نستخدم الأمر STACK لتكديس بيانات العينتين في العمود C3. ميزت العينتين في محتويات العمود C4، بمعنى أول ثمان أرقام (أي العينة الأولى) في العمود C4 ميزت بالعدد 1 والعشرة الثانية (أي العينة الثانية) ميزت بالعدد 2 وهذا يتيح لنا الحصول على الشكل البياني باستخدام الأعمدة C4,C3 من خلال الأمر PLOT، أيضا باستخدام نفس العمودين نحصل من خلال الأمر TWOT على مخرجات برنامج Minitab الخاصة بأختبار T اعتمادا على الصيغة (7.10). (في هذا التمرين، نجد أن الشكل البياني يوحي بعدم تساوي تباينات المجتمعين). للحصول على الشكل البياني للمثال (٧-٨) شكل (٧-٦)، نستخدم الفكرة الأساسية في شكل (٧-٢) للمثال (٧-٥) مع استثناء أننا نستخدم الأمر LPOT الذي يضع الضغط بيانيا على المحور الرأسي والموظفين على المحور الأفقي مع استخدام الرموز A,B لتميز بيانات "قبل"، "بعد" على الشكل البياني، وفيما يلي أوامر البرنامج للحصول على شكل (٧-٦).

```
MTB > name c1='when' c2='employee' c3='pressure'
MTB > set c1
DATA> (1 2)10
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 2(1:10)
DATA> end
MTB > set c3
DATA> 148 133 152 170 155 178 185 151 180 144
DATA> 158 176 150 179 183 206 177 165 175 186
DATA> end
MTB > lplot c3 c2 c1
```

يستخدم الأمر UNSTACK (C3),(C4),(C5) بجانب الأمر الفرعي SUBSCRIPTS C1 لوضع الضغط "بعد" في العمود C4 (أول سطر في جملة DATA والتي تلي الأمر SET C3 في الأوامر الخاصة بتوليد الرسم البياني السابق)، ووضع الضغط "قبل" في العمود C5 (ثاني سطر في جملة DATA والتي تلي الأمر SET C3 في الأوامر الخاصة بتوليد الرسم البياني السابق). الآن، يستخدم

الأمر LET لإنشاء عمود جديد يمثل الفرق بين"قبل"، "بعد": أخيرا تستخدم الأوامر ,TINTERVAL TTEST (كما وضحت في الملحق 6) للحصول على مخرجات برنامج MINITAB .

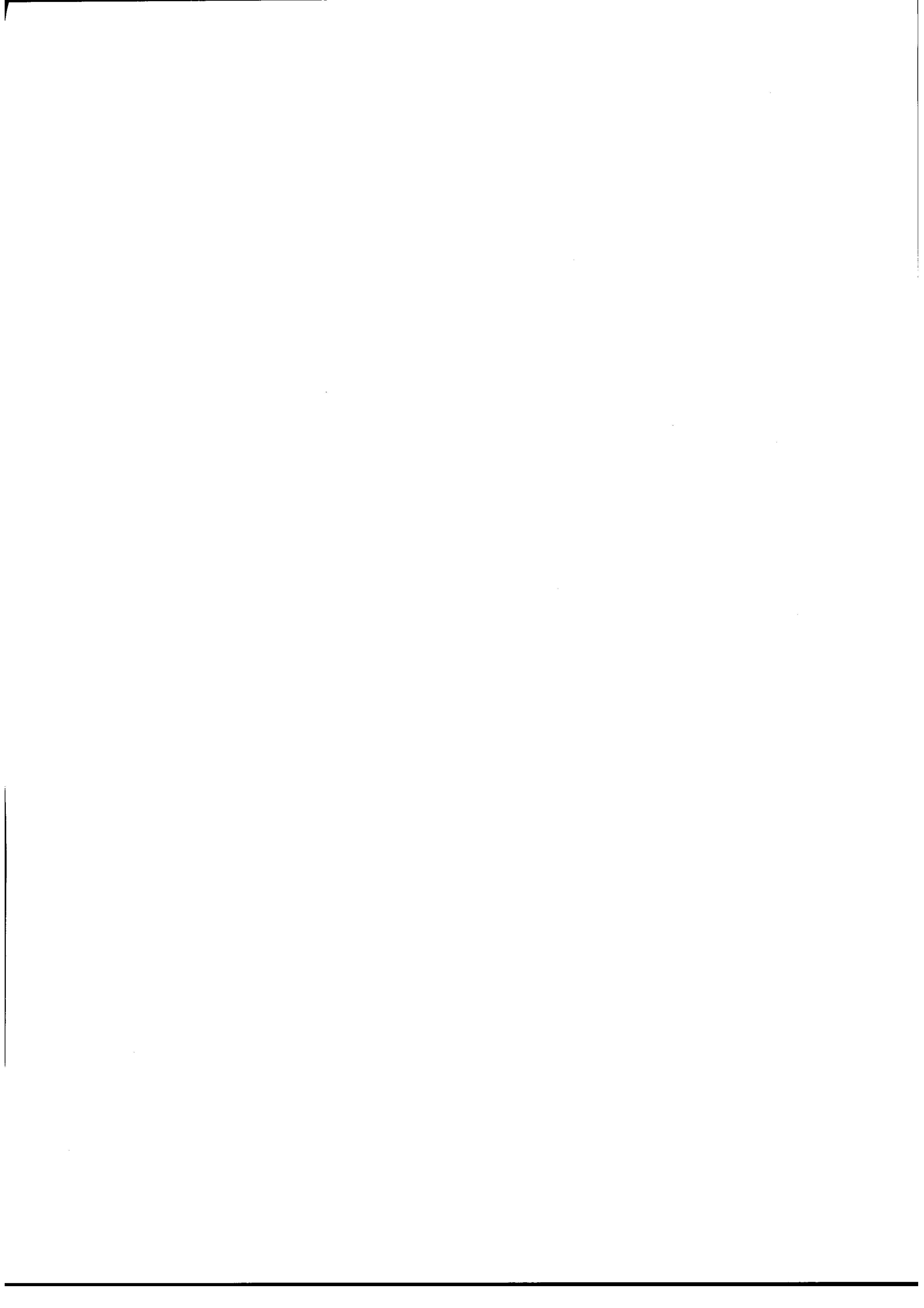
```
MTB > unstack (c3) (c4) (c5);
SUBC> subscripts c1.
MTB > let c6 = c5 - c4
MTB > ttest c6;
SUBC> alternative = 1.
MTB > tinterval c6
```

الفصل الثامن

تحليـــــل التبــــايـن

ANALYSIS OF VARIANCE

محتويات الفصل :



الفصل الثامن

تحليـــــل التبـــــايـــــن

ANALYSIS OF VARIANCE

(٨-١) نظرة عامة على محتويات الفصل : Bridging To New Topics

فى الفصلين الأول والسابع ، تم تقديم بعض المبادئ الأساسية لتصميم التجارب ، وفى الفصل السابع أيضا تم استعراض كيف يمكن أن تستخدم هذه المبادئ لمقارنة مستويين من العوامل (وهى مجتمعين أو متوسطات العملية) وذلك إما بإستخدام عينات عشوائية مستقلة أو عينات عشوائية ذات قراءات مزدوجة. وغالباً ما تنشأ الحاجة لفهم الفروق بين أكثر من مستويين لعامل ما، أو لفهم الفروق بين المستويات لعوامل عديدة. ويعتبر التصميم الإحصائى للتجارب أداة هامة لهذا الغرض. وهو أيضاً أداة قوية فى دراسات العملية لإدراك الآثار على متغير الإستجابة للمستويات المختلفة لأسباب التغير الشائعة، وذلك يعطى فرصة لإجراء تحسين إضافى للعملية .

وكما عرضنا فى الفصل السابع ، يمكن أن تساعد الأساليب البيانية البسيطة فى فهم الفروق. ومن المعلوم أن الرسم البيانى وحده لا يكفى لإيضاح ما إذا كانت مستويات عامل ما تختلف إختلاف حقيقى فى تأثيرها على متغير الإستجابة. وهذا صحيح بصفة خاصة فى الدراسات التى تنطوى على أكثر من عامل واحد. في مثل هذه الحالات، يتطلب الأمر طريقة للتحليل أكثر دقة مقارنة بأختبار T التجميعي أو T للقراءات المزدوجة والذي قدم في الفصل السابع. وسوف نقدم فى هذا الفصل إختبار يسمى تحليل التباين analysis of variance (واختصاره ANOVA) الذى يخدم هذا الغرض. وكما يوجد فى الفصل السابع، تتعامل التصميمات الإحصائية لهذا الفصل مع عينات عشوائية مستقلة والعينات العشوائية المختارة فى قطاعات، حيث يعتبر التجميع داخل قطاعات امتداد مباشر لمفهوم الإزدواجية .

(٨-٢) مقارنة المتوسطات لأكثر من مجتمعين بالإعتماد على عينات مستقلة

Comparing More Than Two Population Means with Independent Samples

وكتعميم مقارنة متوسطى مجتمعين لأى عدد من متوسطات المجتمعات، سوف نعود مرة أخرى للمثال المذكور فى الفصل السابع المشتمل على مثمنين لمجموعة من الأصول. تذكر أن مدير الخدمة المثمنة يشك بأن سبب الإختلاف بين المثمنين يؤدى إلى ظهور فروق غير مرغوب فيها فى قيم التثمين. ويرغب فى إدارة تجربة لتحديد ما إذا كان شكه صحيح أم لا. فإذا تم التأكد من شكه، سوف يبدأ برامج تدريبية لقياس نتائج المثمنين. وسوف نعمم هذا المثال بإفتراض أنه يوجد ثلاثة مثمنين C, B, A وقد حدد المدير 15 من الأصول المتماثلة لإستخدامها فى التجربة. وقد تم تحديد خمس أصول عشوائياً لكل مثمن. لاحظ أن هذا امتداد مباشر لتصميم العينات المستقلة الذى تم مناقشته فى الفصل السابع .

إفترض أن التجربة سوف تنتج البيانات الموضحة فى جدول (٨-١) (حيث الأرقام موضحة بآلاف الدولارات). أولاً دعنا نفحص ملخص البيانات. نجد أن متوسطات العينات الثلاثة هى 89.6 , 91.8 , 86.8 ويجب أن يسأل المدير نفسه عما إذا كانت هذه الإختلافات كبيرة بدرجة كافية للتأكيد على بدء برنامج التدريب. فإذا كانت الإجابة نعم، فيجب عليه أولاً الأخذ بعين الإعتبار ألا يكون المثمنين مختلفين حقيقة عن المتوسط وأن الإختلافات المشاهدة تعكس ببساطة تغير المعاينة العشوائية. ولمواجهة هذا الموضوع فى الفصل السابع، فقد استخدمنا إختبار T التجميعي **pooled-T** (ويعتمد الشخص الذى يستخدمه على الإفتراض القائل بأن تباينات المجتمعات متساوية) والآن لدينا ثلاثة مثمنين، لذلك نحتاج طريقة أخرى للتحليل وهى تحليل التباين.

جدول (٨-١) بيانات العينة للثلاثة مثمنين

A	B	C
90	93	92
94	96	88
91	92	84
85	88	83
88	90	87
$\overline{X}_A = 89.6$	$\overline{X}_B = 91.8$	$\overline{X}_C = 86.8$
$S_A^2 = 11.3$	$S_B^2 = 9.2$	$S_C^2 = 12.7$
$n_A = 5$	$n_B = 5$	$n_C = 5$

الإفتراضات الأساسية لتحليل التباين هى نفس الإفتراضات السابقة لإختبار T التجميعي pooled-T :

(1) إستقلال العينات العشوائية : فقد تم إختيار العينات الثلاث عشوائيا بحيث تكون جميعها مستقلة عن بعضها البعض.

(2) المجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى : فقد تم إفتراض أن توزيع قيم التثمين لكل الأشياء المثمنة بواسطة كل مثمن على حدة كافية لتمثيلها بالتوزيع الطبيعى.

(3) تساوى تباينات المجتمعات : فقد تم إفتراض أن مجتمعات القيم المثمنة التى تتبع التوزيع الطبيعى لها تباينات متساوية. حيث :($\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma^2$)حيث يعرف σ^2 بأنه التباين المشترك. وتقيس σ^2 التغير الملازم (المتأصل) داخل كل مجتمع.

(4) استقرار العمليات : عند دراسة العملية، نرغب غالباً فى مقارنة متوسطات عمليات عديدة. وبصفة عامة، يتم إفتراض أن العمليات التى سوف يتم مقارنتها تكون مستقرة، أى بعيدة عن أسباب التغير التى يمكن تحديدها.

ومن المهم إدراك أن تحديد هذه الإفتراضات لا يمثل بالضرورة أن تكون هذه الإفتراضات متحققة. ولكن مكون هام جداً فى التحليل الإحصائى هو إختبار صحة هذه الإفتراضات. ويعتبر الفحص الدقيق لبيانات العينة كافياً لهذا الغرض.

ونرغب الآن فى إختبار الفرض العدمى القائل بأن :

$$H_O: \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

(حيث μ_C, μ_B, μ_A متوسطات العمليات المجهولة للمثمنين C , B , A وذلك للخصائص مثل التى فى العينات) مقابل الفرض البديل .

يوجد على الأقل متوسط واحد يختلف عن الباقى : H_a

فإذا كانت البيانات كافية لإنكار صحة الفرض العدمى، فإن ذلك يوضح أن المثمنين يختلفوا فى متوسطاتهم، لذلك تشكل هذه النتائج أساس سليم للعمل الإدارى .

(٨-٢-١) تجزئة الإختلافات فى بيانات العينة :

من الواضح وجود إختلافات بين قيم $\overline{X}_C, \overline{X}_B, \overline{X}_A$ كما هو مبين فى جدول(٨-١). ودائماً سوف يوجد إختلافات بين متوسطات العينات بسبب تغيرات المعاينة العشوائية، حتى إذا كانت العينات مأخوذة من عمليات مثمنة بمتوسطات مماثلة. والسؤال الحاسم هو ما إذا كانت الفروق المشاهدة بين متوسطات العينات كبيرة بدرجة كافية للتأكيد على رفض الفرض العدمى أم لا. إذا اختلفت متوسطات العينات، بحجم أكبر من مجرد اعتبارها تعزى إلى تغير المعاينة العشوائية، فإننا نستنتج أن الفروق لا تعزى فقط إلى تغير المعاينة العشوائية، ولكن ترجع أيضاً إلى فروق فى عمليات التثمين الثلاث(μ_C, μ_B, μ_A) .

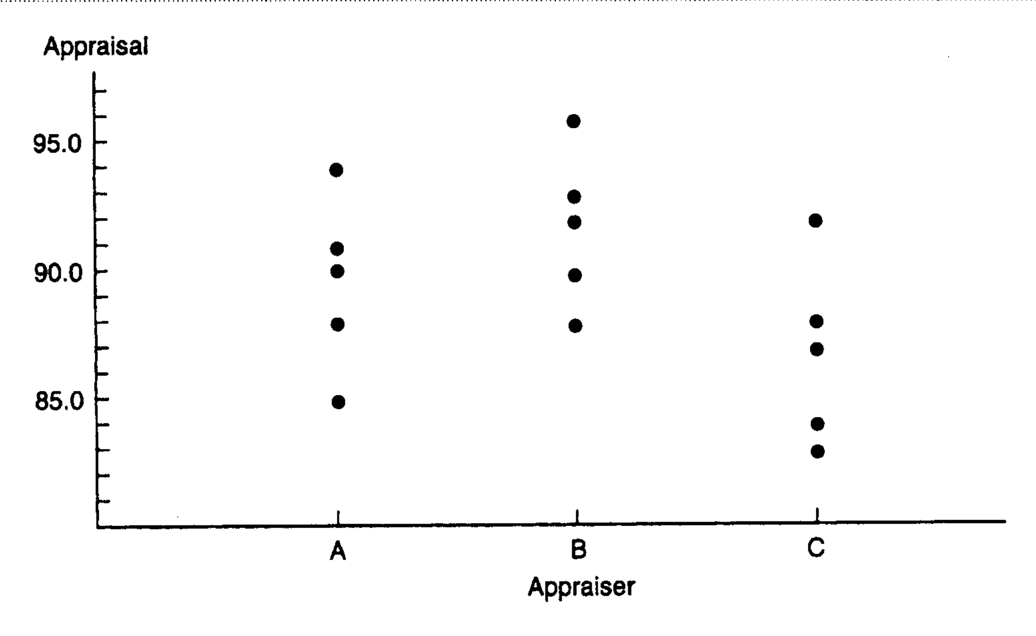
وقبل الإجابة على هذا السؤال، نحتاج إلى مراجعة العوامل التى تسبب الفروق المشاهدة بين متوسطات العينات. وبعبارة أخرى، نحتاج لفحص مصادر التغير المحتملة فى بيانات العينة وهي:

(١) احد مصادر الاختلاف المحتملة هو المثمنين. اذا كانت الفروق بين متوسطات العمليات الخاصة بهم موجودة، فإن ذلك يسبب فروق بين متوسطات العينات. بمعنى آخر، نحن بحاجة إلى فحص مصادر الأختلاف المحتملة في بيانات العينة.

(٢) وكما فى الفصل السابع ، فإن مصادر الاختلاف الأخرى فى بيانات العينة، هى الفروق بين قيم الممتلكات والتناقض بين المثمنين. والنقطة الرئيسية هى أنه يمكن إعتبار المصدرين من المصادر العشوائية للتغير. ويعد إختلاف الأصول الذى يسبب التغير (الإختلاف) عشوائي بسبب التجمع العشوائى لخصائص المثمنين على نتائجهم المثمنة فى شكل عشوائى. ويرجع التغير فى البيانات إلى التأثيرات المتحدة لكل العوامل العشوائية والتى يطلق عليها التغير العشوائى فى العينة أو البيانات التجريبية. فعلى سبيل المثال، إذا كانت الفروق بين قيم الممتلكات أو الأصول هامة أو إذا كان يمكن تقدير التناقض بين المثمنين فإنه قد لا يمكن تقدير الفروق بين المثمنين .

وسوف نفحص بيانياً هذه المصادر للاختلاف فى بيانات المثمنين قبل الأخذ فى الإعتبار طرق رسمية بشكل أكبر للتحليل. وقد تم توضيح مصادر الإختلاف فى بيانات المثمنين بيانياً فى شكل (٨-١). ويمكن رؤية المصدر الأول وهو الإختلاف بين المثمنين بمقارنة مشاهدات العينة لكل مثمن لمجموعة واحدة مع تلك الأصول بالمثمنين الآخرين. فى شكل (٨-١) لاحظ أن مجموعة المشاهدات للمثمن الثانى تتجه لأن تكون أعلى من تلك الأصول بالمثمنين الأول والثالث. إفترض أنه تم وضع خط عريض على المشاهدات للثلاثة مثمنين وذلك لتغطى عملياً كل المشاهدات. فإذا كان هذا الخط موازياً لمحور السينات، فمعنى ذلك أنه لا يوجد دليل أن الفروق موجودة بين المثمنين الثلاثة فى المتوسط. وللوهلة الأولى، لا تظهر الحالة هذه هنا، ولكن يجب أن نكون حريصون ونتجنب الوصول إلى نتائج سريعة .

وإذا لم تكن النتائج واضحة تماماً، يجب التحليل بطريقة أكثر رسمية .

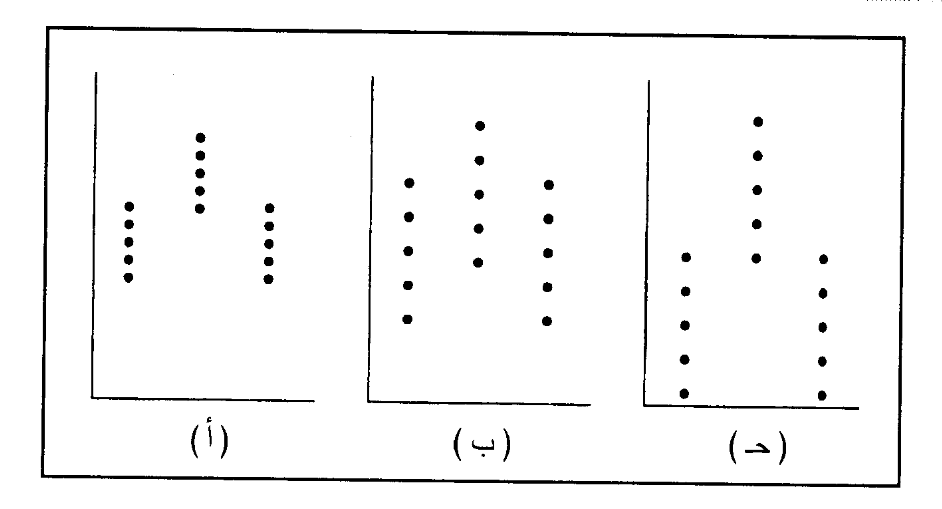


شكل(٨-١) : التحليل البيانى لبيانات المثمنين

وسوف نفحص الآن المصدر الثانى للأختلاف ، وهو الخطأ العشوائي . والذى يوصف بالإنتشار داخل مجموعة المشاهدات المرتبطة بكل مثمن . ومن الواضح ، أن الإنتشار هو تقريباً المساحة الرأسية من أكبر المشاهدات إلى أصغرها . ويجب ألا يكون للأختلاف داخل العينة ظاهراً بدرجة محسوسة . وإذا كان كذلك ، فسوف نعيد التفكير فى قراراتنا بالنسبة لمصادر الخطأ العشوائى (الفروق في قيمة الممتلكات والتناقض بين المثمنين) حيث أنه غير هام . لذلك كلما كان الأختلاف داخل العينة كبيراً كلما ازدادات صعوبة اكتشاف الفروق بين مجموعات المشاهدات المرتبطة بالمثمنين . وفى دراسات العمليات ، يمكن أن يُظهر الأختلاف الجوهرى داخل العينة أن العمليات غير مستقرة .

وفى مقارنة الفروق بين الثلاثة مثمنين ، يبدو أن الإنتشار داخل كل قيم المثمنين ظاهراً بدرجة ملحوظة . وبناءً على ذلك ، فإن الرسم البيانى الموضح بالشكل(٨-١) لا يوضح ما إذا كان يوجد فروق بين المثمنين . لذلك يلزم أن نعتمد على إختبار إستدلالى أساسى لهذا الغرض . ومن المهم أيضاً الإشارة إلى أن الإنتشار داخل قيم كل مثمن يجعل تلك القيم متماثلة مع القيم الخاصة بالمثمنين الآخرين . ويمكن أن تشير الفروق الكبيرة للانتشار داخل العينة أن إفتراض تساوى التباينات هو إفتراض غير منطقى .

وكما هو مبين فى الشكل (٨-١) ، فإن الفكرة الأساسية لتحديد وجود الفروق بيانياً بين متوسطات المجتمعات أو العمليات هو إيجاد حجم الأختلاف بين العينات بالنسبة لحجم الأختلاف داخل العينة . ويوضح الشكل (٨-٢) هذه الفكرة . فى الشكل (٨-٢- أ) لاحظ أن متوسطات المجتمعات تبدو مختلفة ، ومن الصعب الوصول إلى هذه النتيجة بثقة من الشكل (٨-٢- ب) . والفرق الواضح بين الشكلين هو حجم التغير العشوائى داخل مجموعة بيانات العينة . والآن خذ بعين الإعتبار الشكل (٨-٢- ج) . من الواضح مرة أخرى أن متوسطات المجتمعات مختلفة وبالرغم أن التغير العشوائي داخل المجموعات فى (٨-٢- ج) هو نفسه الموجود فى (٨-٢- ب) ، فإن الفروق بين متوسطات المجموعات هى الآن أكبر بكثير .



شكل (٨-٢)
توضيح للترجمة البيانية للتغير داخل العينات مقابل التغير بين العينات

(٨-٢-٢) أسلوب تحليل التباين : تجزئة التغير الكلى فى البيانات

وكما كان الحال فى التطبيقات السابقة، سوف ندرس المدخل البيانى كخطوة أساسية أولى فى التحليل الكلى. وننتقل الآن لطريقة أكثر دقة للاستدلال تسمى تحليل التباين. وهى امتداد مباشر لحالة عينتين مستقلتين والتي قدمت فى الفصل السابع. وتحليل التباين هو إختبار إستدلالى يستند إلى الفكرة القائلة بأنه يمكن تجزئة التغير الكلى فى بيانات العينة بطريقة ما بحيث يمكن تقدير مساهمات العوامل التى تسبب التغير. والهدف النهائى لتحليل التباين هو معرفة أى العوامل تسبب التغير فى بيانات العينة.

ونظراً لأن تحليل التباين هو إختبار إستدلالى، فنحتاج إلى إنشاء إحصائيات مناسبة لحل نفس الموضوعين المقدمين فى الجزء (٥-٤) فى الفصل الخامس، وبصفة خاصة ننشئ إحصاءة لتصف حجم التغير بين العينات. كذلك ننشئ إحصاءة لتصف حجم التغير داخل العينات. وتوضح نسبة بين هاتين الإحصائيتين أهميتهما النسبية (إحصاءة التغير بين العينات مقسومة على إحصاءة التغير داخل العينات). فإذا كانت النسبة كبيرة بدرجة ما، فإن التغير بين العينات يكون أكبر كثيراً بالمقارنة بالتغير داخل العينات. وكما فى التحليل البيانى، فإن هذا يوضح الفروق الموجودة بين متوسطات المجتمعات أو العمليات.

وسوف نعود إلى مثال الخبير المثمن. ونعرف من المناقشة السابقة أن التغير الكلى فى بيانات العينة فى جدول (٨-١) يتكون من المساهمات المركبة لعاملين هى :

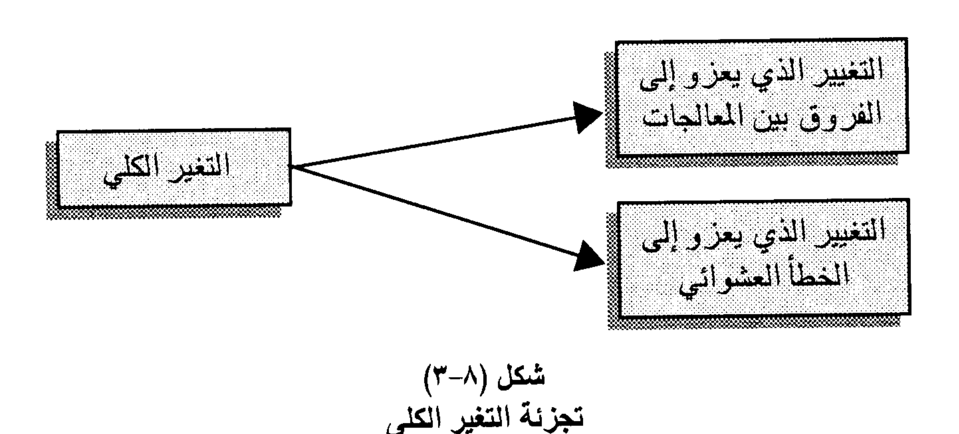
(١) الإختلافات بين المثمنين فى المتوسط.

(٢) الخطأ العشوائى.

تذكر أن الفرض العدمى يقر بأنه لا توجد فروق بين المتوسطات للثلاثة مثمنين. وللوصول إلى إحصاءة مناسبة لإختبار الفرض العدمى، نستخدم بيانات العينة لتقدير مساهمة هذين العاملين. ونرغب فى مقارنة التغير فى بيانات العينة الذى يمكن أن يعزو إلى الفروق بين الثلاثة مثمنين (التغير بسبب المثمن) بالتغير الذى يمكن أن يعزو إلى الأسباب العشوائية (التغير العشوائى). وفى هذا

الخصوص سوف نفكر كالتالى : إذا كان إختلاف المثمنين أكبر كثيراً من الاختلاف العشوائى ، نميل إلى رفض الفرض العدمى ، ونستنتج أنه يوجد مثمن واحد على الأقل يختلف فى المتوسط عن الباقى . وإذا كان اختلاف المثمنين هو نفسه الاختلاف العشوائى ، فنميل إلى قبول الفرض العدمى ، وإستنتاج أنه لا يوجد إختلاف بين المثمنين فى المتوسط .

وبصفة عامة ، نطلق على المجتمعات أو العمليات محل الدراسة «المعالجات» **treatments**. فإذا كنا ندرس أثر عامل ما عند مستويات مختلفة ، فإن هذه المستويات هى المعالجات . والمعالجات فى هذا المثال هى الثلاث مثمنين . ويوضح شكل (٨-٣) تجزئة البيانات إلى مكونات : التغير بسبب الفروق بين المعالجات (فى المثال الحالي هى الثلاث مثمنين) والتغير الذى يعزو إلى الأسباب العشوائية .



شكل (٨-٣)
تجزئة التغير الكلى

وكما أشرنا سابقاً ، فإن إنشاء إحصاء (**statistic**) لإختبار الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فروق بين متوسطات المعالجات ، تعتمد على مقارنة التغير الناتج عن المعالجات بالتغير العشوائى ، وهذا يتسق مع مبادئ الترجمة البيانية الموضحة فى شكل (٨-٣) . وفى الأجزاء القادمة ، سوف نوضح كيف نحدد مكونات التغير . وبعد أن نقوم بإنشاء تعبيرات رياضية لكل مكون من مكونات التغير ، سوف نعود لإنشاء إحصاء مناسب لذلك .

تحديد حجم التغير الكلى :

بالنسبة لأغلب الأجزاء التالية ، سوف نستخدم الحاسب الآلى لإجراء الحسابات فى إختبار تحليل التباين . ومع ذلك ولمساعدتك فى فهم الصيغ الأساسية لكل مكون من مكونات التغير ، سوف نوضح ذلك بصحبة مجموعات من بيانات العينة . وكما تعلمنا فى الفصل الثانى ، أنه يمكن تحديد التغير الكلى داخل أى مجموعة من البيانات عن طريق حساب مربع الإنحراف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة عن المتوسط العام ثم تجميع هذه الإنحرافات المربعة . ومجموع الإنحرافات المربعة يطلق عليه مجموع المربعات الكلى **total sum of squares** ويعرف بالرمز (SST) . (ويشار إليه أحياناً باسم مجموع المربعات المصحح) وبالنسبة لمثال المثمن ، فإن المتوسط لكل المشاهدات هو :

$$(\overline{X} = (90 + 94 + \ldots\ldots + 83 + 87) \; / \; 15 = 89.4)$$

لذلك فإن مجموع المربعات الكلى لبيانات العينة هو:

$$SST = (90-89.4)^2 + (94-89.4)^2 + \ldots\ldots + (83-89.4)^2 + (87-89.4)^2 = 195.6$$

وكما تعلم من الفصل الثانى، فإن SST هو بسط التعبير الرياضى لتباين بيانات العينة*. ماذا تعتقد أن يكون مجموع المربعات الكلى إذا كانت بيانات العينة متماثلة؟ الإجابة هى 0 (صفر)، نظراً لأنه لا يوجد إنحراف لقيمة المشاهدات عن قيمة متوسطها. لذلك كلما ازدادت قيمة SST، كلما ازداد التغير للمجموعة الكلية لبيانات العينة.

تحديد حجم التغير الكلى الذى يرجع إلى الإختلاف بين المعالجات

أحد مكونات SST يرجع إلى الإختلافات بين متوسطات العينات للمعالجات (الثلاث مثمنين). ويتم تحديد هذا المكون بحساب مربع الإنحراف لمتوسط كل معالجة (عينة) عن المتوسط العام، وضرب كل هذه الإنحرافات المربعة فى حجم العينة المناظر، وإجراء التجميع لكل المعالجات. وتسمى الكمية الناتجة «مجموع المربعات للمعالجات» أو (مجموع مربعات المعالجات) **Sum of Squares for Treatments** ويعرف بالرمز SSTR. وبالنسبة لبيانات العينة فى جدول (٨-١) فإن مجموع مربعات المعالجات هو:

$$\begin{aligned} SSTR &= n_A(\overline{X}_A - \overline{X})^2 + n_B(\overline{X}_B - \overline{X})^2 + n_C(\overline{X}_C - \overline{X})^2 \\ &= 5(89.6 - 89.4)^2 + 5(91.8 - 89.4)^2 + 5(86.8 - 89.4)^2 \\ &= 62.8 \end{aligned}$$

ماذا تعتقد أن يصبح مجموع مربعات المعالجات إذا تساوت متوسطات العينات؟ الإجابة هى 0 (صفر) وذلك لأن المتوسط العام سوف تكون له نفس القيمة. لذلك، كلما ازدادت قيمة SSTR، كلما ازداد التغير بين متوسطات العينات. والآن إفترض أنه يوجد إختلاف بين متوسطات العينات. هل ذلك يدل ضمناً على أن متوسطات العمليات للثلاث مثمنين مختلفة؟ ليس بالضرورة. إذا كان لا يوجد إختلافات بين المثمنين، فى المتوسط، فسوف تظل متوسطات العينات مختلفة بدرجة معينة بسبب التغير فى التخصيص العشوائي للأصول المطلوب تقييمها وكذلك عدم التناسق والتناقض بين المثمنين. والنقطة الهامة لك هى إدراك أن مجموع المربعات الكلي يقيس التغير الذى يسببه فروق المعالجات والخطأ العشوائى.

تحديد حجم التغير الذى يرجع إلى الخطأ العشوائى:

تذكر أن إنتشار المشاهدات داخل كل معالجة (المثمن الواحد) يعكس تغير الخطأ العشوائى. ويتم تحديد مكون الخطأ العشوائى من مكونات SST عن طريق حساب مربع الإنحرافات للمشاهدات الفردية عن متوسط العينة، ومن ثم تجميع هذه الإنحرافات لكل المشاهدات فى مجموعة البيانات الكلية. ونظراً لأن هذه الكمية تحدد مساهمة الخطأ العشوائى فإنها تسمى مجموع المربعات للخطأ، (أو مجموع مربعات الخطأ) **Sum of Squares for Error** ويعرف بالرمز SSE. وبالنسبة لبيانات العينة فى جدول (٨-١) فإن مجموع مربعات الخطأ هو:

---

* وكمرجع، نكرر التعبير الرياضي لتباين العينة

$$S^2 = \frac{SST}{n-1} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

تذكر انه إذا وجد لدى آلتك الحاسبة مفاتيح الدوال الإحصائية، يمكنك تحديد قيمة SST بسهولة بإدخال البيانات، والضغط على مفتاح الإنحراف المعياري للعينة، وتربيع الإنحراف المعياري ومن ثم ضرب الناتج فى (n-1) أى أن: $SST = (n-1)S^2$

$SSE = (X_{1A} - \overline{X}_A)^2 + ... + (X_{5A} - \overline{X}_A)^2$

عينة المثمن الأول : $(90-89.6)^2 + ... + (88-89.6)^2$

$+ (X_{1B} - \overline{X}_B)^2 + ... + (X_{5B} - \overline{X}_B)^2$

عينة المثمن الثاني : $(93 - 91.8)^2 + ... + (90-91.8)^2$

$+ (X_{1C} - \overline{X}_C)^2 + ... + (X_{5C} - \overline{X}_C)^2$

عينة المثمن الثالث: $(92-86.8)^2 + ... + (87-86.8)^2$

$= 132.8$

ماذا تعتقد أن يكون مجموع مربعات الأخطاء، إذا كانت جميع المشاهدات داخل كل عينة مثمن واحدة (ولكن ليس بالضرورة أن تتساوى مع تلك الخاصة بالمثمنين الآخرين)؟ ومرة أخرى ستكون الإجابة 0 (صفر) حيث لا يوجد إختلاف لمشاهدات المثمن الواحد عن متوسطه. وكلما ازدادت قيمة SSE، كلما ازداد التغير بين المشاهدات داخل كل معالجة (بمعنى، داخل كل عينة مثمن) .

لقد تحدثنا عن تجزئة مجموع المربعات الكلي. بالنسبة لبيانات المثمن، حددنا مجموع المربعات الكلي، مجموع مربعات المعالجات، مجموع مربعات الخطأ وهم : , SST = 195.6 , SSTR = 62.8 SSE = 132.8 . لاحظ أنه بإضافة مجموع مربعات الخطأ إلى مجموع مربعات المعالجات، ينتج مجموع المربعات الكلي = 195.6 = 62.8 + 132.8 . ويوضح هذا المثال طبيعة تجزئة مجموع المربعات الكلي، كما هو موضح بالشكل (٨-٣) . لذلك فإن تجزئة مجموع المربعات الكلي ينتج علاقة عامة هامة هي :

$$SST = SSTR + SSE \quad \textbf{(8.1)}$$

ويوضح التعبير الرياضي (8.1) أن مجموع المربعات الكلي يساوي مجموع مربعات المعالجات مضافاً إليه مجموع مربعات الخطأ. وهذه العلاقة صحيحة بصفة عامة لأي عدد من المعالجات (ولأي عدد من العينات المستقلة) .

لقد ناقشنا الأسلوب البياني لتحليل البيانات لتحديد ما إذا كان هناك إختلاف بين متوسطات المجتمعات أو العمليات أم لا. ويعتمد هذا التحليل على المقارنة الفعلية لتغير البيانات داخل العينات بالنسبة للتغير بين العينات. ولقد أنشأنا طريقة لتحديد مقدار التغير الكلي داخل العينات (SSE) وكذلك تحديد مقدار التغير الكلي بين العينات (SSTR) . وقد يكون غير صحيح أن نقارن بين قيم كل من SSTR ، SSE مباشرة، لأن كل واحد منهم مقدار كلي. لذلك كلما ازداد عدد المعالجات المأخوذ في الإعتبار كلما ازدادت قيمة SSTR التي تمثلها. والحقيقة المجردة القائلة بأننا نقارن، مثلاً، عشرة معالجات وليست ثلاثة معالجات يجب ألا تكون عامل مأخوذ في الإعتبار إذا ما كانت فروق المعالجات موجودة. بالمثل، كلما ازداد عدد المشاهدات داخل العينة، كلما ازدادت قيمة SSE التي تمثلها. وقبل مقارنة هذه الكميات ببعضها البعض بطريقة هادفة، فإننا نحتاج إلى تحويلها إلى متوسطات: بمعنى أنه يجب تحويل SSTR إلى متوسط التغير بين العينات وتحويل SSE إلى متوسط التغير داخل العينات .

تحديد متوسط الأختلافات داخل العينات ، بين العينات : متوسط المربعات

لقد علمنا من الفصل الثانى أن تباين العينة S^2 لأى مجموعة من بيانات العينة يعطى تقديرا لمتوسط مربع انحرافات مشاهدات المجتمع عن متوسط المجتمع . ويتم الحصول على التباين بقسمة مجموع المربعات الكلى (SST) على درجات الحرية المرتبطة به (n-1). وبأسلوب مماثل، تباين متوسطات (العينة) للمثمنين الثلاثة هو مجموع مربعات المعالجات مقسوماً على درجات حرية المعالجات . ونظراً لأنه يوجد ثلاثة مثمنين ، لذلك يوجد [2 = (1-3)] درجة حرية للمعالجات . وتباين متوسطات العينات هو المقدار SSTR مقسوماً على درجات حريته . ويعرف هذا المقدار بمتوسط المربعات للمعالجات (متوسط مربعات المعالجات) **mean square for treatments** ويعرف بالرمز MSTR .

وبصفة عامة، إذا كان يوجد K معالجة فإن مجموع مربعات المعالجات له (K-1) درجة حرية . لذلك ، بالنسبة لمثال المثمن ، SSTR له (K-1) درجة حرية أى [2 = (1-3)] درجة حرية ، لذلك فإن التباين الذى يعزى إلى الفروق بين متوسطات المثمنين هو :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{62.8}{3-1} = 31.4$$

والآن نحتاج إلى وصف متوسط الاختلاف داخل العينات (بمعنى الاختلاف الذى يعزى إلى الخطأ العشوائى) . ويتكون التباين داخل العينات من مجموع مربعات الخطأ مقسوماً على درجات الحرية الخاصة به . ودرجات الحرية للخطأ العشوائى هى مجموع درجات الحرية لكل عينة مستقلة . وبالنسبة لمثال المثمنين ، يوجد [4 = (1-5)] درجة حرية لكل عينة من الثلاث عينات المستقلة . لذلك فإن درجات الحرية للتباين داخل العينات هو 12 . وبصفة عامة فإن درجات حرية الخطأ تتحدد بالعدد الكلى للمشاهدات فى مجموعة البيانات (n) مطروحاً منه عدد المعالجات (K) . ويعرف المقدار SSE مقسوماً على درجات حريته بمتوسط المربعات للأخطاء (متوسط مربعات الأخطاء) ويعرف بالرمز MSE . لذلك فإن التباين داخل العينات هو :

$$MSE = \frac{SSE}{n-K} = \frac{132.8}{12} = 11.0667$$

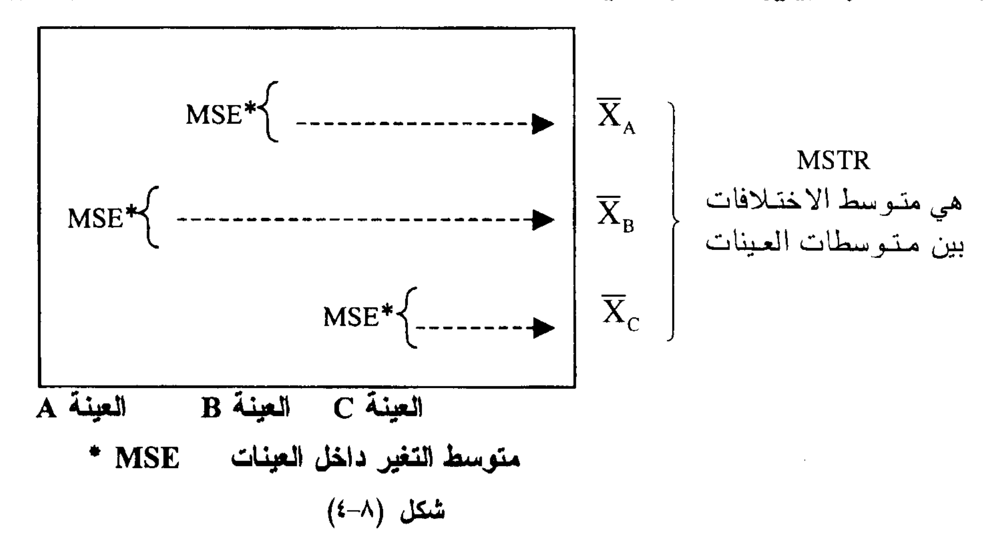
وفى الواقع ، فإن متوسط مربعات الأخطاء هو امتداد مباشر لمفهوم التباين التجميعي المستخدم فى الفصل السابع لمقارنة المتوسطات المعتمدة على عينتين مستقلتين . وتذكر أن تباينات المجتمعات الغير معلومة σ_A^2 ، σ_B^2 ، σ_C^2 تصف التغير داخل مجتمع كل مثمن . وإن تباينات العينات المماثلة تصف التغير داخل عينة كل مثمن . ونظراً لأنه تم افتراض أن تباينات المجتمعات متساوية ، لذلك يمكن تقدير القيمة المشتركة σ^2 بتجميع تباينات العينات ، مع الأخذ فى الإعتبار أحجام العينات الخاصة بهم كما كنا نفعل بالنسبة لعينتين مستقلتين . وفى مثال المثمنين المستخدم كتوضيح ، هذا يعنى أن :

$$MSE = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2 + (n_C - 1)S_C^2}{(n_A - 1) + (n_B - 1) + (n_C - 1)}$$

$$= \frac{(5-1)(11.3) + (5-1)(9.2) + (5-1)(12.7)}{4+4+4} = \frac{132.8}{12}$$

$$= 11.0667$$

وهي نفس القيمة التى حصلنا عليها للمقدار MSE . لاحظ أيضاً أن البسط ، 132.8 هو القيمة المحسوبة سابقاً للمقدار SSE . ويوضح شكل (٨-٤) هذه المقادير فى تحليل بيانى لشكل (٨-١) . وسوف نستخدم الآن هذه المقادير لإنشاء إختبار أكثر دقة لوصف الفروق بين المعالجات فى المتوسط .



شكل (٨-٤)

مقادير MSE , MSTR المماثلة مع تحليل التباين البيانى المعروض فى شكل (٨-١)

وسيلة إختبار تحليل التباين ANOVA

والآن نقوم بإنشاء الإحصائيات التى تحدد حجم متوسط الاختلاف بين العينات MSTR وحجم متوسط الاختلاف داخل العينات (MSE) حتى تكون المقارنة ذو معنى وهدف. والوسيلة الرئيسية فى إختبار تحليل التباين هى النسبة (MSTR/MSE) . وكلما ازدادت هذه النسبة، كلما ازداد التغير بين العينات بالمقارنة بالتغير داخل العينات. ومن ثم وجود دليل قوى ضد الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فروق بين متوسطات المجتمعات أو العمليات .

ويجب الآن أن تعرف أن إختبار الفروض الإحصائية يتطلب أن نعرف توزيع المعاينة الذى سوف يستخدم في ظل الإفتراض المؤقت القائل بأن الفرض العدمى صحيح. وتوزيع المعاينة للنسبة (MSTR / MSE) هو توزيع F بدرجات حرية (K-1) للبسط ، (n-K) للمقام، هذا إذا كان الفرض العدمى صحيح. (وقد تم تقديم توزيع F فى الفصل السابع فى الجزء (٦-٧) والإحصائية أو الوسيلة المناسبة لإختبار تحليل التباين هى :

$$F=\frac{MSTR}{MSE} \qquad (8.2)$$

وبالنسبة لمثال المثمنين ، إذا كان الفرض العدمى صحيح، فإن توزيع المعاينة لوسيلة الأختبار هو توزيع F بدرجات حرية 2 ، 12 . لاحظ أن القيم الكبيرة لهذه النسبة تبين التغير الكبير بين العينات بالمقارنة بالتغير داخل العينات. وفى الواقع إذا كان H_0 صحيحاً فإننا نتوقع أن يكون MSTR≈MSE وبالتالي فإن (MSTR / MSE≈1) بمعنى قريبة من الواحد. وإذا كان MSTR أكبر بكثير من MSE (أو أن MSTR / MSE أكبر كثيراً من الواحد الصحيح) فسوف يكون منطقياً أن يعزى التغير الكبير بين العينات إلى الفروق بين متوسطات المجتمعات، لذلك فإن دليل العينة ينكر صحة الفرض العدمى فقط فى حالة القيم الكبيرة للنسبة (F = MSTR / MSE) . وكنتيجة لذلك فإن إختبار تحليل التباين هو إختبار جانب واحد (طرف واحد). وكما هو معتاد، كلما كانت قيمة P صغيرة (P - value) كلما كان الفرض العدمى أقل قبولاً، وكلما إزدادت درجة التأكد أن هناك إختلاف بين متوسطات المجتمعات.

وسوف نكمل إختبار تحليل التباين لمثال المثمنين. وقيمة الإحصاء F هى :

$$F=\frac{31.4}{11.0667}=2.84$$

وقيمة P (P - value) عندما تكون قيمة (F = 2.84) يمكن إيجادها باستخدام الحاسب الآلى وهى 0.098 ؛ أى أن إحتمال ملاحظة قيمة F التى تساوى 2.84 أو أكبر هى 0.098 إذا كان الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات صحيح. وعلى الرغم من وجود دليل على وجود فروق بين الثلاثة مثمنين، إلا أن الدليل ليس كافى. فإذا كان يوجد فروق بين متوسطات عملياتهم، فسوف يكون التغير العشوائى داخل العينات كبير جداً للإختبار لإكتشاف الفروق بدرجة ثقة كبيرة.

ولاحظ أنه لا يمكن الحصول على قيمة P (P-value) عندما (F = 2.84) مباشرة من الجدول. حيث يعطى جدول (E) الموجود فى الملحق القيم الجزيئية لتوزيع F المناظرة لقيم الإحتمالات 001 , 0.025 , 0.05 , 10. , 90. , 975. , 99 . وبالنسبة لدرجات الحرية (2 , 12) نجد أن $F_{.90,2,12} = 2.81$, $F_{.95,2,12} = 3.89$ ونظراً لأن القيمة 2.84 تقع بين القيمتين السابقتين. لذلك نعرف أنه يلزم أن تقع قيمة P بين 0.05 , 0.10 (وكما أوضحنا فإن P-value هى 0.098).

الإستنتاجات العملية لمثال المثمنين أو المسعرين

ماذا يجب على المدير عمله عندما تكون النتائج غير واضحة على الإطلاق؟ فإذا كانت الإختلافات بين متوسطات عينات المسعرين كبيرة بدرجة كافية لكى يهتم المدير، فإنه يجب عليه محاولة تقليل حجم اختلافات الخطأ العشوائى فى البيانات. وهذا يمكن تحقيقه، على سبيل المثال، بالتجميع بالنسبة لقيم الأصول. (يجب أن يقيم المسعرين نفس المجموعة من الأصول). وفى هذه الحالة تدخل قيمة كل أصل فى قطاع من البيانات. وسوف يتم مناقشة التجميع فى قطاعات فى الجزء (٨-٣). وإذا لم يكن لدى المدير دليل مستقل قوى على وجود فروق بين الثمنين (المسعرين) من مصادر أخرى بخلاف هذه الدراسة، سوف يكون شئ سابق لأوانه لتنفيذ برامج تدريب جديدة. فإذا أخذ بعين الإعتبار إهمال الفروق الموجودة بين المسعرين، فإنه لا توجد حاجة لتوسيع هذه الدراسة أو تنفيذ برنامج تدريب.

إن تحديد مجاميع المربعات (SSE , SSTR , SST) ، درجات الحرية ومتوسطات المربعات (MSE , MSTR) ، وقيمة الاحصاء F (التى تشير فيما بعد إلى قيمة F) يكون قد تشكل إختبار تحليل التباين. وعادة يتم تجميع هذه النتائج وعرضها بجدول تحليل التباين. ويقدم جدول تحليل التباين أسلوب مناسب لتجميع المقادير وثيقة الصلة بالموضوع لإختبار الفرض العدمى المحدد. وجدول (٨-٢) هو جدول تحليل التباين لمثال المسعرين. لاحظ أنه قد تم عرض مجموع المربعات فى عمود «SS»، ثم عرض درجات الحرية فى عمود «df» ، ثم عرض متوسط المربعات فى عمود «MS» وثم عرض قيمة الإحصاء F فى عمود F-value . وليست من الممارسة العملية أن يشتمل جدول تحليل التباين على قيمة P - value . ولكنها فكرة جيدة نظراً لأنها تكمل إختبار الفرض العدمى وغالباً ما تكون متاحة من إستخدام الحاسب الآلى.

جدول (٨-٢)
جدول تحليل التباين لمثال المسعرين

مصدر الإختلاف	Df	SS	MS	F-value	P-value
المسعرين	2	62.8	31.4	2.84	.098
الخطأ	12	132.8	11.0667		
التغير الكلي	14	195.6			

فى جدول (٨-٢) لاحظ أن درجات الحرية الكلية هى [$(n-1) = 15-1 = 14$] ودرجات الحرية الكلية هى ببساطة درجات الحرية المرتبطة بتباين العينة بأكملها التى تحوى ($n = 15$)مشاهدة. لاحظ أيضاً أن مجموع درجات الحرية الكلى ($2+12=14$) . وهذا صحيح بصفة عامة . وكما يمكن تجزئة مجموع المربعات الكلى إلى مجموع مربعات المعالجات ومجموع مربعات الخطأ، يمكن أيضاً تجزئة درجات الحرية الكلية بنفس الطريقة .

(٨-٢-٣) تعميم أسلوب تحليل التباين لعدد K من العينات المستقلة :

لتعميم التحليل السابق لأى عدد من العينات المستقلة، نعرف المقادير التالية التى يتضمنها أسلوب تحليل التباين :

المقادير اللازم حسابها لإجراء تحليل التباين لعدد من العينات العشوائية المستقلة :

K = عدد العينات المستقلة (بمعنى عدد المعالجات) .

n_j = حجم العينة للمعالجة رقم j .

$n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_k$

n = العدد الكلى للمشاهدات فى العينة بأكملها .

i = دليل يشير إلى رقم المشاهدة داخل العينة ($i = 1, 2, \ldots. n_j$)

j = دليل يشير إلى عينة المعالجة ($j = 1, 2, \ldots k$)

X_{ij} = المشاهدة رقم i لعينة المعالجة رقم j فى البيانات .

$\overline{X}$ = متوسط كل المشاهدات فى البيانات كلها .

T = مجموع كل المشاهدات فى البيانات كلها .

$\overline{X}_j$ = متوسط المشاهدات فى عينة المعالجة رقم j .

T_j = مجموع المشاهدات فى العينة رقم j .

الصيغ العامة لمجموع مربعات تحليل التباين كما يلي:

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(X_{ij} - \overline{x}\right)^2 \qquad (8.3)$$

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2 \qquad (8.4)$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(X_{ij} - \overline{x}_j\right)^2 \qquad (8.5)$$

درجات الحرية :

يوجد ($k-1$) درجة حرية خاصة بالمقدار SSTR ، ويوجد ($n-k$) درجة حرية خاصة بالمقدار SSE، يوجد ($n-1$) درجة حرية خاصة بالمقدار SST . وكما أشرنا فى مثال المسعرين، يتم تجزئة درجات الحرية كالتالى :

$$(n - 1) \quad = \quad (k - 1) \quad + \quad (n - k) \qquad (8.6)$$

↓ ↓ ↓

الكلية d f = المعالجات d f + الخطأ العشوائى d f

حيث n هى العدد الكلى للمشاهدات فى بيانات العينة المبوبة، k هى عدد المعالجات.

وقد يكون مفيداً أن تتذكر أن درجات حرية المقدار SST هو عدد المشاهدات الكلى فى البيانات المبوبة مطروحاً منها واحد، ودرجات حرية المقدار SSTR هو عدد المعالجات مطروحاً منها واحد. أما درجات حرية المقدار SSE يمكن تحديده بطرح عدد المعالجات من عدد المشاهدات الكلية.

متوسط المربعات :

وكما أوضحنا، فإنه يتم تحديد متوسط المربعات بقسمة مكونات مجموع المربعات على درجات حريته المناظرة. أي أن متوسط المربعات هو :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} \qquad (8.7)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} \qquad (8.8)$$

إختبار تحليل التباين :

لإختبار الفروض :

$$H_O : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

H_a : أحد هذه المتوسطات على الأقل يختلف عن الباقى

نقارن التباين بين العينات بالتباين داخل العينات بإيجاد النسبة F (F= MSTR/MSE) . إذا كان الفرض العدمى صحيح، فإن توزيع المعاينة سيصبح توزيع F بدرجات حرية (k-1)، (n-k). وتحليل التباين هو إختبار طرف واحد، لأن الدليل ضد الفرض العدمى يتواجد فقط عندما يكون التباين بين العينات كبير (MSTR) بالمقارنة بالتباين داخل العينات MSE. كلما كانت قيمة P المماثلة لقيمة F المحددة صغيرة، كلما كان دليل العينة قوى فى مواجهة الفرض العدمى. وجدول تحليل التباين الذى يضم معلومات عن تحليل التباين لعدد K من المعالجات (عدد k عينة مستقلة) موضح فى جدول (٨-٣).

جدول (٨-٣)
جدول تحليل التباين العام لعدد k عينة مستقلة

مصدر الإختلاف	D f	SS	MS	F-value	P-value
المعالجات	k-1	SSTR	MSTR	MSTR/MSE	من الحاسب الآلي
الخطأ	n-k	SSE	MSE		
التغير الكلي	n-1	SST			

مثال (٨-١)

يستخدم مصنع للتعبئة أربعة آلات لعملية التعبئة. وقد تم تصميم الآلات لتسكب نفس وزن المنتج داخل كل حاوية. ويوجد سبب واحد يمكن أن يسبب التغير فى العملية هو الفروق بين الآلات فى متوسط الحجم المسكوب بالفعل. وفى إطار بذل الجهد لتقليل هذا التغيير، قامت مديرة المصنع بتصميم تجربة لمقارنة متوسط الأحجام المسكوبة من قبل الآلات. وقد اختارت عشوائياً عدد من الحاويات المعبأة بواسطة كل آلة وقامت بوزن المحتويات. وبيانات العينة المعطاة فى جدول (٨-٤).

جدول (٨-٤)
بيانات العينة لعملية التعبئة (الأحجام بالأونس)

الآلـة

1	2	3	4
5.24	5.20	5.19	5.17
5.22	5.20	5.20	5.18
5.22	5.21	5.18	5.19
5.23	5.22		5.19
5.23			
$n_1=5$	$n_2=4$	$n_3=3$	$n_4=4$
$\overline{X}_1 = 5.2280$	$\overline{X}_2 = 5.2075$	$\overline{X}_3 = 5.1900$	$\overline{X}_4 = 5.1828$
$S_1^2 = .00007$	$S_2^2 = .00009$	$S_3^2 = .00010$	$S_4^2 = .00009$

(a) لخص البيانات بيانياً. ماذا تظهر البيانات بخصوص الأحجام المسكوبة عن طريق الآلات الأربعة؟

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى تظهر البيانات أن الآلات تسكب أحجام مختلفة فى المتوسط وذلك بطريقة دقيقة .

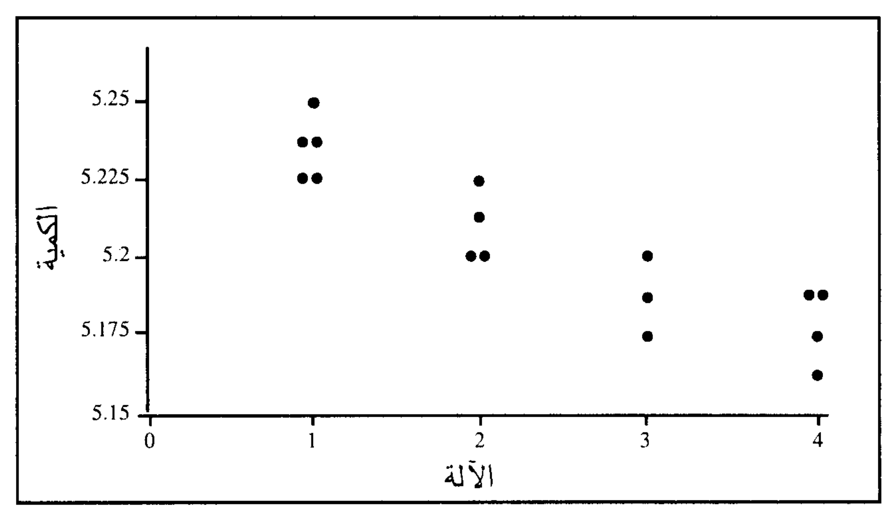
الحل

سوف نأخذ أولاً بعين الإعتبار المصادر التى يمكن أن تساهم فى تغير بيانات العينة وفى تحليل التباين، نجد أن المعالجات هى الأربعة آلات. والذى نرغب فى تحديده هو ما إذا كان يمكن أن تعزى الفروق المشاهدة بين متوسطات العينات إلى الفروق بين متوسطات العملية للأربعة آلات أم لا. والسبب الممكن للتغير العشوائى هو التناقض وعدم التناسق بين الآلات؛ التغير فى المواد الخام، عمال التشغيل، والظروف البيئية، وأى تغير فى دقة عملية القياس .

(a) ومن بيانات العينة، نلاحظ أن متوسط الحجم المسكوب عن طريقة الآلة الأولى أكبر من ذلك الخاص بالآلات الأخرى، خاصة الآلات (3)، (4) . ويتم توضيح بيانات العينة بيانياً فى شكل (٨-٥) بنفس الأسلوب المتبع فى مثال المسعرين. وللمقارنة بهذا المثال (انظر شكل ٨-١) .

ويبدو أن التغير داخل كل عينة صغير، ولكن الاختلاف بين العينات كبيراً إلى حد ما. وقد يكون

من الصعب أن نتخيل (نتصور) الحد أو الشريط الأفقى الذى يغطى فعلياً كل المشاهدات. وبناءً على ذلك، يبدو أن الفروق بين متوسطات العينات لا تعكس فقط تغير المعاينة العشوائية. ويجب ألا تندهش عند رؤية إختبار تحليل التباين فى المطلوب (b) التالي يوضح بقوة هذه الفروق، فى المتوسط، بين الأربعة آلات الموجودة بالفعل. لاحظ أن انتشار بيانات العينة للآلات الأربعة يميل إلى أن يكون متشابهاً. لذلك يجب ألا يكون هناك إهتمام زائد بالبحث عن فرض تساوى التباينات.



شكل (٨-٥)

التحليل البيانى لبيانات التعبئة

(b) بالنسبة لإختبار تحليل التباين، نفترض أن الأحجام المسكوبة عن طريق الآلات الأربع من k=4 مجتمعات لها تباينات متساوية. وإفترض أن $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ تشير إلى متوسطات الأربعة مجتمعات.

لذلك نرغب فى إختبار الفرض العدمى التالى:

$$H_O : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

مقابل الفرض البديل.

H_a : يوجد على الأقل واحد من هذه المتوسطات يختلف عن الباقي

وقد استخدمنا برنامج Minitab للحصول على النتائج المعطاة فى جدول (٨-٥). وإذا كنت ترغب فى إجراء الحسابات خطوة بخطوة للمقادير المختلفة فى جدول (٨-٥) انظر ملحق (٨ ب). ولاحظ من الجدول أن قيمة P-value هى 0.0001 (وإذا كنا نعتمد على جدول توزيع F فى الملحق، سوف نجد أن قيمة F هى 20.79 وهى أكبر من الجدولية Quintile value ($F_{.993,2,12}$=5.95). وهذا يخبرنا بأن قيمة P ستكون أقل من 0.01. ونظراً لأن قيمة P (P-value) هى عملياً تساوى الصفر، فإن دليل العينة ينكر صحة الفرض العدمى ويؤكد بدرجة ثقة عالية النتيجة المبدئية التى حصلنا عليها استناداً إلى التحليل البيانى - حيث يوجد آلة واحدة على الأقل من هذه الآلات لا تسكب نفس حجم المنتج، فى المتوسط.

جدول(٨-٥)

جدول تحليل التباين لمثال (٨-١)

مصدر الإختلاف	Df	SS	MS	F-value	P-value
الآلات	3	.005364	.001788	20.79	.0001
الخطأ	12	.001030	.000086		
التغير الكلي	15	.006394			

الإستنتاجات العملية :

من نتائج تحليل التباين فى مثال (٨-١)، من الواضح أنه يوجد آلة واحدة على الأقل تسكب حجم منتج مختلف عن الباقى، فى المتوسط، ومن الحكمة التأكد من خلال المعاينة الإضافية أن هذه الحالة ليست مؤقتة. والخطوة الثانية المنطقية التى يجب أن تقوم بها المديرة مشاهدة الآلة 1 لأنها تبدو مختلفة عن الآلات 3، 4 (حيث يبدو أن الآلتين 3، 4 متماثلتين) . ويمكن تأكيد ذلك بإستخدام الإختبار المقدم فى الجزء (٨-٤) - وعلى ذلك يمكن أن تقوم المديرة بتقييم الأربعة آلات لإلغاء الفروق الظاهرة .

إستخدام الحاسب الآلى :

عملياً، يوجد مئات من حزم البرامج الإحصائية المتاحة التى تقوم بإجراء إختبار تحليل التباين لبيانات العينة المبوبة. ومن المهم بالنسبة لك إدراك ذلك، وعلى الرغم من أنه يمكن أن تستخدم الحزم المختلفة رموز مختلفة لمصادر التغير، إلا أنها واقعياً تعطى مجموع المربعات، درجات الحرية، متوسط المربعات، قيمة F، والقيمة المناظرة لهذه المقادير P (p-value) .

والآن نوضح طريقة إستخدام الحاسب الآلى المعتادة لبرامج Minitab، SAS ويوجد فى ملحق (٨-أ) المرافق لهذا الفصل تعليمات إستخدام الحزمتين لتنفيذ إختبار تحليل التباين. ونوضح فى المثال التالى نتائج تحليل التباين بإستخدام برنامج Minitab .

مثال (٨-٢)

عامل هام فى تدفئة المنازل هو حجم المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف. وبيانات العينة التالية مقاسة بالكيلووات فى الساعة (بالمئات) المستخدمة فى شهر معين بواسطة أنظمة التدفئة لعينة بمنازل مشابهة كدالة لخمس أحجام مختلفة من المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف (بالبوصة) .

(a) استناداً إلى التحليل البيانى، ماذا تظهر هذه البيانات بخصوص تأثير سمك المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف على التدفئة ؟

(b) استناداً إلى إختبار تحليل التباين، هل يوجد سبب قوى للاعتقاد بأن متوسط استهلاك الطاقة يتغير لخمس أحجام المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف؟

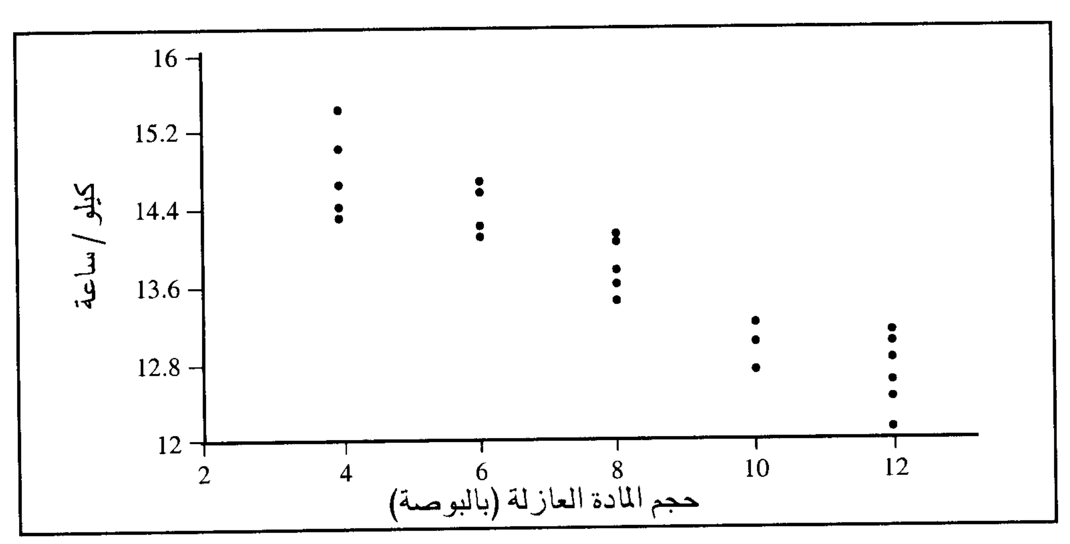
بوصة = in

4 in.	6 in.	8 in.	10 in.	12 in.
14.4	14.5	13.8	13.0	13.1
14.8	14.1	14.1	13.4	12.8
15.2	14.6	13.7	13.2	12.9
14.3	14.2	13.6		13.2
14.6		14.0		13.3
				12.7

الحل

نفترض أن كل حجم للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف (المعالجات) فى هذا المثال، تمثل مجتمع استهلاك الطاقة الذى حصلنا منه على العينة الموضحة. ونفترض أيضاً أن توزيعات المجتمعات لكل حجم للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف هو التوزيع الطبيعي بتباينات متساوية. ويعنى إستخدام المنازل المتشابهة جداً أى أن كل المنازل التي لها نفس الحجم، لديها نفس نوع نظام التدفئة ولديها نفس حجم المادة العازلة للحائط، ولديها نفس نوع مسار الجو (مسار يملأ الفراغ بين الباب أو النافذة وبين إطارهما)، وتم إنشائهم فى نفس المنطقة الجغرافية. وهذا يؤكد أن التغير فى استهلاك الطاقة الذى تسببه الفروق بين المنازل فى كل حجم للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف يمكن أن يعزى إلى الخطأ العشوائى. وطبقاً لذلك فإن التغير الكلى ناتج عن التغير الذى تسببه الفروق بين أحجام المواد العازلة المستخدمة فى التسقيف (المعالجات) والتغير العشوائى.

(a) ويتم توضيح التغير داخل العينات والتغير بين العينات بيانياً فى شكل (٨-٦). لاحظ أن عدد الكيلو وات / ساعة لكل شهر يتناقص بإستمرار كلما ازداد حجم المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف. ويظهر من هذا الشكل أن الفروق موجودة بين متوسطات المجتمعات (عدد الكيلو وات / ساعة) المستخدمة للخمس أحجام للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف المأخوذة فى الإعتبار. بالإضافة إلى ذلك، التشتت داخل العينات للخمس مستويات لا يظهر فرق جوهرى يمكن أن يسبب قلق بخصوص إفتراض تساوى التباينات.



شكل (٨-٦)

العرض البيانى لبيانات مثال المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف

(b) نتائج برنامج Minitab لجدول تحليل التباين لبيانات العينة موضح فى جدول (٨-٦). لاحظ أنه فى عمود source يستخدم مصدر المعالجات الرمز المجهز للإستخدام thikness (وهذا ليس خطأ فى التهجئة : لأن أسماء متغيرات برنامج Minitab محددة بثمانية أحرف) وعلى اليمين توجد قيمة F (36.46) ، وتجد أن قيمة P هى (.000) . يطبع برنامج Minitab قيمة P بثلاثة أرقام عشرية فقط. وحيث إن قيمة P صغيرة ، فإنه يمكن إنكار صحة الفرض العدمي بدرجة ثقة عالية. لذلك يؤكد إختبار تحليل التباين النتيجة التى توصلنا إليها من التحليل البيانى : هو أن متوسط استهلاك الطاقة غير متساوى للخمس أحجام للمادة العازلة المستخدمة فى التسقيف المأخوذة فى الإعتبار .

جدول (٨-٦)

مخرجات برنامج Minitab لمثال (٨-٢)

```
Factor        Type      Levels         Values
thikness      fixed          5              4        6      8      10      12
Analysis of Variance for kilowatt

Source          DF           SS                MS            F              P
thikness         4        9.836           2.45889        36.46          0.000
Error           18        1.214           0.06744
Total           22       11.050           0.50225
```

لاحظ أن النتائج تشتمل على معلومات إضافية تعلو جدول تحليل التباين فنجد أن تحت العنوان Factor يستخدم الرمز المجهز للإستخدام Thikness ليعرف المعالجات. وأيضاً عدد المعالجات معطى تحت عنوان Levels (5)، والعدد المجهز للإستخدام لكل حجم من المادة العازلة المستخدمة فى التسقيف موجودة تحت عنوان Values (4 , 6 , 8 , 10 and 12)

تمارين

(٨-١) إشرح ماذا نعنى بالمعالجات ؟

(٨-٢) إشرح الغرض من تحليل التباين عندما k=5 معالجات ؟

(٨-٣) إفترض أنه يوجد k=4 معالجات ، وقد تم أخذ عينة حجمها ستة مشاهدات لكل معالجة :

(a) حدد المصادر الممكنة للتغير فى بيانات العينة ؟

(b) فيما يتعلق ببيانات العينة ، إشرح بماذا تصف كل مصدر من مصادر التغير ؟

(٨-٤) ناقش ما إذا كان يمكن الإستعاضة بالتحليل البيانى عن إختبار تحليل التباين أم لا؟

(٨-٥) ناقش الإحصائيات الوثيقة الصلة بموضوع إختبار تحليل التباين ؟

(٨-٦) إفترض أنه يوجد k=3 معالجات. قد تم أخذ عينة حجمها خمس مشاهدات لكل معالجة. وإفترض أيضاً أن مشاهدات العينة متماثلة تماماً بالنسبة لكل معالجة، ولكنها مختلفة عن مشاهدات العينة للمعالجات الأخرى :

(a) بدون معرفة قيم المشاهدات ، ماذا يمكن أن تكون قيمة SSE ؟

(b) بصفة عامة إشرح ماذا تقيس المقادير SST , SSTR , SSE .

(٨-٧) هناك إعتقاد بزيادة حجم المبيعات لمنتج معين عندما تعرض بعض وحداته بجوار منافذ البيع ،

بالإضافة إلى مكان عرضها المعتاد، عن حجم المبيعات عندما توضع الوحدات فقط فى مكان عرضها المعتاد. والجدول التالى يمثل عينات عشوائية لحجم مبيعات 12 يوم للوحدات :

مكان واحد	98	110	112	96	94	98	106	112	92	96	108	104
مكانين	112	99	125	132	98	116	124	99	128	124	116	119

وبإفتراض أنهم عينتين عشوائيتين مأخوذتين من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى بتباينات متساوية .

(a) إستخدم اختبار مناسب من الفصل السابع لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن ينكر الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين مستويات أحجام المبيعات فى المتوسط. دعم إجابتك.

(b) إستخدم مدخل تحليل التباين لإجابة السؤال فى الجزء (a) وقارن بين إجابتك ؟

(٨-٨) فى دراسة حديثة فى كلية صغيرة للفنون الليبرالية (التحررية) ، قارنت الاستاذة التقديرات العددية النهائية التى توصل إليها طلبتها فى الإمتحان أثناء فصلين دراسيين مختلفين. فى فصل دراسي منهم (Fall 1990)، استخدمت الأستاذة امتحانات الإختيار المتعدد؛ وفى الفصل الدراسي الثانى (Fall 1991) استخدمت امتحانات المشاكل. وبسبب صغر حجم الكلية نسبياً، فلا يوجد لدى الأستاذة تبرير للاعتقاد بأنه يوجد فروق يمكن تقديرها فى قدرة طلبتها. والتقديرات النهائية للفصلين الدراسين هو كالتالى :

Fall 90	85.0	87.5	79.3	86.5	75.3	68.0	66.5	83.0	60.5
	77.5	73.5	73.0	78.5	92.5	76.5	70.8	91.5	88.5
	77.8	75.0	63.0	83.0	91.0	65.8	91.5		
Fall 91	102.0	84.5	68.7	78.5	100.0	93.3	92.7	69.7	75.3
	85.7	82.7	95.2	69.0	91.0	83.0	83.0	91.7	76.2
	79.7	78.3	79.7	88.3	88.7	65.2	92.0	87.3	85.7
	76.0								

إفترض أن هاتين العينتين المستقلتين مأخوذتين من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى وتباينات متساوية.

(a) ارسم بيانات العينة بيانياً. هل ترى فروق في المتوسط فى التقديرات، بين تكوين هذين الامتحانين .

(b) استناداً إلى هذا الرسم البيانى، هل يوجد قلق لديك بخصوص إفتراض تساوى التباينات .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق فى الأداء، فى المتوسط .

(٨-٩) البيانات التالية هى عينات مستقلة لصناديق معبأة بالحبوب (بالأوقية) بواسطة ثلاث آلات تعبئة متماثلة:

الآلة 3	الآلة 2	الآلة 1
20.18	20.90	20.25
20.26	20.99	20.20
20.38	21.08	20.45
20.32	--	20.38
20.36		

(a) ارسم بيانات العينة بيانياً كما فى المثال (٨-١) . هل ترى فروق بين متوسط الكمية المعبأة لثلاثة آلات ؟ اشرح .

(b) حدد المصادر التى تسبب حدوث تغير فى بيانات العينة .

(c) إستخدم التحليل البيانى لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن ينكر صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق فى متوسط الكمية المعبأة للثلاثة آلات . دعم إجابتك .

(d) ما هى الإقتراحات الهامة لتحليلك فى الجزء (c) ؟ هل يساعدك الرسم البيانى فى الجزء (a) للتحقق من أي من هذه الإفتراضات ؟ اشرح .

(٨-١٠) الجدول التالى هو جدول تحليل تباين جزئى حيث (k=5) معالجات والمشاهدات الكلية هى (n=25) مشاهدة . أكمل الجدول ، ووضح إلى أى مدى يمكن لهذا التحليل أن يدعم الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات ، فى المتوسط؟ دعم إجابتك .

Source	D f	SS	MS	F-value
Treatments			10	
Error				
Total		100		

(٨-١١) إذا علمت أن (SST = 200) ، $(n_4 = 4)$ ، $(n_3 = 5)$ ، $(n_1 = n_2 = 6)$، (k = 3)، (SSE = 50) . إلى أى مدى يمكن لهذه المعلومات تدعيم الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات ، فى المتوسط؛ دعم إجابتك .

(٨-١٢) تم وضع أربعة عينات عشوائية مستقلة لأربعة أصناف بطاريات منتجة حديثاً فى إختبار الحياة . وقد تم ملاحظة فترات البقاء أو الحياة التالية (بالساعات) .

الصنف A	الصنف B	الصنف C	الصنف D
110	118	108	117
113	116	107	116
108	112	112	116
115	117	108	119

(a) ارسم بيانات العينة بيانياً كما فى المثال (٨-١) . هل ترى فروق فى متوسط فترات البقاء للأصناف الأربعة ؟ اشرح .

(b) حدد المصادر التى تساهم فى تغير بيانات العينة .

(c) إستخدم تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة أن يدعم صحة الإدعاء القائل بأنه يوجد فروق فى متوسط فترات البقاء لهذه الأصناف الأربعة. دعم إجابتك .

(d) ما هى الإفتراضات الهامة للتحليل فى الجزء (c) ؟ هل يساعدك الرسم البيانى فى الجزء (a) للتحقق من أياً من هذه الإفتراضات ؟ اشرح .

(٨-١٣) إذا علمت أن (MSE = 6)، (SST = 400)، $(n_1 = n_2 = \dots n_5 = 6)$، (k=5) . إلي أى مدى

يمكن لهذه المعلومات تدعيم الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق بين المعالجات ، في المتوسط؛ دعم إجابتك .

(٨-١٤) قام مهندس ببناء عدد كبير من المنازل المتشابهة بإستخدام نفس التصميم المخطط مع تعديلات تجميلية فقط لثلاثة مناطق سكنية. والبيانات التالية هي عينات لأسعار البيع (بآلاف الدولارات) للمنازل والتي بيعت في العام الماضي .

المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3
125	129	143
132	138	139
129	142	140
136	134	144

إفترض أن هذه ثلاث عينات مستقلة مأخوذة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعي بتباينات متساوية.

(a) ارسم هذه البيانات بيانياً. هل يبدو لك أنه هناك فروق في أسعار البيع بين هذه المناطق الثلاثة، في المتوسط ؟ اشرح .

(b) نظراً لوجود تماثل بين المنازل، إلى ماذا ترجع الفروق في أسعار البيع داخل كل منطقة سكنية ؟ كن محدداً في إجابتك .

(c) استناداً للرسم البياني في الجزء (a) هل يوجد لديك قلق بخصوص إفتراض تساوي التباينات ؟ اشرح .

(d) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أي مدى يمكن لدليل العينة أن ينكر صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق في أسعار البيع للمناطق الثلاث ، في المتوسط .

(٨-٣) مقارنة معالجتين أو أكثر استناداً إلى العينات المختارة في قطاعات :
Comparing Two or More Treatments with Samples Selected in Blocks

سوف يكون هذا الجزء امتداداً لإسلوب العينات ذات القراءات المزدوجة المعروض في الفصل السابع، الذي يحتوي على مقارنة متوسطين بالإعتماد على العينات ذات القراءات المزدوجة، ومقارنة أكثر من متوسطين استناداً إلى عينات العينة المجمعة في قطاعات . ولمناقشة الإمتداد لأكثر من متوسطي مجتمعين، سوف يساعدنا على ذلك إلقاء الضوء مرة أخرى على مثال المسعرين أو المثمنيين. ناقشنا في الجزء السابق أن الفروق بين الخمسة عشر أصل أو خاصية المختارة هي غير هامة نسبياً. وفي الواقع، إن التغير بين أي مجموعة من الخصائص يميل إلى أن يكون كبيراً إلى حد ما، ويجعل التغير داخل العينات كبيراً لأنه لا يمكن إكتشاف الفروق بين متوسطات المجتمعات . والمدخل الأكثر فاعلية هو أن كل مسعر يعطي تسعير ما لكل الأصول. كل مجموعة من مجموعات التسعير للمثمنيين الثلاثة لأصل معين تشكل قطاع من بيانات العينة. لذلك، فإن التجميع في قطاعات هو امتداد لفكرة الإزدواجية المستخدمة في الفصل السابع. ويعطي التجميع في قطاعات الفرصة لمقارنة الصفات (apples-to-apples) للمسعرين، حيث لا يمكن أن تعزو الفروق المشاهدة للفروق بين قيم الأصول أو الخصائص. ومن ثم فإن قيم الأصول في هذا المثال هي متغيرات مجمعة في قطاعات .

إفترض أننا نختار خمسة أصول، ويقدر (يثمن) كل مسعر الأصول الخمسة. إفترض أيضاً أن بيانات العينة متماثلة تماماً مع تلك المعطاة فى جدول (٨-١). (سوف نستخدم نفس البيانات لتتضح فائدة التجميع فى قطاعات) وسوف نكرر بيانات العينة مرة أخرى فى جدول (٨-٧)، بتوضيح إضافى حيث قام المسعرين بتقييم نفس الخمس أصول وليس الثلاث عينات المستقلة للخمس أصول. لاحظ أنه تم إعطاء المتوسطات والمجاميع لصفوف البيانات بالاضافة إلى الأعمدة - وذلك للأصول الخمسة كما للمسعرين - .

جدول (٨-٧)
بيانات الثلاثة مسعرين والخمسة خصائص

الأصول	المسعر A	B	C	المجموع	المتوسط
1	90	93	92	275	91.67
2	94	96	88	278	92.67
3	91	92	84	267	89.00
4	85	88	83	256	85.33
5	88	90	87	265	88.33
المجموع	448	459	434	1.341	89.40
المتوسط	89.6	91.8	86.8		

إهتمامنا الأول هو المقارنة بين المسعرين الثلاثة لتحديد ما إذا كان يمكن إعتبار تقديراتهم واحدة، فى المتوسط، حيث أننا مهتمين بإختبار الفرض العدمى .

$$H_O: \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

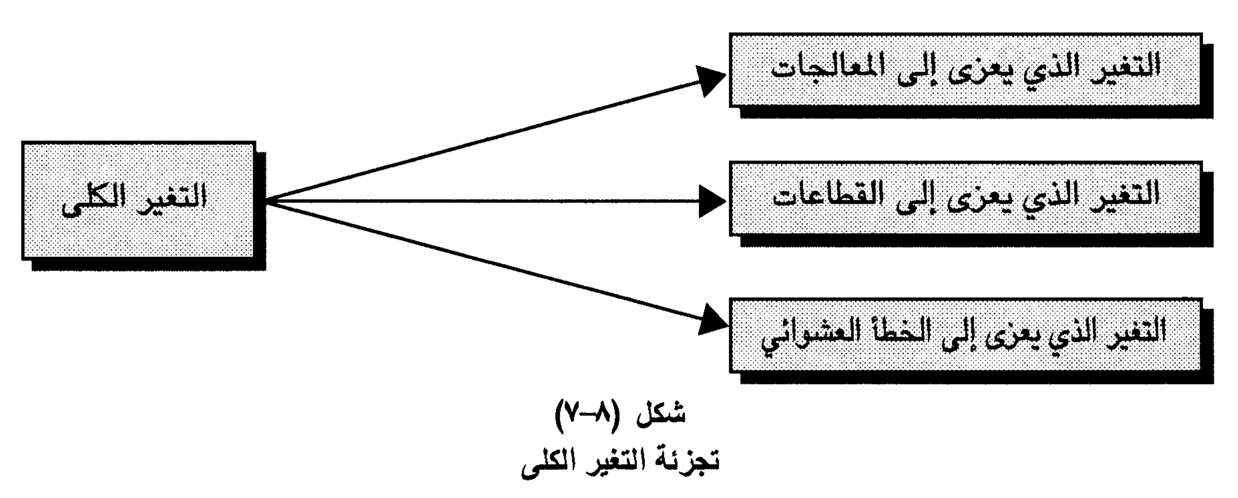
مقابل الفرض البديلى .

H_a : يوجد واحد على الأقل من هذه المتوسطات يختلف عن الباقى

وهنا يختلف مدخل إستخدام الخصائص المختارة. ونظراً لأننا نعتقد أنه يمكن تقدير التغير بين قيم الخصائص، لذلك نرغب فى حسابه وندعه جانباً حتى تتضح المقارنة بين الثلاثة مسعرين بالفروق بين العينات للأصول المحددة لهم .

(٨-٣-١) تحليل التباين بالإعتماد على البيانات المجمعة فى قطاعات : تجزئة مجموع المربعات الكلى

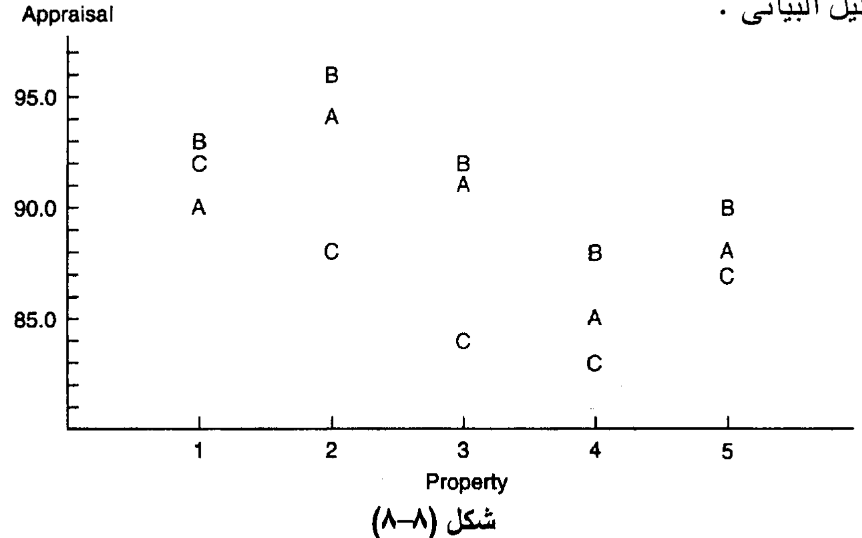
وكما كان الحال فى العينات المستقلة ، يقيس التغير الكلى التغير بصفة عامة لمجموعة البيانات الكلية بغض النظر عن السبب. وكما يوضح شكل (٨-٧) ، يمكن تجزئة التغير الكلى إلى ثلاث مكونات: التغير الذى يعزى إلى الفروق بين الخمسة خصائص (يعزى إلى القطاعات) ، التغير الذى يعزى إلى الفروق بين الثلاثة مسعرين (يعزى إلى الفروق بين المعالجات) ، والخطأ العشوائى (التغير الذى يعزى إلى الأسباب العشوائية).



شكل (٨-٧)
تجزئة التغير الكلى

والهدف الأول هو مقارنة متوسطات المعالجات. لذلك عندما نحدد تغير القطاعات (الأثر الذى يعزى إلي الفروق بين القطاعات)، فنتركه جانباً ونواصل بدقة ما كنا نفعله فى حالة العينات المستقلة. وبعبارة أخرى، يمكن إختصار إختبار تحليل التباين فى هذه الحالة لمقارنة تغير المعالجات بتغير الخطأ العشوائى. وتؤدى الفروق الكبيرة كبراً كافياً بين متوسطات العينات للمعالجات إلى نسبة كبيرة نسبياً لمتوسط مربعات المعالجات بالنسبة لمتوسط مربعات الخطأ العشوائى. وهذا يرجح أن متوسطات المجتمعات التى تمثلها المعالجات غير متساوية. وعلى الجانب الآخر إذا كانت الفروق بين متوسطات العينات للمعالجات غير قابلة للتقدير، فإن نسبة متوسطات المربعات ستكون صغيرة (تساوى تقريبا 1) ولا يكون لدينا سبب قوى للإعتقاد بأن متوسط المجتمعات مختلفة.

ويقدم شكل (٨-٨) عرضاً بيانياً لبيانات العينة الموجودة بجدول (٨-٧). وقد تم وضع قيم التقدير لكل مسعر من المسعرين الثلاثة (المعالجات) على المحور الرأسى يناظرها الأصول الملائمة (القطاعات) على المحور الأفقى. ولاحظ أن قيمة المسعر B هى الأعلى فى كل حالة. وقيم المسعر C - بإستثناء واحد- أقل بشكل متوافق من تلك القيم الخاصة بالمسعرين B, A. ويرجح توافق الترتيب بين B , A وجود فروق فى المتوسط بين متوسطات المثمنيين الثلاثة. هل ينتج كل ترتيب متوافق (متسق) للمعالجات عن العوامل العشوائية وحدها؟ ربما. نستخدم إختبار تحليل التباين لتأكيد النتيجة المبدئية التى يقرها التحليل البيانى.



شكل (٨-٨)
العرض البيانى لبيانات المسعرين مع الخصائص كقطاعات

مجموع المربعات :

وكما كان الحال فى العينات المستقلة، فإن الخطوة الأولى لإختبار تحليل التباين هو تحديد مجاميع المربعات المختلفة. وكما هو موضح فى شكل (٨-٧) يتم تجزئة مجموع المربعات الكلى (SST) إلى مجموع مربعات القطاعات (SSBL) ، مجموع مربعات المعالجات (SSTR)، مجموع مربعات الخطأ (SSE)، لذلك :

$$SST = SSBL + SSTR + SSE \qquad (8.9)$$

ويمكن تعريف مجاميع المربعات السابقة بالضبط كما تم عرضها فى الجزء السابق فيما عدا SSBL، وهو مكون من مكونات SST الذى يسبب الفروق بين القطاعات - وهى قيم الأصول . وسوف نقدم الصيغ الرياضية المستخدمة فى حساب هذه المقادير بصورة مختصرة عندما نناقش الحالة العامة. حتى هذا الوقت ، يكفى القول بأنه يتم تحديد قيمة SSBL بأسلوب مماثل لتحديد قيمة SSTR . نحسب مربع إنحراف متوسط كل قطاع (الأصل) عن المتوسط العام ، ثم نجمع هذه الإنحرافات المربعة لكل القطاعات (الخمسة أصول) ، بعد ذلك نضرب هذا المجموع فى عدد المعالجات (أى ، المثمنيين الثلاثة) .

وبالنسبة لبيانات العينة الموضحة فى جدول (٨-٧) ،

$$\begin{aligned} SSBL = 3\{&(91.67-89.4)^2 + (92.7 - 89.4)^2 + (89.00 - 89.4)^2 \\ &+ (85.33 - 89.4)^2 + (88.33 - 89.4)^2\} \\ &= 100.93 \end{aligned}$$

ونظراً لأن المشاهدات فى جدول (٨-٧) متماثلة مع تلك المعروضة فى جدول (٨-١)، فإن SSTR , SST لهم نفس القيم المحسوبة سابقاً - SSRE = 62.8 ، SST = 195,6 - ومن التعبير الرياضى (8.9) يمكن تحديد مجموع مربعات الخطأ عن طريق طرح SSTR , SSBL من SST .

$$\begin{aligned} SSE &= SST - SSBL - SSTR \\ &= 195.6 - 100.93 - 62.8 = 31.87 \end{aligned}$$

ولمزيد من الإيضاح يتم مقارنة قيمة SSE التى حصلنا عليها هنا بالقيمة التى حصلنا عليها فى مثال العينات المستقلة. (وهى مقارنة هادفة نظراً لأننا استخدمنا نفس البيانات فى المثالين) وهذه القيمة الجديدة لـ SSE هى نتيجة الفرق بين مجموع مربعات الخطأ للعينات المستقلة، (SSE = 132.8) (انظر جدول ٨-٢) ومجموع مربعات القطاعات فى هذا المثال (SSBL = 100.93)، أى : (132.8 - 100.93 = 31.87) . ما معنى ذلك؟ بإستخدام العينات المستقلة، يقيس مجموع مربعات الخطأ التغير الناتج عن كل الأسباب العشوائية شاملاً التغير فى قيم الخصائص. وعند إستخدام التجميع فى قطاعات، يتم فصل التغير الذى يعزى إلى الفروق بين الخصائص عن الخطأ العشوائى. ويمثل مجموع مربعات القطاعات (SSBL=100.93) اثر تغير الخصائص التى تم فصلها عن مجموع مربعات الخطأ. وتمثل القيمة الجديدة لمجموع مربعات الخطأ (SSE = 31.87) اثر الأسباب العشوائية الباقية. وعلى ذلك يعتبر التجميع فى قطاعات طريقة لفصل التغير فى بيانات العينة الذى يسببه عامل التجميع فى القطاعات، ومن ثم يقلل الخطأ العشوائى. وعن طريق تقليل الخطأ العشوائى، نستطيع أن نكتشف بطريقة أفضل الفروق بين متوسطات المجتمعات فى حالة تواجدها .

درجات الحرية وإحصاء تحليل التباين فى ظل إستخدام القطاعات :

نظراً لأنه يوجد 15 مشاهدة فى بيانات العينة المبوبة . فسوف يظل لدى (SST) 14 درجة حرية. وحيث أنه يوجد ثلاثة مسعرين ، فيظل لدى (SSTR) درجتين حرية. وبالمثل، نظراً لأنه يوجد خمسة أصول (قطاعات)، فإن (SSBL) يصبح لديها أربع درجات حرية - وهى عدد الأصول مطروحاً منه واحد. وتذكر أن درجات الحرية لها خاصية الإضافة، لذلك يمكن الحصول على درجات الحرية للمقدار (SSE) بطرح درجات حرية كلا من SSTR , SSBL من درجات الحرية الكلية SST وهى (8 = 2 - 4 - 14) .

وكما كان الحال سابقاً، نرغب فى مقارنة التغير بين متوسطات العينات للمعالجات (MSTR) بالتغير الذى يرجع إلى الخطأ العشوائى (MSE) . وإحصاء تحليل التباين هى نسبة (MSTR) إلى (MSE) . وما سيأتي الآن هو نفس ما توصلنا إليه فى الجزء السابق. نعلم أنه إذا كان (F = MSTR/MSE) كبير بدرجة كافية عن الواحد الصحيح، فمن المنطقى أن نستنتج بثقة أن الفروق موجودة بين متوسطات مجتمعات المعالجات. وبناء على ذلك يتم إنكار صحة الفرض العدمى القائل بأن متوسطات المجتمعات متساوية عن طريق دليل العينة عندما تكون P-value صغيرة بدرجة كافية.

فيما يلي جدول تحليل التباين لمثال المسعرين فى ظل وجود خمس خصائص كقطاعات فى جدول (٨-٨) . ونظراً لأن قيمة P (p-value) صغيرة إلى حد ما، لذلك يتم إنكار صحة الفرض العدمى عن طريق دليل العينة، وبالتالي لا يمكن إعتبار المسعرين متماثلين فى المتوسط .

جدول (٨-٨)

جدول تحليل التباين لمثال المسعرين فى ظل الأصول كقطاعات

مصدر الإختلاف	D f	SS	MS	F-value	P-value
الأصول	4	100.93			
المسعرين	2	62.80	62.8/2=31.4	31.4/3.98=7.89	.0128
الخطأ	8	31.87	31.87/8=3.98		
التغير الكلي	14	195.60			

(٨-٣-٢) تعميم اسلوب تحليل التباين لعدد k من المعالجات ، في عدد b من القطاعات :

والآن نعمم التحليل السابق ونقوم أولاً بتعريف المقادير التالية العامة لتحليل التباين متضمنة k معالجة فى b قطاع. وتعنى k معالجة فى b قطاع أن كل المعالجات k موجودة فى كل من b قطاع (فعلى سبيل المثال يتم تقييم الخمسة أصول عن طريق الثلاثة مسعرين) . وفى هذا المعنى يقال أن جميع القطاعات تكون كاملة. وعادة يتم عرض المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة لعدد k من المعالجات فى b من القطاعات بحيث تمثل كل معالجة عمود بينما يمثل كل قطاع صف .

المقادير اللازمة لتحليل التباين بإستخدام القطاعات

k = عدد المعالجات (الأعمدة) .

b = عدد القطاعات (الصفوف) .

bk = العدد الكلى للمشاهدات فى بيانات العينة المبوبة ، .

i = دليل لتحديد القطاع $(i = 1, 2, \dots b)$

j = دليل لتحديد المعالجة $(j = 1, 2, \dots k)$

X_{ij} = المشاهدة فى القطاع i والمعالجة رقم j .

T = مجموع المشاهدات الكلية فى بيانات العينة المبوبة .

$\overline{X}$ = متوسط كل المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة .

T_i = مجموع المشاهدات فى القطاع رقم i (صف) .

$\overline{X}_i$ = متوسط المشاهدات فى القطاع رقم i (صف) .

T_j = مجموع المشاهدات فى المعالجة رقم j (عمود) .

$\overline{X}_j$ = متوسط المشاهدات فى المعالجة رقم j (عمود) .

ويتم تجزئة مجموع المربعات الكلى إلى المكونات التالية :

$$SST = SSBL + SSTR + SSE$$

والتعبيرات الرياضية التى تعرف المقادير SSTR , SSBL , SST قد تم سردها هنا . وقد تم تقديم التعبيرات الرياضية المكافئة لها والتى يمكن حسابها بإستخدام الآلة الحاسبة فى ملحق8 B .

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{b} (X_{ij} - \overline{X})^2 \qquad \textbf{(8.10)}$$

$$SSBL = K\sum_{i=1}^{b} (\overline{X}_i - \overline{X})^2 \qquad \textbf{(8.11)}$$

$$SSTR = b\sum_{j=1}^{k} (\overline{X}_j - \overline{X})^2 \qquad \textbf{(8.12)}$$

وهناك $((n\text{-}1) = bK\text{ -}1)$ درجة حرية خاصة بالمقدار SST ، يوجد (b-1) درجة حرية خاصة بالمقدار SSBL ، ويوجد (k-1) درجة حرية خاصة بالمقدار SSTR. وكما كان الحال عند إستخدام العينات المستقلة، فإن درجات الحرية لها خاصية الاضافة. لذلك فإنه يمكن تحديد درجات حرية الخطأ بطرح درجات حرية القطاعات، ودرجات حرية المعالجات من درجات الحرية الكلية. وطبقاً لذلك فإن درجات حرية الخطأ هى :

$$df\ (error) = (bk - 1) - (b-1) - (k-1)$$

$$df\ (error) = bk - 1 - b + 1 - k + 1$$

$$= bk - b - k + 1$$

$$= (b-1)(k-1) \qquad \textbf{(8.13)}$$

وبتعبير لغوي، فإن درجات حرية الخطأ هى حاصل ضرب درجات حرية القطاعات ودرجات حرية المعالجات .

ويتم تحديد متوسط المربعات للمعالجات ومتوسط المربعات للخطأ بقسمة مجموع المربعات على درجات الحرية الخاصة بهم، وطبقاً لذلك فإن :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} \quad \textbf{(8.14)}$$

$$MSE = \frac{SSE}{(b-1)(k-1)} \quad \textbf{(8.15)}$$

إفترض أن $\mu_1, \mu_2, ... = \mu_k$ هى متوسطات المجتمعات التى تناظر K معالجة. لإختبار الفرض العدمى .

$$H_O : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

مقابل الفرض البديل

يوجد على الأقل واحد من هذه المتوسطات يختلف عن الباقى : H_a

مرة أخرى تحسب نسبة MSTR إلى MSE . وتوزيع المعاينة لهذه النسبة هو توزيع F بدرجات حرية (k-1) للبسط، (k-1) (b-1) للمقام. ويتم تحديد P-value إما باستخدام الحاسب الآلى أو بتقريبها بإستخدام جدول توزيع F الموجود فى الملحق. إذا كانت قيمة الإحصاءة F أكبر من الواحد الصحيح بدرجة كافية، فإن ذلك يتبعه أن تكون (P-value) صغيرة، لذلك يوضح الإختبار أن الفروق بين متوسطات المجتمعات موجودة. جدول تحليل التباين العام لعدد K من المعالجات فى عدد b من القطاعات موضح فى جدول (٨-٩).

تقدم أيضا معظم حزم البرامج الإحصائية فى مخرجاتها تحليل مماثل لتحديد ما إذا كان هناك إختلاف بين القطاعات أم لا، فى المتوسط، ومع ذلك لا يجب أن يكون هذا التحليل جزء مكمل لإختبار تحليل التباين. وبعد كل ذلك، نختار ترتيب للقطاعات لتقييمها، ثم نضع جانبا أو نهمل الاثار المحتملة للقطاعات. ومن المفترض الإعتماد على المعرفة الشخصية بأنه يوجد فروق بين القطاعات عندما تم إختيار هذا التصميم الإحصائى. وإذا تم تدعيم هذا الإفتراض إحصائياً عن طريق إختبار تحليل التباين فإنه عادة ما يكون مقلق بدرجة قليلة .

جدول (٨-٩)

جدول تحليل التباين العام لعدد k معالجة فى b قطاع

P-value	F-value	MS	SS	D f	مصدر الإختلاف
			SSBL	(b-1)	القطاعات
بإستخدام الحاسب الآلي	MSTR/MSE	MSTR	SSTR	(k-1)	المعالجات
		MSE	SSE	(b-1)(k-1)	الخطأ
			SST	bk-1	التغير الكلي

مثال (٨-٣)

ترغب إدارة مصنع كبير فى التقليل من عدد مرات أعطال الآلات، وفى أحد الإستقصاءات، ترغب الإدارة فى تحديد ما إذا كان هناك إختلاف بين الثلاث ورديات فى المصنع من حيث عدد

مرات أعطال الآلات ، فى المتوسط . وقد تم إختيار أسبوع ما من المتوقع أن يصبح نموذجياً لتجميع البيانات . وأثناء هذا الأسبوع ، تم ملاحظة عدد مرات أعطال الآلات لكل دورية . ولقد تأكدت الإدارة بوضوح ، أنه يوجد على الأقل لبعض الأيام ، فروق يومية لعدد مرات أعطال الآلات يمكن تقديرها . وطبقاً لذلك تم إعتبار الخمسة أيام عمل كقطاعات .

(a) عبر عن بيانات العينة التالية بيانياً كما فى شكل (٨-٨) . ما هى النتيجة المرجحة حول عدد مرات الأعطال اليومية للآلات في الدوريات الثلاث ؟

	الوردية			
اليوم	A	B	C	المجموع
الاثنين	13	14	15	**42**
الثلاثاء	11	12	12	**35**
الأربعاء	11	13	12	**36**
الخميس	10	12	13	**35**
الجمعة	13	14	14	**41**
المجموع	**58**	**65**	**66**	**189**

(b) قم بإجراء إختبار تحليل التباين للبيانات المجمعة فى قطاعات لتأكيد النتيجة النهائية التى توصلت إليها فى الجزء (a) . هل يوجد سبب كافى للإعتقاد بأنه توجد فروق بين متوسطات عدد مرات أعطال الآلات فى الثلاث ورديات ؟

(c) هل يمكن تطبيق نتيجتك على المعدلات المستقبلية للأعطال للثلاث ورديات؟ ناقش .

الحل

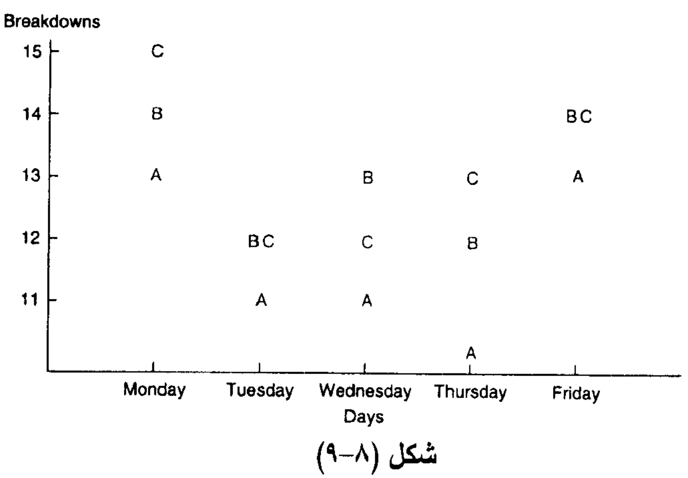
المعالجات فى هذا المثال هى الثلاث ورديات . وتعمل أيام الأسبوع كقطاعات . إفترض أن μ_C, μ_B, μ_A هى متوسطات المجتمع لعدد مرات أعطال الآلات لكل يوم للورديات A (وردية نهارية) ، B (وردية ليلية) ، C (وردية منتصف الليل) ، على التوالى . ونرغب فى إختبار الفرض العدمى .

$$H_O = \mu_A = \mu_B = \mu_C$$

مقابل الفرض البديل .

H_a : يوجد واحد على الأقل من هذه المتوسطات يختلف عن الباقى

(a) يقدم شكل (٨-٩) الأساس البيانى لتحديد ما إذا كان متوسط عدد مرات أعطال الآلات للثلاث ورديات متماثل أم لا . وقد تم وضع عدد مرات الأعطال اليومية لكل وردية على المحور الرأسى فى مقابل عدد أيام الأسبوع على المحور الأفقى . لاحظ أن الوردية A (الوردية النهارية) لديها عدد أعطال أقل من الوردية B ، الوردية C ، فى كل يوم . ويبدو أن الورديات C, B لديها تقريباً نفس عدد الأعطال لكل يوم ، فى المتوسط ، لذلك يرجح الشكل (٨-٩) أنه يمكن أن توجد فروق بين متوسطات المجتمعات للثلاث ورديات ويمكن تأكيد هذه النتيجة المبدئية بتنفيذ إختبار تحليل التباين (ANOVA) .



شكل (٨-٩)

الوصف البيانى لبيانات الأعطال للثلاث ورديات

(b) نستخدم مرة أخرى برنامج Minitab للحصول على جدول تحليل التباين الموجود فى جدول (٨-١٠) . وإذا كنت ترغب فى تتبع حساب مجموع المربعات خطوة بخطوة، انظر ملحق 8B. قيمة F هى F=12.67 ، وهى بالطبع أكبر بشكل واضح من الواحد الصحيح، وبناء على ذلك فإن قيمة P تصبح صغيرة إلى حد ما : 0.0033 . لذلك ليس من المحتمل أن يسبب الخطأ العشوائى الفروق التى نلاحظها بين الورديات. ويرجح دليل العينة أنه توجد فروق بين متوسطات المجتمعات للثلاث ورديات فى هذا الأسبوع .

(c) بالطبع ، فإن الهدف من مثل هذه الدراسة هو تحسين العملية الانتاجية في المستقبل. والنتيجة التى توصلنا إليها وهى وجود فروق غير عشوائية بين متوسطات المجتمعات للثلاث ورديات تطبق على المستقبل فقط إذا ظلت عمليات الورديات مستقرة. وحيث أنه لا توجد لدينا بيانات إحصائية لإظهار استقرار العملية فى المستقبل؛ فإن هذا يتطلب حكم الإدارة إستناداً إلى معرفتها بالعمليات. ونظراً لأنه يوجد فروق بين الورديات هذا الأسبوع ، فمن المحتمل أو المرغوب فيه أن تمتد هذه الدراسة لأسابيع عديدة لتأكيد أن الفروق المشاهدة ليست عابرة .

إذا استمرت الظروف التى كانت موجودة فى وقت اجراء الدراسة، فإن الخطوة التالية هى تحديد سبب الفروق بين الورديات. وهذا يتطلب دراسة تابعة أو لاحقة. وعلى الجانب الآخر، إذا لم تدعم المعاينة الدورية النتيجة الحالية، فيجب على الإدارة إتخاذ الإجراءات كما لو لم يكن هناك فروق بين الثلاث ورديات. وبغض النظر عن القرار، فيجب على الإدارة أن تسعى بإستمرار لتقليل عدد مرات أعطال الآلات خلال كل وردية عمل وذلك من خلال الصيانة الملائمة للآلة والتدريب الدورى للعاملين .

جدول (٨-١٠)

جدول تحليل التباين لمثال (٨-٣)

P-value	F-value	MS	SS	d f	مصدر الإختلاف
			15.6	4	(القطاعات) الأيام
.0033	3.8 / .3=12.67	7.6/2=3.8	7.6	2	(المعالجات) الورديات
		2.4/8=-3	2.4	8	الخطأ
			25.6	14	التغير الكلي

إستخدام الحاسب الآلى :

فى المثال التالى ، سوف نستخدم SAS لتنفيذ أسلوب تحليل التباين .

مثال (٨-٤)

تقوم وكالة للحماية البيئية بتقدير معدل السرعة سنوياً لكل سيارة متاحة للبيع فى الولايات المتحدة لمعرفة كفاءة الوقود. وترغب المنظمة في إجراء إختبارات مستقلة لتحديد ما إذا كان هناك فروق بين متوسط كفاءة الوقود بموجب حالة الطرق الفعلية لخمسة سيارات صغيرة subcompact مختلفة التى تمثل فعلياً المعدلات المقاسة من قبل وكالة الحماية البيئية. وسوف تستخدم الشركة المختبرة طريق طوله 400 ميل ويشتمل على القيادة داخل كلا من المدينة والطريق العام. وسوف يشارك فى التجربة أربعة سائقين ومن المعتقد أن الفروق المحتملة التى يمكن نسبتها إلى السائقين أنفسهم يمكن تقديرها. لذلك يتم معاملة السائقين كقطاعات. وسوف يقود السائق كل سيارة مرة واحدة على طريق طوله 400 ميل. ويتم تحديد الترتيب الذى يقود به كل سائق الخمس سيارات بالسحب العشوائى، لذلك فإنه سيتم إعتبار أثر المعرفة لهذا الطريق من الأسباب العشوائية. وتعطي نتائج التجربة بيانات العينة التالية (الأميال لكل جالون) .

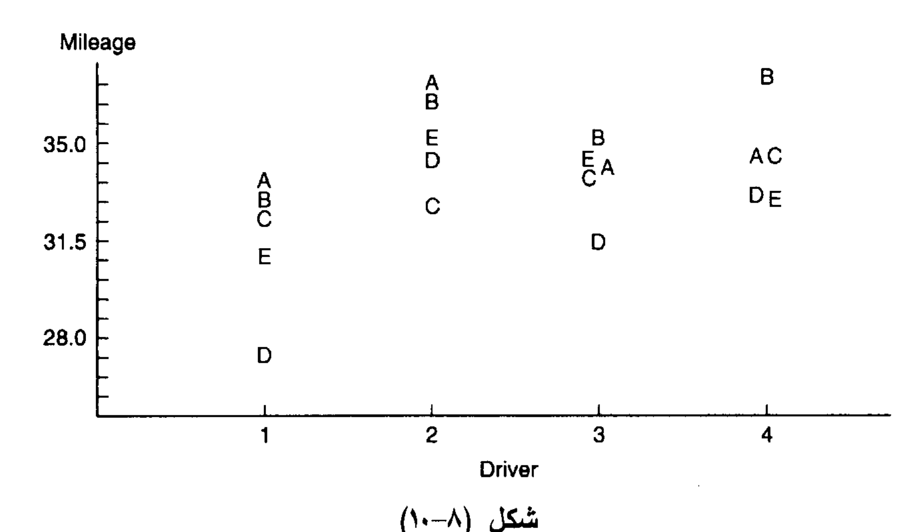
(a) عبر عن بيانات العينة بيانياً. وضح أى نتيجة يرجحها الرسم البيانى .

(b) إستخدم الحاسب الآلى لإجراء إختبار تحليل التباين والتأكيد على النتيجة المبدئية التى توصلت إليها من التحليل البيانى .

السائق	السيارة A	B	C	D	E
1	33.6	32.8	31.9	27.2	30.6
2	36.9	36.1	32.1	34.4	35.3
3	34.2	35.3	33.7	31.3	34.6
4	34.8	37.1	34.8	32.9	32.8

الحل

(a) متوسطات العينة للخمس سيارات هو : ($\bar{X}_A$ =34.875) ، ($\bar{X}_B$ =35.325) ، ($\bar{X}_C$ =33.125) ، ($\bar{X}_D$ =31.45) ، ($\bar{X}_E$ =33.325) ويمكن إعتبار هذه الفروق كبيرة بدرجة كافية لتوجيه الإهتمام للمستهلكين، نظراً لأنه لدى وكالة حماية البيئة تقرير مسبق بتساوى كفاءات الوقود. هل تمثل هذه الفروق إختلاف المعاينة العشوائية أم هناك فروق حقيقية بين كفاءات الوقود؟ وكما كان الحال فى الأمثلة السابقة، قمنا برسم كفاءات الوقود بيانياً للخمس سيارات على المحور الرأسى فى مقابل السائقين على المحور الأفقى للتحديد المبدئى للفروق المكنة فى كفاءات الوقود للخمس سيارات (انظر شكل ٨-١٠) . ويرجح فحص الشكل البيانى وجود فروق فى كفاءات الوقود للسيارات. لاحظ أنه بالنسبة لكل سائق حققت السيارة A عدد أميال أكثر من الآخرين، بينما الأميال المحققة بإستخدام السيارة D كانت فى كل حالة فى الترتيب الرابع أو الخامس. ويبدو أنه من غير المحتمل أن يسبب الخطأ العشوائى كل هذه النتائج المتوافقة، ولكننا نستخدم إختبار تحليل التباين لتأكيد النتيجة المبدئية التى توصلنا إليها.



شكل (٨-١٠)

الوصف البيانى لكفاءات وقود السيارات بإستخدام السائقين

(b) وحان وقت إجراء إختبار تحليل التبـاين ، نستخـدم PROC ANOVA OF SAS لإنشـاء جدول تحليل التبـاين، الموضـح فى جدول (٨-١١) . لاحـظ أنه فى هذا المثـال (k=5) سيـارات هى المعـالجات، (b=4) سائقين هـى القطاعات. والفرض العدمى هو تساوى متوسطات المجتمعات للخمس سيارات

$$H_O = \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E$$

ومن جـدول (٨-١١) لاحظ أولاً أن نتائج الحـاسب الآلى سردت مقدار يطلق عليـه Model تحت عنوان «SOURCE» . ويعنى المصطلح «MODEL» دمج لأثار القطاعـات (السـائقين) ، المعـالجـات (السيـارات) . وبصفة عـامة يمثل «MODEL» الآثار المدمجـة لكل مصادر الاختـلاف بخلاف الخطأ العشوائـى. لذلك فإن مجمـوع مربعات «MODEL» يساوى SSBL مضافاً عليه SSTR ، ودرجات حرية «MODEL» هى درجات حرية SSBL مضافاً عليها درجات حرية SSTR . ومتوسط مربعات «MODEL» هو مجمـوع مـربعات «MODEL» مقسوماً على درجـات حرية «MODEL». وأخيراً عرض الحاسب الآلى مصـادر القطاعات، المعالجات ومقاديرهم اللازمة لتحـليل التباين منفصلة عن بعضـها البـعض تحت الأسـمـاء المعـدة للإستـخـدام «DRIVER» ، «AUTO» على التـوالى. بالنسبـة للسيـارات (المعالجات) ، قيمـة F هى 5.09 . ونظراً لأن القيمـة المصاحبة P-value صغيـرة إلى حد ما 0.0124 ، فإن الفرض العدمى غير صحيح . ويرجح دليل العينة أنه يوجد فروق بين كفاءات الوقود للخمس سيارات .

جدول (٨-١١)

مخرجات برنامج SAS لمثال (٨-٤)

Analysis of variance procedure

Dependent variable : MILEAGE

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	7	79.76800000	11.39542857	6.09	0.0033
Error	12	22.44400000	1.87033333		
Corrected Total	19	102.21200000			

R-Square		C. V.	Root MSE	MILEAGE Mean	
0.780417	4.067821	1.36760131		33.62000000	
Source	DF	Anova ss	Mean Square	F Value	Pr > F
DRIVER	3	41.67600000	13.89200000	7.43	0.0045
AUTO	4	38.09200000	9.52300000	5.09	0.0124

تمارين

(٨-١٥) إشرح لماذا نأخذ فى الإعتبار القطاعات عندما نرغب فى المقارنة بين متوسطات عدد من المعالجات في الكثير من الحالات؟

(٨-١٦) ناقش مكونات التغير الكلى عندما يتم إختيار العينات فى قطاعات ؟

(٨-١٧)إذا تم الأخذ فى الإعتبار القطاعات فى دراسة محددة ولكن كان الأمر على خلاف ذلك، فماذا نعتقد أن تكون النتيجة المحتملة لإختبار تحليل التباين بالنسبة لنتيجة المعالجات .

(٨-١٨) الآتى هو جدول تحليل تباين جزئى لعدد (k=4) معالجات مرتبة في (b = 6) قطاعات. أكمل جدول تحليل التباين وحدد إلى أى مدى تدعم هذه البيانات الإدعاء القائل بأن هناك فروق بين المعالجات، فى المتوسط .

Source	D F	SS	MS	F - value
Blocks		75		
Treatments				
Error			3	
Total		200		

(٨-١٩) البيانات التالية هى نتيجة تجربة لمقارنة آثار ثلاثة معالجات مرتبة فى أربعة قطاعات :

القطاع	المعالجـة		
	A	B	C
1	8	10	9
2	12	16	15
3	15	18	14
4	6	10	7

(a) ارسم البيانات بيانياً كما فى مثال (٨-٣) . هل ترى آثار للمعالجات ؟ اشرح .

(b) إستخدم تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد آثار للمعالجات ؟ اشرح ،

(٨-٢٠) تدعى شركة طاقة رائدة بأن زيت السيارات الفاخر يحسن المسافة المقطوعة بالأميال عند إستخدام البنزين. أدارت منظمة مستقلة تجربة لمقارنة الصنف الذي تبيعه الشركة (الصنفA) بثلاثة أصناف منافسة D , C , B ، ولتنفيذ التجربة استخدمت المنظمة أربعة

أنواع من زيوت السيارات فى أربعة أحجام مختلفة من السيارات (سيارة صغيرة جداً، سيارة صغيرة ، سيارة متوسطة ، سيارة كبيرة الحجم) . سوف تعامل السيارات كقطاعات بسبب الفروق الواضحة لحجم البنزين الذى تحتاجه كلاً منهم . وتتكون بيانات التجربة من الأميال لكل جالون للمسافة المقطوعة داخل كل من المدينة والطريق السريع ، كالتالى :

الحجم	النوع			
	A	B	C	D
سيارة صغيرة جداً	36	34	33	35
سيارة صغيرة	29	26	28	27
سيارة متوسطة	25	24	25	23
سيارة كبيرة	19	20	18	18

(a) ارسم الشكل البياني للبيانات ، هل ترى فروق بين عدد الأميال ، فى المتوسط للأربعة أنواع ؟ اشرح .

(b) حدد المصادر التى تسبب التغير فى بيانات العينة .

(c) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يظهر دليل العينة وجود أثر المعالجات؟ إشرح .

(٨-٢١) إذا علمت أن (k=5) معالجات مرتبة فى (b=4) قطاعات ، وإذا علمت أن , (MSE = 5) (SST = 500) , (SSBL = 240) إلى أى مدى يمكن لهذه البيانات أن تناقض صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر للمعالجات؟ إشرح .

(٨-٢٢) إذا علمت أن k = 4 معالجات مرتبة فى b = 6 قطاعات ، وإذا علمت أن , (MSTR = 50) (SST = 725) , (SSBL = 200)، إلى أى مدى يمكن لهذه البيانات تناقض صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر معالجات .

(٨-٢٣) طلب من شركة لبحوث التسويق مقارنة نسبة الزيادة فى المبيعات فى مدينة كبيرة على مدى العام السابق لثلاثة أنواع متنافسة من السمن النباتى الخالى من الكوليسترول . وتم إختيار ستة محلات تجارية (سوبر ماركت) من المدينة لتعمل كقطاعات وحساب التغير فى المبيعات الناتج عن الفروق الديموجرافية ، السكانية والإقتصادية بين المستهلكين . وقد تم توضيح نسبة الزيادة فى المبيعات للثلاثة أنواع (A , B , C) فى ست محلات تجارية فى الجدول التالى :

المحل	النوع		
	A	B	C
1	4.2	2.8	3.4
2	9.5	8.2	7.8
3	8.2	6.3	5.2
4	2.4	1.8	2.1
5	9.8	8.9	9.8
6	6.5	6.4	6.8

(a) مثل البيانات بيانياً، هل ترى فروق فى نسبة الزيادة، فى المتوسط لهذه الأنواع الثلاثة ؟ إشرح .

(b) حدد المصادر التى تسبب التغير فى بيانات العينة .

(c) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يظهر دليل العينة وجود أثر المعالجات؟ إشرح .

(٨-٢٤) فى تمرين (٨-٢٣) إفترض أن شركة بحوث التسويق أهملت الفروق الممكنة بين المستهلكين فى الست محلات وتعاملت مع البيانات كأنها تمثل ثلاث عينات عشوائية مستقلة. إستخدم تحليل التباين بدون القطاعات لترى هل يوجد إختلاف عن النتيجة التى حصلت عليها فى تمرين (٨-٢٣) .

(٨-٤) مقارنة المتوسطات عندما يكون دليل العينة منافى للفرض العدمى : إختبار شيفيه

Comparisons of Means When The Sample Evidence is Against The Null Hypothesis: Scheffe's Procedure

تذكر أن الفرض البديل فى تحليل التباين لا يحدد أى من المتوسطات يختلف عن الآخر. ولكنه يقر بأنه يوجد واحد على الأقل مختلف، لذلك لا يمكن إستخدام رفض الفرض العدمى المستند إلى إختبار تحليل التباين فى القول بأن جميع المتوسطات مختلفة. فعلى سبيل المثال، دعنا نتذكر مثال (٨-١) عندما كنا نقارن متوسط الأحجام المعبأة من قبل الآلات الأربعة. من جدول (٨-٥) (جدول تحليل التباين)، عن طريق دليل العينة لم يتم تدعيم الفرض العدمى القائل بأن الحجم المعبأ متساوى للآلات الأربعة، فى المتوسط. وهذا يعنى ضمناً إختلاف كل متوسطات الأحجام المعبأة. فيمكن أن يختلف μ_1 ولكن μ_2 , μ_3 , μ_4 يكونوا متماثلين . أو قد يكون μ_1 , μ_2 متماثلين μ_3 , μ_4 متماثلين ولكن كل زوج يختلف عن الآخر، وهكذا. ونتيجة كل هذا هو تدعيم وجود فروق بين متوسطات المجتمعات عن طريق دليل العينة. هنا نكون في إحتياج واضح لمعرفة أى هذه المتوسطات يمكن إعتبارها مختلفة، وأى من هذه المتوسطات يمكن إعتبارها متساوية .

تم إقتراح طرق عديدة لهذا الغرض. ونناقش ما يعرف بطريقة شيفيه للمقارنات المتعددة **Scheffe method for multiple comparisons** لأنه يتمتع بقيود قليلة نسبياً على إستخدامه ويفضله الكثيرون عند مقارنة مجموعة من المجتمعات . وتعتمد طريقة شيفيه على صيغة **contrast** المقابلة بين شيئين بغرض إيضاح الفرق. ضع ببساطة contrast المقابلة عند مقارنة متوسطات المجتمع فعلى سبيل المثال، إفترض أننا نرغب فى مقارنة متوسط الحجم المعبأ بواسطة الآلة الأولى μ_1 مع باقى الآلات (2 , 3 , 4) (μ_2 , μ_3 , μ_4) فى مثال (٨-١) . ونعرف المقابلة contrast بالرمز L_1 . إفترض أن contrast كالتالى :

$$L_1 = 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$$

لاحظ أن معاملات متوسطات المجتمعات هى (3 , -1 , -1, -1) على التوالى لذلك فإن مجموع هذه المعاملات هو 0 (الصفر) . وهذا يعنى ضمناً أن ($L_1 = 0$) إذا كان متوسط μ_2 , μ_3 , μ_4 يساوى μ_1. بمعنى أنه إذ كان ($3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$)، فعند حل هذه المعادلة بالنسبة للمقدار μ_1 نحصل على ($\mu_1 = (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) / 4$)وتقدم لنا صيغة L_1 الموضحة فرصة لمقارنة متوسط مجتمع الآلة 1 بتلك الخاصة بالآلات 2 , 3 , 4 . إفترض أننا نرغب فى مقارنة μ_2 فى مقابل μ_3 , μ_4 أو نقارن بين μ_3 , μ_4 فإن وسيلة المقابلة contrasts المماثلة يصبح كالتالى :

$$L_2 = 2\mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \text{ and } L_3 = \mu_3 - \mu_4$$

مرة أخرى لاحظ أن مجموع معاملات المتوسطات فى L_3 , L_2 هو الصفر ، لذا وكما كان من قبل فإن $L_2 = 0$ فقط فى حالة أن تكون $\mu_2 = (\mu_4 + \mu_3) / 2$ بالمثل، $L_3 = 0$ فقط فى حالة أن تكون ($\mu3 = \mu4$).

من هذه الأمثلة ، من المهم إدراك أن (1) يمكن إنشاء وإختبار عدد كبير من contrasts ، (2) يمكن ألا يحتوى contrast على كل المتوسطات الموجودة فى الفرض العدمى كما هو الحال عند إجراء إختبار تحليل التباين. وبصفة عامة، فإن مجموعة contrasts هى إختيار الباحث لإختبار إنعكاسات ملاحظات الباحث حول متوسطات المجتمعات فى الفرض العدمى. وبصفة عامة يمكن القول بأن :

المقابلة contrast هو مقارنة يختارها الباحث لتقديم توليفة خطية لأى عدد من متوسطات المجتمعات. ويلزم أن تكون مجموع معاملات متوسطات المجتمعات فى هذه المجموعة الخطية مساوياً للصفر.

ولأى contrast مرغوب فيه، فإن الفكرة هى إستخدام المعلومات المناسبة من بيانات العينة لتحديد ما إذا كان يمكن إعتبار contrast مختلف عن الصفر أم لا. فإذا كان contrast مختلف عن الصفر بشكل واضح، فإن مجموعة المتوسطات التى يتم مقارنتها فى contrast لا يمكن إعتبارها متساوية. فعلى سبيل المثال contrast L_1 يقارن المتوسط μ_1 بالمتوسطات μ_2 , μ_3 , μ_4 . فإذا تحول هذا con- trast ليصبح مختلفاً بشكل واضح عن الصفر، فلايمكن اعتبار هاتين المجموعتين متساويتين أو أصبح L_3 (مقارنة متوسط بمتوسط μ_3 مع μ_4) مختلف بشكل واضح عن الصفر، فلا يمكن إعتبار أن المتوسط μ_3 ، المتوسط μ_4 متساويين.

طريقة شيفيه : الإختبار العام خطوة بخطوة :

مع وجود المعلومات المناسبة من بيانات العينة، فإن الخطوات الأساسية لطريقة شيفيه لإختبار أى مقابلة contrast مرغوب فيه، موضحة داخل الاطار الآتى. وفى الواقع، هذه الخطوات مطابقة لتلك التى تستخدم فترات الثقة فى إختبارات الفروض كما قدمت فى الفصل السادس.

خطوات طريقة شيفيه

(1) تقدير contrast بإستخدام متوسطات العينة المناظرة.

(2) إيجاد التباين ومن ثم الخطأ المعيارى لمقدر contrast.

(3) إستخدم تقدير contrast والخطأ المعيارى، في تحديد فترة ثقة contrast كما تم تحديدها بإستخدام طريقة شيفيه.

(4) إذا كانت الفترة لا تشتمل على الصفر (بمعنى أن الفترة تقع بأكملها على يمين الصفر أو تقع بأكملها على يسار الصفر)، لذلك يعتبر contrast مختلف بشكل واضح عن الصفر؛ وبخلاف ذلك، يكون العكس.

وبإستخدام الرموز العامة ، إفترض أن μ_1 , μ_2 ,..., μ_K هى متوسطات المجتمعات المطابقة للمعالجات محل الإهتمام ، لذلك يتم تعريف المقابلة L contrast كالتالى :

$$L = C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \dots\dots\dots C_k\mu_k \qquad (8.16)$$

حيث المعاملات (C_1 , C_2 ,...., C_K) وبشرط أن يكون : $(C_1 + C_2 + \dots C_K) = 0$. والمقدرغير المتحيز للمقدار L هو :

$$\hat{L} = C_1\overline{X}_1 + C_2\overline{X}_2 + ... + C_k\overline{X}_k \quad (8.17)$$

حيث $\overline{X}_1$ ، $\overline{X}_2$ ، .... $\overline{X}_k$ هى متوسطات العينات المناظرة. ونظراً لأن $\hat{L}$ هو توليفة خطية للمتغيرت العشوائية (متوسط العينات) ، فإن تباين $\hat{L}$ كالتالى :

$$\text{var}(\hat{L}) = \text{MSE}\left(\frac{C_1^2}{n_1} + \frac{C_2^2}{n_2} + ... + \frac{C_k^2}{n_k}\right) \quad (8.18)$$

وقد تم الحصول على ذلك بإستخدام التعبير الرياضى (3.24) فى الجزء (٣-٩) .MSE هو متوسط مربعات الخطأ وتم الحصول عليه من جدول تحليل التباين؛ وهو يقدر التباين المشترك المفترض $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2$ والمقادير $n_1, n_2, ..., n_k$ هى أحجام العينات . وبناء على ذلك فإن الخطأ المعيارى للمقدار $\hat{L}$ يكون :

$$\text{SE}(\hat{L}) = \sqrt{\text{var}(\hat{L})} \quad (8.19)$$

وقد تم إثبات أنه بدرجة ثقة % (1-α) 100 ، فإن كل contrasts الممكن تكوينها كما هى معرفة بالتعبير الرياضى (8.16)، تقع داخل مجموعة الفترات .

$$\hat{L} - A \ \text{SE}(\hat{L}) \le L \le \hat{L} + A \ \text{SE}(\hat{L}) \quad (8.20)$$

فإذا كانت البيانات معتمدة على عينات مستقلة، فيمكن تعريف المقدار A المذكور فى الصيغة الرياضية (8.20) كالتالى :

$$A = \sqrt{(k-1)F_{1-\alpha,\ k-1,\ n-k}} \quad (8.21)$$

أما إذا كانت بيانات العينة فى b قطاع فإن المقدار A يكون كالتالى :

$$A = \sqrt{(k-1)F_{1-\alpha,\ k-1,\ (b-1)(k-1)}} \quad (8.22)$$

لاحظ أن التعبيرات الرياضية (8.21) (8.22) ، أن المقادير $F_{1-\infty,\ k-1,\ n-k}$ ، $F_{1-\infty,\ k-1,\ (b-1)(k-1)}$ هى قيم الذيلين (Quantile values) لتوزيع F بدرجات حرية K-1 للبسط (جدول E فى الملحق) . الفرق الوحيد بين التعبيرين الرياضيين (8.21) ، (8.22) يكمن فى قيمة درجات الحرية الثانية، التى تمثل درجات حرية الخطأ العشوائى. لذلك يوجد (n-k) درجة حرية للخطأ للعينات العشوائية المستقلة، ودرجات حرية للخطأ العشوائى (k-1) (b-1) لبيانات العينة فى قطاعات .

مثال (٨-٥)

بالرجوع إلى مثال(٨-١) (انظر جدول ٨-٤) ، الذى يتضمن الكميات المعبأة للأربعة آلات فى مصنع الحاويات، إستخدم طريقة شيفيه بالإعتماد على درجة ثقة 95% لمقارنة μ_1 مع μ_2 , μ_3 , μ_4 . وأيضاً قارن μ_3 مع μ_4 .

الحل

من مثال (٨-١) أحجام العينات هى $(n_4 = 4)$, $(n_3 = 3)$, $(n_2 = 4)$, $(n_1 = 5)$ ومتوسطات العينات هى $(\overline{X}_1 = 5.2280)$, $(\overline{X}_2 = 5.2075)$, $(\overline{X}_3 = 5.1900)$, $(\overline{X}_4 = 5.1825)$ بالنسبة للمقارنة الأولى ، خذ فى الإعتبار L_1 contrast المعرف كالتالى :

$$L_1 = 3\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$$

ولتقدير هذا المعامل contrast بالإعتماد على بيانات العينة فى جدول (٨-٤) هو :

$$\hat{L}_1 = 3\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \overline{X}_3 - \overline{X}_4$$
$$= (3)(5.2280) - 5.2075 - 5.1900 - 5.1825 = .104$$

وما نحاول تحديده بشكل جوهرى هو ما إذا كان التقدير 104. ، يختلف بشكل كافى عن الصفر حتى يكون لنا رأياً في أن contrast يختلف بشكل واضح عن الصفر. من جدول تحليل التباين (جدول (٨-٥)، نجد أن (MSE = .000086) لذلك فمن التعبير الرياضى (8.18) نجد أن التباين هو :

$$\text{var}(\hat{L}_1) = .000086\left[\frac{3^2}{5} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^2}{3} + \frac{(-1)^2}{4}\right]$$
$$= (.000086)(2.633333) = .0002265$$

والخطأ المعيارى هو :

$$SE(\hat{L}_1) = \sqrt{.0002265} = .015049$$

ونظراً لأنه يوجد 3 = (k-1) درجة حرية للمعالجات ، (n-k) = 12) درجة حرية للخطأ (انظر جدول ٨-٥) ، فإن القيم الجزئية (Quantile values) لدرجة ثقة 95% هى $(F_{.95,3,12} = 3.29)$ ، وبناء على ذلك فإن المقدار A المعرف بالتعبير الرياضى (8.21) هو :

$$A = \sqrt{(3)(3.49)} = 3.2357$$

لذلك فإن فترة الثقة محل الإهتمام كما هى معرفة بالتعبير الرياضى (8.20) هى :

$$.104 - (3.2357)(.015049) \leq L_1 \leq .014 + (3.2357)(.015049)$$
$$.104 - .0487 \leq L_1 \leq .104 + .0487$$
$$.0553 \leq L_1 \leq .1527$$

ونظراً لأن هذه الفترة لا تحتوى على الصفر ، لذلك فإن L_1 contrast يختلف بشكل ملحوظ عن الصفر. وبالتالي عندما يتم مقارنة الآلة 1 بالآلات 2 , 3 , 4 فلا يمكن اعتبارهم متساويين فى المتوسط.

بالنسبة لمقارنة المتوسط μ_3 بالمتوسط μ_4 فإن المقابلة contrast هي :

$$L_3 = \mu_3 - \mu_4$$

وقيمة المقدار $\hat{L}_3$ هو :

$$\hat{L}_3 = \overline{X}_3 - \overline{X}_4 = 5.1900 - 5.1825 = 0.0075$$

وكما كان الحال سابقاً ، نحاول تقرير ما إذا كان التقدير 0075. يختلف بشكل كافى عن الصفر حتى يكون لنا رأياً في أن عامل المقابلة contrast يختلف بشكل واضح عن الصفر. التباين والخطأ المعيارى هما كالتالى :

$$\text{var}(\hat{L}_3) = .000086\left[\frac{1^2}{3} + \frac{(-1)^2}{4}\right] = (.000086)(.58333) = .0000502$$

$$SE(\hat{L}_3) = \sqrt{.0000502} = .007083$$

وحيث أن هذا هو نفس مشكلة تحليل التباين كما كان فى L_1 ، فإن المقدار A يظل كما هو . لذلك فإن الفترة المرغوب فيها هى :

$$.0075-(3.2357)(.007083) \leq L_3 \leq .0075 + (3.2357)(.007083)$$

$$.0075 - .022918 \leq L_3 \leq .0075 + .022918$$

$$-.0154 \leq L_3 \leq .0304$$

ولما كانت هذه الفترة تحتوى على الصفر ، فإن L_3 contrast لا يختلف بشكل واضح عن الصفر . وعلى ذلك ، لا يوجد سبب لإعتبار أن متوسط الحجم المعبأ بواسطة الآلات 3 ، 4 مختلف .

مثال (٨-٦)

بالرجوع إلى مثال (٨-٣) ، إستخدم طريقة شيفيه لمقارنة متوسط عدد مرات أعطال الآلات في الوردية A بتلك الخاصة بالورديات C , B بالإعتماد على درجة ثقة 99% .

الحل

على الرغم من أن هذه المشكلة متعلقة بالعينات فى قطاعات ، فإن الإختبار يكون مشابه لما تم فى مثال (٨-٥). نظراً لأن القطاعات هى خمسة أيام عمل ، وأحجام العينات متساوية وتساوى 5 . متوسطات الورديات هى :

$$\overline{X}_A = \frac{58}{5} = 11.6 \quad , \quad \overline{X}_B = \frac{65}{5} = 13 \quad , \quad \overline{X}_C = \frac{66}{5} = 13.2$$

ويمكن تعريف contrast المرغوب فيه كالتالى :

$$L_1 = 2\mu_A - \mu_B - \mu_C$$

وبالإعتماد على بيانات العينة الحالية ، فإن تقديره هو :

$$\hat{L}_1 = (2)(11.6) - 13 - 13.2 = -3$$

ومن جدول تحليل التباين (جدول ٨-١٠) ، نجد أن MSE = .3 ونتيجة لذلك فإن :

$$var(\hat{L}_1) = .3\left[\frac{2^2}{5} + \frac{(-1)^2}{5} + \frac{(-1)^2}{5}\right] = (.3)(1.2) = .36$$

$$SE(\hat{L}_1) = \sqrt{.36} = .6$$

ومن جدول (٨-١٠): $[(b-1)(k-1) = 8]$ ، $[K-1 = 2]$ ، $[F_{.99,2,8} = 8.65]$

$$\therefore A = \sqrt{(2)(8.65)} = 4.16$$

والفترة المرغوب فيها هى :

$$-3 - (4.16)(.6) \leq L_1 \leq -3 + (4.16)(.6)$$

$$-3 - 2.496 \leq L_1 \leq -3 + 2.496$$

$$-5.496 \leq L_1 \leq -.504$$

نظراً لأن الفترة لا تحتوى على الصفر ، فإن L_1 contrast يختلف بشكل واضح عن الصفر . ومن ثم ، استناداً إلى دليل العينة الحالى ، فإنه لا يمكن إعتبار أن متوسط عدد مرات أعطال الآلات في الوردية A متساوى مع تلك الأعطال بالورديات C , B .

بعض الخصائص الهامة لإختبار شيفيه :

من المثالين السابقين ، يمكن إعتبار طريقة شيفيه إختبار بسيط للفرض العدمى .

$$H_0 : L = 0$$

حيث L هو أى contrast مناسب . وتضمن الطريقة أنه عند إستخدام إختبار تحليل التباين ، فإنه يتم إنكار صحة الفرض العدمى القائل بأن متوسطات المجتمعات متساوية عن طريق دليل العينة ، وسوف يتم إيجاد contrast واحد على الأقل متضمن نفس بيانات العينة يختلف بشكل واضح عن الصفر . ولكن الفكرة الرئيسية لطريقة شيفيه هو استخدام درجة ثقة % $(1-\alpha)$ 100 لكل فترات contrasts التى يرغب الباحث أخذها فى الإعتبار كمجموعة . ويتم تحديد درجة ثقة معينة عن طريق قيمة A فى التعبير الرياضى (8.21) أو (8.22). وللتوضيح ، فى مثال (٨-٥) ثم استخدام درجة ثقة 95% لكل من الفترتين المستخدمتين فى L_2, L_1 contrasts . لذلك يمكن أن يكون لدينا درجة ثقة 95% بأن تقع كل contrasts داخل فترات الثقة الخاصة بها .

ولتقديم توضيح إضافى لطريقة شيفيه ، دعنا ندرس ما يلى . قد تتساءل لماذا يجب علينا إستخدام طريقة شيفيه فى كل الأحوال . إذا كان إختبار تحليل التباين يؤدى إلى رفض الفرض العدمى ، فلماذا لا تقوم بعمل المقارنات المزدوجة لمتوسطات المجتمعات بإستخدام إختبار T المذكور فى الفصل السابع؟ بالطبع ، يمكن عمل ذلك . ولكل مقارنة مزدوجة يمكن أن نختار درجة ثقة % $(1-\alpha)$ 100 . ولكن إذا تم عمل مقارنات مزدوجة عديدة فإن درجة الثقة للفترات الناتجة ستكون أقل بشكل ملحوظ من درجة الثقة % $(1-\alpha)$ 100 لفترة واحدة . وهذا صحيح لأنه لكل مقارنة مزدوجة ، فإن $(1-\alpha)$ هو الرقم الذى يقع داخل الفترة (1 , 0) ، وحاصل ضرب عاملين أو أكثر من مثل هذه العوامل سيكون دائماً أقل من أى عامل من العوامل على حدة . وبالنسبة لطريقة شيفيه ، فإن درجة الثقة هى % $(1-\alpha)$ 100 لكل الفترات كمجموعة . ومن الأفضل بشكل واضح أخذ درجة ثقة % $(1-\alpha)$ 100 لكل مقارنة مزدوجة لمتوسطات المجتمعات ، حيث تطبق درجة الثقة لكل زوج وليس على المجموعة للمقارنات المزدوجة .

تمارين

(٨-٢٥) إفترض أن متوسطات العينات لعدد k = 3 عينات مستقلة هو :

$(\bar{X}_3 = 14.9)$, $(\bar{X}_2 = 12.3)$, $(\bar{X}_1 = 14.5)$

إذا كانت المشاهدات الكلية هى (n = 15) ، وأحجام العينات الثلاثة متساوية، وإذا كان (MSE = 2) ، قارن بين متوسطات المجتمعات التالية بالإعتماد على درجة ثقة 95% .

(a) متوسط المجتمع 2 مقابل متوسطات المجتمعات 1 ، 3 .

(b) متوسطات المجتمعات 1 ، 3 .

(٨-٢٦) إفترض أن متوسطات العينات لعدد k = 4 معالجات مرتبة داخل b = 5 قطاعات هى :

($\overline{X}_4 = 29.9$, $\overline{X}_3 = 26.7$, $\overline{X}_2 = 30.8$, $\overline{X}_1 = 25.2$) وإذا كان (MSE = 5) . قارن بين متوسطات المجتمعات التالية بالإعتماد على درجة ثقة 95% .

(a) متوسطات المجتمعات 1 ، 3 مقابل متوسطات المجتمعات 2 ، 4 .

(b) متوسطات المجتمعات 1 ، 3 .

(c) متوسطات المجتمعات 2 ، 4 .

(٨-٢٧) بالرجوع إلى تمرين (٨-٩)، إستخدم إختبار شيفيه لمقارنة متوسط الحجم المعبأ عن طريق الآلات 1 ، 2 ، 3 فى مقابل تلك الخاص بالآلة 2 . إستخدم فترة ثقة 95% .

(٨-٢٨)بالرجوع إلى تمرين (٨-١٢)، إستخدم طريقة شيفيه لمقارنة الآتي: (إستخدم فترة ثقة 95%):

(a) متوسط فترات البقاء للبطاريات A ، C مقابل تلك الخاصة بالبطاريات B ، D .

(b) متوسط فترات البقاء للبطاريات A ، C .

(c) متوسط فترات البقاء للبطاريات B ، D .

(٨-٢٩) بالرجوع إلى التمرين (٨-٢٣) إستخدم إختبار شيفيه لمقارنة الآتى: (إستخدم فترة ثقة 95%)

(a) متوسط نسبة الزيادة فى المبيعات للنوع A مقابل تلك الخاصة بالأنواع B ، C .

(b) نسبة الزيادة فى المبيعات للأنواع B ، C .

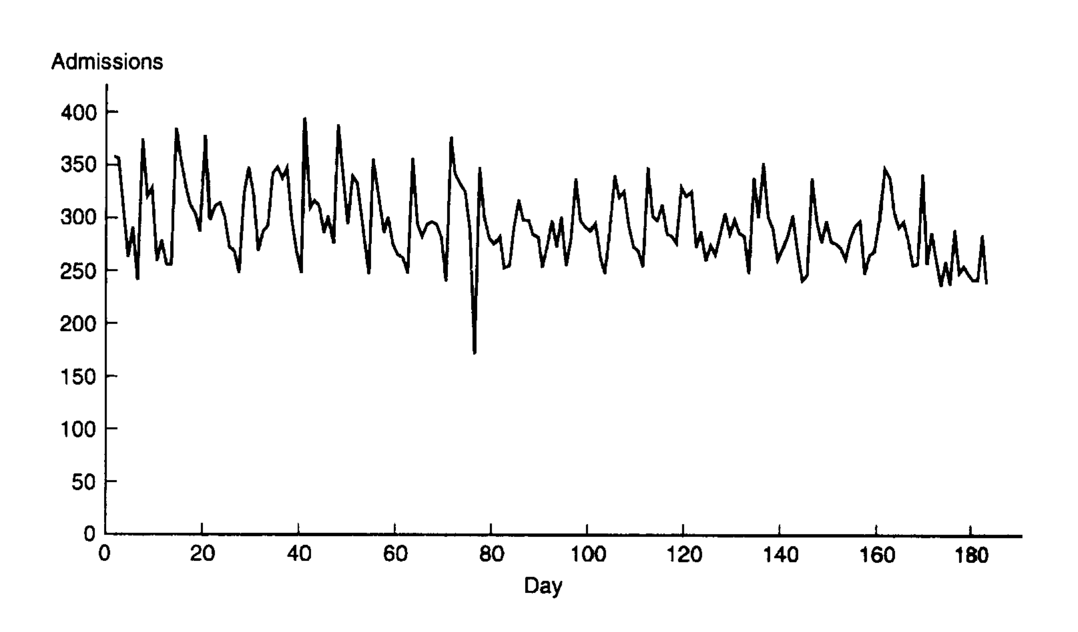
(٨-٥) تحليل التباين : مثال شامل : Analysis of Variance: A Comprehensive Example

يرغب مدير أحد المستشفيات الكبيرة فى معرفة الكثير عن دخول المرضى غرفة الطوارئ، وذلك فى جهود لتحسين واجبات العمل بها. والسؤال الرئيسى الموجه لهذه الدراسة هو ما إذا كان يجب أن تتنوع مستويات التوظف لكل يوم من أيام الأسبوع أم لا. ونظراً لأن المستوى المناسب للتوظف يعتمد على عدد المرضى الداخلين غرفة الطوارئ، فإن متغير الدراسة لهذه الدراسة هو العدد اليومى للمرضى الداخلين لغرفة الطوارئ. والعامل الأولى محل الإهتمام هو يوم من أيام الأسبوع. وقد أخذت البيانات من السجل الواقعي لغرفة الطوارئ المحتفظ به بإنتظام من قبل المستشفى. وفترة الملاحظة هى ستة أشهر تبدأ من 1 مايو 1991 وتنتهى فى 31 أكتوبر 1991 .

نظراً لأن هذه الدراسة معتمدة على الوقت ، فمن المهم إختبار استقرار عملية الدخول على مر الزمن. ويوضح الرسم البيانى لدورة الدخول اليومى فى شكل(٨-١١) أن الدخول إلى غرفة الطوارئ مستقر إلى حد ما فى فترة الملاحظة، فيما عدا لعينة يوم واحد من أيام الأسبوع الممكنة. وهذا الإنخفاض الكبير فى البيانات يجعلها بعيدة عن القيم الأخرى.

ونظر المدير إلى العدد الكلى للداخلين يومياً خاصة المنخفض في يوم من أيام الأسبوع . ويقدم شكل (٨-١٢) مدرجات تكرارية للعدد الكلى للداخلين يومياً لكل يوم من أيام الأسبوع . ويظهر كل مدرج تكراري على المحور الرأسى؛ وتدل M على المتوسط المعلوم لكل يوم من أيام الأسبوع . وعلى الرغم من توافق المدى مع التوزيع ، فيبدو أن التغير بين العينات كبير بالمقارنة بالتغير داخل العينات . وهذا ما يرجحه المدير بأن العدد الكلى للداخلين يختلف فى كل يوم من أيام الأسبوع . ويظهر أن أكبر دخول يحدث يوم الاثنين . ويبدو الدخول أيام الثلاثاء والأربعاء والخميس متساوى وأقل من ذلك الخاص بيوم الاثنين . ويميل الدخول لأن ينحرف مرة أخرى فى كل يوم إبتداء من يوم الجمعة حتى يوم الأحد . وتقع القيم المنخفضة بشكل كبير فى يوم السبت . ومن خلال البحث ، وجد أن هذا هو الشكل المنطقى ، بدون وجود أى أسباب خاصة للتغير . لذلك ، تميل لأن تمثل القيمة المنخفضة فى نهاية التوزيع العادي (الشائع) للعدد الكلى للداخلين يوم السبت .

ويقدم جدول (٨-١٢) ملخص رقمى للعدد الكلى للداخلين فى كل يوم من أيام الأسبوع . لاحظ أن المتوسطات تختلف بأسلوب متسق مع المشاهدات التي تظهر من المدرج التكرارى . ومدى المتوسطات يبدأ من أكبر مدى 345.3 فى يوم الاثنين إلى أقل مدى 268.8 فى يوم الأحد . لذلك ، فإن متوسط عدد الداخلين فى أيام الاثنين هو حوالى 28% وهو أعلى من الخاص بأيام الأحد . وإختلاف هذا المقدار ، إذا كان حقيقى ، سيكون كافياً لتأكيد الحكم على مستويات التوظف لكل يوم من أيام الأسبوع .



شكل (٨-١١)
الرسم البيانى لدورة الدخول اليومى الكلى عبر الزمن

شكل (٨-١٢) المدرجات التكرارية للدخول الكلى لأيام الأسبوع

```
          MONDAY          TUESDAY         WEDNESDAY       THURSDAY        FRIDAY          SATURDAY        SUNDAY
MIDPOINTS...............+...............+...............+...............+...............+...............+.............+
 420.000)
 408.000)
 396.000)*
 384.000)****
 372.000)***
 360.000)***             **              ***             *
 348.000)M****           ***
 336.000)**              *               *****           *               *
 324.000)*               *******         ***             ********        *
 312.000)                M*****          M***            M*****          ***             **
 300.000)**              **              *******         ****            *******         ***             *
 288.000)*               *               **              ***             M*****          ******          ********
 276.000)*               ***             **              *               **              M*********      ***
 264.000)                *                               **              ***             ***             M****
 252.000)*                                                               *               **              *******
 240.000)                                *                               *                               **
 228.000)
 216.000)
 204.000)
 192.000)
 180.000)                                                                                *
 168.000)

          LEGEND FOR GROUP MEANS:     M - MEAN COINCIDES WITH AN ASTERISK
                                      N - MEAN DOES NOT COINCIDE WITH ANY ASTERISK
```

جدول (٨-١٢) ملخص الإحصائيات للدخول اليومى الكلى لكل يوم من أيام الأسبوع

	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت	الأحد
المتوسط	345.292	316.038	313.074	308.923	291.560	277.269	268.846
الإنحراف المعيارى	37.072	25.629	27.237	22.269	21.900	25.209	16.856
الخطأ المعيارى	7.567	5.026	5.242	4.376	4.380	4.944	3.306
الحد الأقصى	398.000	357.000	366.000	357.000	338.000	310.000	297.000
الحد الأدنى	255.000	267.000	244.000	262.000	246.000	180.000	240.000
n	24	26	27	26	25	26	26

وقد تم إجراء إختبار تحليل التباين المعتمد على العينات المستقلة لإختبار ما إذا كان التغير بين العينات المشاهد فى شكل (٨-١٢) ناتج عن الآثار العشوائية وحدها، فى غياب أثر أى يوم من أيام الأسبوع. والمعالجات هى أيام الأسبوع السبعة. والنتائج موضحة فى جدول (٨-١٣) . ولإختبار الفرض العدمى القائل بأنه لا يوجد فرق بين متوسطات الدخول اليومية ، فإن قيمة F هى 25.70 وقيم P (P-value) المرتبطة بها هى 0.0000 لذلك إذا كانت المتوسطات اليومية لعملية الدخول متساوية، فلا يوجد أى فرصة لملاحظة هذه الفروق الكبيرة كما تظهرها الدراسة. لذلك يتم إنكار صحة الفرض العدمى عن طريق البيانات . ويدعم هذا الدليل الكافى وجود فروق بين متوسطات كل يوم من أيام الأسبوع .

جدول (٨-١٣) جدول تحليل التباين للدخول الكلى اليومى لكل يوم من أيام الأسبوع

Analysis of Variance Procedure

Dependent Variable: ADMITS

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	PR>F
Model	6	101790.6719	16965.1113	25.70	0.0000
Error	173	114216.2779	660.2097		
Corrected Total	179	216006.9498			

R-SQUARE	C.V.	Root MSE	ADMITS Mean
0.471238	8.4899	25.69454611	302.650

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr>F
DAY	6	101790.6719	16965.1113	25.70	0.0000

وقد تم إستخدام طريقة شيفيه لتأكيد نموذج معين من الفروق بين المتوسطات اليومية التى تظهر من واقع المدرج التكرارى لكل يوم من أيام الأسبوع. وبصفة خاصة، يوجد ثلاث مقارنات محل الإهتمام: (1) يوم الاثنين فى مقابل باقى أيام الأسبوع؛ (2) من يوم الثلاثاء حتى يوم الخميس مقابل من يوم الجمعة حتى يوم الأحد؛ (3) يوم الجمعة مقابل يومى السبت والأحد. ويقدم جدول (٨-١٤) نتائج شيفيه. وتعرض هذا النتائج بوضوح أن متوسط الدخول فى يوم الاثنين يختلف عن متوسطات كل الأيام الأخرى. وبالإضافة إلى ذلك، فإن متوسط الدخول للأيام من يوم الثلاثاء حتى يوم الخميس كمجموعة تختلف بشكل واضح عن متوسط الدخول للأيام من يوم الجمعة حتى يوم الأحد. ولا يوجد فرق واضح بين متوسط الدخول فى يوم الجمعة عن ذلك الخاص بيومى السبت والأحد.

جدول (٨-١٤) نتائج طريقة شيفيه لاختبار Contrsts لأيام الأسبوع

Contrast	value of Statistic	Standard Error of Statistic	Interval Based on 95% Confidence
$L_1 = 6\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 - \mu_6 - \mu_7$	$\hat{L}_1 = 269.042$	$SE(\hat{L}_1) = 33.8045$	$174.59 \leq L_1 \leq 417.49$
$L_2 = \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - \mu_5 - \mu_6 - \mu_7$	$\hat{L}_2 = 100.360$	$SE(\hat{L}_2) = 12.3463$	$56.00 \leq L_2 \leq 144.72$
$L_3 = 2\mu_5 - \mu_6 - \mu_7$	$\hat{L}_3 = 37.005$	$SE(\hat{L}_3) = 12.5068$	$-7.93 \leq L_3 \leq 81.94$

وتقدم هذه الدراسة أساس قوى لتعديل واجبات التوظف. ومن الواضح أن إحتياجات التوظف تختلف بإختلاف كل يوم من أيام الأسبوع، لأن نظام تغيير الدخول لكل يوم من أيام الأسبوع يمكن إدراكه وهو أيضاً مستقر. والنقد الذى يمكن أن يوجه إلى هذه الدراسة هى أنها تغطى الأشهر من مايو حتى أكتوبر. لذلك، لا يوجد أساس إحصائى يرجح أن تستمر النماذج المشاهدة للدخول للأشهر الأخرى. ويلزم أن نرجع كل نتيجة فى هذا الخصوص إلى الخبرة.

(٨-٦) ملخص : Summary

فى هذا الفصل ، تم توسيع نطاق الطرق المستخدمة فى الفصل السابع بتقديم إختبار إحصائى يطلق عليه اسم تحليل التباين. وكما كان الحال فى إختبار T المقدم فى الفصل السابع ، فإن تحليل التباين هو إختبار إستدلالى لتحديد الفروق (فى المتوسط) بين عدد من المجتمعات أو العمليات عن طريق تجزئة التغير الكلى فى بيانات العينة المبوبة بطريقة ما تجعلنا نستطيع تقدير مساهمة العوامل التى تسبب التغير. ويتم إستخدام توزيع F فى إختبار تحليل التباين .

وبصفة عامة، نطلق على المجتمعات أو العمليات أو مستويات عامل العملية محل الدراسة اسم المعالجات treatments. وأساليب الحصول على البيانات فى هذا الفصل هى أيضاً إمتداد لأسلوبين رئيسيين سبق ذكرهما فى الفصل السابع – وهما العينات المستقلة ، العينات المختارة فى قطاعات ، حيث تمثل القطاعات المتغير الخلفي أو الخفي. وكما كان الحال فى الفصل السابع ، يظل التحليل البيانى الخطوة الأولى الهامة فى تحديد الفروق بين المعالجات .

المراجـع :

1. R. B. Miller and D. W. Wichern, *Intermediate Business Statistics : Analysis of Variance, Regression and Time Series.* New York : Holt, Rinehart & Winston. 1977 .

2. J. Neter, W. Wasserman, and M. Kutner, *Applied Linear Statistical Models,* 2nd ed. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1985 .

3. L. Ott. *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis.* 4th ed. Belmont, CA : Duxbury Press, 1993 .

تمارين إضافية

(٨-٣٠) تبين إحصائيات الحوادث أن السائقين السكارى يتسببون فى عمل ثلثى حوادث السيارات فى الولايات المتحدة. وقد استخدمت هذه الإحصائيات لبحث إلى أى مدى يمكن أن يضعف الكحول قدرة الفرد على أداء الوظائف الروتينية لقيادة السيارة. صف أسلوب المعاينة لإنجاز هذه المهمة ووضح كيف يجب تنفيذ هذه التجربة ؟

(٨-٣١) ترغب شركة تأمين فى تحديد ما إذا كان هناك فروق واضحة فى متوسط عدد الأيام التى يعانى فيها المرضى من نفس المرض للمقيمين فى منطقة بها أربعة مستشفيات رئيسية. صف بوضوح التصميم الإحصائى لإنجاز هذا الهدف ؟

(٨-٣٢) تتكون عملية التعبئة من ثلاث آلات متماثلة حيث تقوم بسكب الحجم المحدد من المنتج داخل حاويات متساوية الحجم. وقد أخذت عينات عشوائية دورياً من الآلات لإختبار تساوى متوسط الحجم المسكوب عن طريق الآلات. لفترة معينة من الوقت، ثم تسجيل بيانت العينة فى الجدول التالى :

الآلـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــة		
A	B	C
16	18	19
15	19	20
15	19	18
14	20	20
	19	19
	19	

(a) مثل البيانات بيانياً. هل يظهر لك أى فروق فى متوسط الحجم المعبأ للآلات الثلاثة؟ اشرح .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يظهر دليل العينة أنه توجد فروق فى متوسط الأحجام المعبأة. دعم إجابتك .

(٨-٣٣) فى تمرين (٨-٣٢) ، إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 95% لمقارنة متوسط الحجم المعبأ عن طريق الآلة A مقابل تلك الخاص بالآلات B ، C وقارن أيضاً المتوسطات للآلات B ، C .

(٨-٣٤) درس طالب متخرج حديثاً طول الفترة الزمنية التى يأخذها عند السفر بإستخدام السيارة من نقطة بداية محددة إلى نقطة نهاية محددة بإستخدام ثلاثة طرق مختلفة. وكل الطرق داخل منطقة كبيرة بالعاصمة. فترة القياس في الدراسة واحدة، كذلك حالة الطقس واحدة. والبيانات المشاهدة بالدقائق هى كالتالى :

الطريق 1	الطريق 2	الطريق 3
18.63	18.30	20.53
23.17	18.77	21.92
20.25	21.93	17.43
18.08	22.32	18.22
18.10	21.00	19.20
16.83	18.30	16.13
17.47	18.77	18.30
19.88	21.00	17.60
16.37	22.32	16.40
18.67	21.00	19.65
18.08	21.93	18.32

إفترض أن هذه هى ثلاث عينات مستقلة مأخوذة من مجتمعات تتبع التوزيع الطبيعى بتباينات متساوية .

(a) مثل البيانات بيانياً. هل يظهر لك أى فروق بين هذه الطرق فيما يتعلق بمتوسط طول الفترة الزمنية ؟ إشرح .

(b) إستناداً إلى الرسم البياني ، هل يوجد لديك قلق بخصوص الإفتراضات التى قمت بوضعها؟ إشرح .

(c) إشرح لماذا يوجد تغير فى طول الفترة الزمنية لكل طريق .

(d) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق بين أطوال الفترات الزمنية لهذه الطرق ، فى المتوسط .

(٨-٣٥) طلب من معمل إختبار مقارنة قدرة التحمل لأربعة أنواع مختلفة من كرات الجولف . وقد صمم المكتب تجربة حيث تم إختيار ثمانى كرات من إنتاج كل مصنع عشوائياً وعرض آلة تقوم بضربهم بقوة ثابتة . والمقياس محل الإهتمام هو عدد المرات التى تضرب فيه الكرة قبل تحطم غلافها الخارجى . وقد تم الحصول على البيانات فى الجدول التالى :

النوع			
A	B	C	D
205	242	237	212
229	253	259	244
238	226	265	229
214	219	229	272
242	251	218	255
225	212	262	233
209	224	242	224
204	247	234	245

(a) مثل البيانات بيانياً . هل تظهر لك أى فروق بين متوسطات الأنواع الأربعة؟ اشرح .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق بين متوسطات الأربع أنواع . دعم إجابتك .

(٨-٣٦) نرغب فى تحديد ما إذا كان حجم الكربون المستخدم فى مصنع للصلب له تأثير على مقاومة الشد للصلب . وقد تم بحث خمس نسب مختلفة للكربون وهى .2% ، .3% ، .4% ، .5% ، .6% ولكل نسبة كربون ، تم اختيار خمس عينات من الصلب عشوائياً من نفس مجموعة الإنتاج وقد تم قياس المقاومة لهم . وقد تم الحصول على بيانات العينة فى الجدول التالى ، حيث المقاومة مقاسة بالكيلو جرام لكل سنتيمتر مربع :

حجم الكربون				
.2%	.3%	.4%	.5%	. 6%
1.240	1.420	1.480	1.610	1.700
1.350	1.510	1.470	1.590	1.790
1.390	1.410	1.520	1.580	1.740
1.280	1.530	1.540	1.630	1.810
1.320	1.470	1.510	1.560	1.730

(a) مثل البيانات بيانياً. هل يظهر لك أى فروق فى متوسط مقاومة الشد ؟ إشرح .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أى مدى يمكن أن يدعم دليل العينة الإدعاء القائل بأنه يوجد أثر لمكون الكربون على مقاومة الشد للصلب . إشرح .

(٨-٣٧) فى تمرين (٨-٣٦) إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 99% لمقارنة الآتى :

(a) المتوسط لنسب الكربون 5%. ، 6%. .

(b) متوسط نسبة الكربون 6%. مقابل تلك الخاصة بنسب الكربون 3%. ، 4%. ، 5%. .

(c) المتوسط لنسب الكربون 2%. ، 3%. .

(٨-٣٨) لتحديد ما إذا كان هناك فروق فى متوسط إنتاج ثلاث أنواع من القمح، تم تقسيم قطعة أرض زراعية متجانسة إلى ثلاثة قطع متساوية. وقد تم تقسيم كل قطعة إلى خمس قطع فرعية متساوية وقد تم زراعتها بنوع واحد من القمح. وفى موسم الحصاد، المقياس محل الإهتمام هو الإنتاج (بالبوشل لكل أكر) . والآتى هو جدول تحليل تباين جزئى لهذه المشكلة.

Source	d f	SS	MS	F value
Treatments		32		
Error				
Total		100		

أكمل جدول تحليل التباين وحدد قوة هذا الدليل فى مواجهة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى متوسط الإنتاج. دعم إجابتك .

(٨-٣٩) تم اختيار عدد من مديرى الشركات عشوائياً من أربعة مناطق جغرافية معروفة فى الولايات المتحدة لتحديد ما إذا كانت المنطقة لها أثر واضح على متوسط الرواتب السنوية لمديرى الشركات. وقد تم ملاحظة الرواتب السنوية التالية (بآلاف الدولارات) :

الغرب	الجنوب الشرقى	الغرب الأوسط	الشمال الشرقى
90	110	75	210
265	235	195	125
350	85	120	95
140	150	240	345
170	95	90	80

مثل البيانات بيانياً. واستناداً إلى ما تراه ، هل تعتقد أن هناك أى نقط رئيسية لم تؤخذ فى الإعتبار فى بيانات العينة؟ وبعبارة أخرى، قدم دليل يدعم أو يناقض ما إذا كان يمكن إستخدام أسلوب تحليل التباين لتحديد ما إذا كان للمنطقة تأثير على متوسط الأجور استناداً إلي البيانات المعطاة. كن متأكداً عند إعطاء تدعيم واقعى فى أى حالة .

(٨-٤٠) فى مصنع كبير ، نرغب فى تحديد ما إذا كان يوجد أى أثر للعمال المختلفين الذين لديهم نفس مستوى المهارة على عدد الوحدات المتوقع إنتاجها فى فترة محددة من الزمن. وقد تم

إدارة تجربة بحيث تم اختيار خمس عمال عشوائياً وسجل عدد الوحدات المنتجة لكل عامل لستة فترات متساوية من الزمن ، وتم تسجيل النتائج كالتالى :

العامل				
1	2	3	4	5
45	52	39	57	48
47	55	37	49	44
43	58	46	52	55
48	49	45	50	53
50	47	42	48	49
44	57	41	55	52

(a) مثل البيانات بيانياً، هل تظهر لك أى فروق فى متوسط عدد الوحدات المنتجة عن طريق هؤلاء العمال ؟ اشرح .

(b) إلى أى مدى يمكن لدليل العينة إنكار صحة الفرض العدمى القائل بأنه لا توجد فروق فى المتوسط ؟ دعم إجابتك .

(c) ما هى الإفتراضات الضرورية لإجراء التحليل فى الجزء (b) ؟ هل يساعدك الرسم البيانى فى الجزء (a) مع واحد من هذه الإفتراضات؟ إشرح .

(٨-٤١) فى تمرين (٨-٤٠) ، إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 95% لمقارنة الآتى :

(a) المتوسطات للعمال 2 ، 4 .

(b) المتوسطات للعامل 2 مقابل تلك الخاص بالعمال 1 ، 3 .

(٨-٤٢) نظراً لإرتفاع أسعار البنزين ، تم تصميم أجهزة عديدة تدعى بأنها تزيد متوسط عدد الأميال المقطوعة عند تركيبها بالسيارة وقد إختارت منظمة إختبار ثلاثة من هذه الأجهزة لإختبارها . وترغب المنظمة فى مقارنة عدد الأميال التى تقطعها السيارة التى تحتوى على هذه الأجهزة بعدد الأميال التى تقطعها السيارة التى لا تحتوى على هذه الأجهزة . وقد إختارت المنظمة خمس أنواع من السيارات لهذا الإختبار . وللتحكم فى الاختلافات ، خططت المنظمة لإستخدام نفس السائق فى التجربة كلها . وقد تم الحصول على البيانات التالية (الأميال لكل جالون) :

السيارة	بدون جهاز	جهاز A	جهاز B	جهاز C
1	18.2	18.9	19.1	20.4
2	27.4	27.9	28.1	29.9
3	35.2	34.9	35.8	28.2
4	14.8	15.2	14.9	17.3
5	25.4	24.8	25.6	26.9

(a) مثل البيانات بيانيا . هل تظهر لك أى فروق فى متوسط عدد الأميال ؟

(b) لماذا نحتاج لوضع السيارات فى قطاعات هنا ؟ إشرح .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين فى تحديد قوة دليل العينة مقابل الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى متوسط عدد الأميال بإستخدام أو بدون إستخدام هذه الأجهزة .

(٨-٤٣) فى تمرين (٨-٤٢) إستخدم طريقة شيفيه بدرجة ثقة 95% لمقارنة :

(a) متوسط عدد الأميال المقطوعة بإستخدام الأجهزة A ، B ، C مقابل ذلك الخاص بدون إستخدام أجهزة .

(b) متوسط عدد الأميال المقطوعة بإستخدام الجهاز C وتلك الخاصة بدون إستخدام أى أجهزة .

(c) متوسط عدد الأميال المقطوعة بإستخدام الأجهزة A ، B مقابل تلك الخاصة بإستخدام الجهاز C .

(٨-٤٤) فى تمرين (٨-٤٢) ، إفترض أنك لم تأخذ فى الإعتبار أن نوع السيارة مصدر من مصادر التغير فى عدد الأميال المشاهدة . وضح ما إذا كان هذا الحذف له أى تأثير على إجابتك فى الجزء (c) فى تمرين (٨-٤٢) .

(٨-٤٥) تنتج السجائر المشتعلة كميات من أول أكسيد الكربون يمكن تقديرها . عند إستنشاق دخان السيجارة ، يتحد أول أكسيد الكربون مع هيموجلوبين الدم ليكون كربوكسيهيموجلوبين car-boxhemoglobin وفى دراسة حديثة ، رغب الباحثين فى تحديد ما إذا كان تركيز الكربوكسيهيموجلوبين القابل للتقدير ، يقلل من قدرة المرضى الذين يعانون من الإلتهاب الشعبى المزمن وإنتفاخ الرئة على أداء التمارين الرياضية . وقد تم إختيار سبعة مرضى ، فى بيئة محكمة ، وطلب منهم أداء تمرين المشى لمدة 12 دقيقة ، وان يتنفس كل واحد منهم ، واحد من أربعة غازات مخلوطة: الهواء ، الأكسجين ، الهواء + أول أكسيد الكربون CO ، الأكسجين + أول أكسيد الكربون . وقد كان حجم أول أكسيد الكربون المستنشق كافى لرفع تركيز الكربوكسيهيموجلوبين بنسبة 9% لكل معرض للتجربة . ولضبط إستنشاق أول أكسيد الكربون طلب من السبعة مدخنين التوقف عن التدخين لمدة 12 ساعة قبل إجراء التجربة . وتمثل البيانات فى الجدول التالى المسافة بالأمتار التى قام بسيرها المعرضين للتجربة تحت كل ظرف فى 12 دقيقة .

الغاز المخلوط				
co+الأكسجين للتجربة	co+ الهواء	الأكسجين	الهواء	المريض
854	750	874	835	1
829	755	827	787	2
726	698	738	724	3
279	210	378	336	4
336	168	315	252	5
642	558	672	560	6
336	260	341	336	7

(a) مثل البيانات بيانياً، هل تظهر لك أى فروق فى متوسط المسافة المقطوعة بالنسبة للأربعة أنواع من الغازات المخلوطة .

(b) لماذا نحتاج لعمل قطاعات للمعرضين للتجربة ؟ إشرح .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين لتحديد قوة دليل العينة مقابل الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر للغازات المخلوطة على المسافة المقطوعة. دعم إجابتك .

(٨-٤٦) نرغب فى تحديد ما إذا كان هناك فروق يمكن تقديرها فى متوسط الأسعار بين أربع محلات تجارية كبيرة فى مدينة معينة. وقد تم إختيار عشر وحدات من الأنواع المشتراة بإنتظام عشوائياً وقد تم ملاحظة أسعار الوحدات لكل محل تجارى وقد تم الحصول على البيانات التالية :

	المحل			
النوع	A	B	C	D
1	3.29	3.42	3.27	3.35
2	.59	.65	.59	.60
3	1.25	1.29	1.25	1.27
4	4.35	4.59	4.29	4.49
5	.89	.95	.89	0.89
6	1.85	1.79	1.89	1.89
7	.95	.89	.89	.90
8	.75	.79	.69	.79
9	2.35	2.35	2.39	2.39
10	1.49	1.55	1.55	1.49

(a) مثل البيانات بيانياً، هل تظهر لك أى فروق فى متوسط الأسعار للأربع محلات تجارية؛ إشرح .

(b) لماذا نحتاج لعمل قطاعات للوحدات ؟ إشرح .

(c) إستخدم مدخل تحليل التباين لتحديد قوة دليل العينة مقابل الإدعاء القائل بأنه لا يوجد أثر للمحل التجارى على سعر الوحدة لنوع المنتج. دعم إجابتك .

(٨-٤٧) تشتمل التمارين (٢-٢٤) ، (٢-٤٢)، (٢-٧١) على الخدمات التعليمية .Inc تقدم شركة صغيرة للأدوات الدراسية للمدارس المتوسطة والمدارس الثانوية (العليا). ويتم الحصول على العملاء من ثلاثة مصادر yellow pages (صفحة الإعلانات) ، الترشيح المهنى، ترشيح عميل سابق .

وتمثل البيانات التالية الدخل الإجمالى للمبيعات لعينة مكونة من 143 عميل مصنفة وفقاً لكل مصدر .

ترشيحات العمـــــلاء

40	300	100	120	160	140	80	110	160	180	80	710
120	220	100	250	120	20	160	120	1.340	160	280	200
560	3.940	60	600	140	840	230	160	530	200	140	480
140	120	560	120	38	180	100	220	100	220	1.040	

ترشيحات صفحة الإعلانات

950	120	75	200	100	620	320	120	140	80	130	830
180	320	90	1.220	380	60	70	1.600	80	120	160	760
850	420	150	140	20	520	260	100	100	840	480	150
230	220	220									

الترشيحات المهنية

2.200	140	480	480	150	2.840	560	530	2.470	140	160	320
80	320	180	940	580	900	1.730	100	900	360	1.560	1.050
680	4.160	200	165	300	60	1.870	390	1.920	740	140	60
140	40	540	8.320	1.020	175	1.260	710	720	1.540	4.680	1.460
400	1.120	240	360	540	1.500	3.280	880	1.120			

(a) مـثل البيـانات بيانيـاً، هل يظهـر وجود فـروق بين متـوسطات أحجـام المبيـعات في الثـلاث مصادر المرشحة؟

(b) إستـخدم إختـبار تحليل التـباين لتحـديد إلى أى مدى يمكن لدليل العـينة إنكار صحـة الإدعاء القائل بأنه لا توجد فروق فى أسعار البيع للثلاثة مصادر فى المتوسط.

(٨-٤٨) هذا التـمرين هو امتـداد للتمـارين (٢-٢٥)، (٢-٤٣)، (٢-٧٢)، (٢-٨٦) التى تتعـامل مع دراسة أسلوب العـمل للمشـتركين فى Low firm Northrup and Bauers ومن المفتـرض أن يتم تحديد عـدد ساعات billable المعتـمدة على القسم داخل الشـركـة المشاركـة. والبيانات التـالـية عـدد سـاعات billable على مدى 9 شهور لكل من 43 مشارك مقترناً مع قسمه.

Hrs.	802	1,287	1,255	1,178	1,275	767	1,424
Dept.	1	1	1	2	1	1	3
Hrs.	1,328	1,223	790	1,339	1,434	1,050	796
Dept.	2	1	1	4	4	5	6
Hrs.	1,308	1,464	1,389	1,316	1,325	1,494	1,096
Dept.	6	6	7	4	8	1	1
Hrs.	1,482	1,493	1,452	1,060	1,407	1,067	934
Dept.	3	7	3	6	6	8	3
Hrs.	901	1,400	1,320	1,132	1,256	858	1,346
Dept.	1	1	7	1	3	1	8
Hrs.	885	1,084	1,065	1,211	1,379	1,340	1,098
Dept.	1	5	5	1	3	6	5
Hrs.	1,407						
Dept.	1						

حيث .Hrs عدد الساعات   .Dept القسم

دليل القسم :

1 = القضايا التجارية ، وقضايا العمل .

2 = علاقات العمل .
3 = الأملاك العقارية .
4 = البنوك والتمويل .
5 = الأعمال الإدارية .
6 = المتعلق بالشركات .
7 = التأمين والمسئولية المدنية عن المنتجات .
8 = الأموال والإئتمان .

(a) مثل البيانات بيانياً . هل يظهر لك أن متوسط عدد الساعات billable يختلف بين الثمانية أقسام؟ فإذا كان الأمر كذلك، صف الفروق .

(b) إستخدم إختبار تحليل التباين لتحديد إلى أي مدى يمكن لبيانات العينة أن تجزم بأن الأقسام تختلف من حيث متوسط عدد ساعات billable للمشاركين .

(٨-٤٩) هذا التمرين هو امتداد للتمارين (٢-٢٦)، (٢-٧٣)، (٢-٨٧) وهو امتداد أيضاً لدراسة مبيعات الأيس كريم لمؤسسة تجارية لمدة أربعة أشهر مختارة من المبيعات الكلية لعام معين . وهناك عامل واحد غالباً ما يستخدم لشرح التغير المشاهد في مبيعات الأيس كريم لهذه المؤسسة وهو أيام الأسبوع . وعادة ما يتزايد العمل في عطلة نهاية الأسبوع . وتشتمل البيانات التالية على أيام الأسبوع ورقم المبيعات اليومية المسجل لكل يوم من أيام الأسبوع . (وقد تلاحظ وجود إنقطاع لتسلسل الأيام . وسبب ذلك هو أن البيانات غير متاحة) .

المبيعات	373	761	412	180	242	148	221
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	436	640	462	254	257	259	220
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	382	737	610	246	238	342	307
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	505	739	591	260	262	317	419
اليوم	5	6	7	1	2	3	4
المبيعات	335	550	884	793	379	497	407
اليوم	5	6	6	7	1	2	3
المبيعات	423	702	815	777	583	494	509
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	456	587	878	674	480	322	453
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	477	726	779	795	381	445	465
اليوم	4	5	6	7	1	2	3
المبيعات	443	544	869	884	700	668	349

اليوم	4	5	6	7	7	1	2
المبيعات	349	419	440	780	700	321	242
اليوم	3	4	5	6	7	1	2
المبيعات	385	287	438	749	600	300	311
اليوم	3	4	5	6	7	1	2
المبيعات	313	196	452	411	514	290	245
اليوم	3	4	5	6	7	1	2
المبيعات	193	301	385	643	583	343	544
اليوم	3	4	5	6	7	1	7
المبيعات	190	200	173	193	372	547	528
اليوم	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات	274	285	168	250	495	635	306
اليوم	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات	198	368	263	226	296	468	416
اليوم	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات	311	324	464	544	336	498	380
اليوم	1	2	4	5	6	7	1

مدلول أرقام الأيام هو 1 = الاثنين ، 2 = الثلاثاء ، 3 = الأربعاء، 4 = الخميس ، 5 = الجمعة، 6 = السبت ، 7 = الأحد .

(a) ارسم بيانات المبيعات لكل يوم من أيام الأسبوع بيانياً. هل يظهر نموذج واضح؟ إذا كان الأمر كذلك ، صف هذا النموذج .

(b) نفذ إختبار تحليل التباين لتأكيد مشاهدتك فى الجزء (a) .

دراسة حالة (8-1) تحليل عوائد ضريبة الدخل :

اشتملت دراسة حالة (6-1) على تحليل عوائد ضريبة الدخل. وقد كان المجتمع يتكون من عوائد ضريبة دخل قدرها 112,201,751 المسجلة فى عام 1989 . وقد تم الحصول على البيانات من عينات عشوائية بسيطة لحوالى 75 عائد من كل خمس فئات لعوائد الضريبة من هذا المجتمع ، والآتى يمثل مدى الدخل الإجمالى المعدل (AGI) .

* $ 0 - $ 10,000
* $ 20,000 - $ 30,000
* $ 50,000 - $ 100,000
* $ 100,000 - $ 200,000
* $ 200,000 - $ 500,000

وقد تم تسجيل البيانات على data disk فى ملف يسمى CASE060 وهو يتكون من 379 صف ، حيث يقدم كل صف معلومات عن عائد واحد للضريبة . ومتغيرات الأعمدة المحددة فى الملف هى :

C_1 = تحديد الطبقة (الفئة) .

C_2 = الدخل الإجمالى المعدل .

C_3 = الإستقطاعات (الإستقطاع المعيارى = 0 ، البنود المفصولة = 1) .

C_4 = الإستقطاعات الكلية (المبلغ) .

C_5 = الدخل الخاضع للضريبة .

C_6 = الإستثناءات (الإعفاءات) الكلية (الزوج ، الزوجة ، التابعين) .

C_7 = الإئتمان الكلى (للطفل ، والعناية التابعة ، خلافه) .

C_8 = المساهمات الكلية .

C_9 = الإلتزام بالضريبة .

فى دراسة حالة (1.6) ، قد قمت بإجراء دراسة تفسيرية. وقد تضمن الإستدلال الطبقات، ولم يكن مطلوباً إجراء إستدلال بإستخدام صيغ معروفة بالنسبة لمقارنة الطبقات لأنك لم تكن درست تحليل التباين . ومهمتك فى إستمرار دراسة حالة (1.6) تمتد لتشمل المناقشة السابقة، وأيضاً المقارنة بين الطبقات بتطبيق الطرق التى درستها فى الفصل الثامن. وإذا كان هناك متغيرات أخرى ترغب الآن فى مقارنة الطبقات على أساسها، لذلك يجب إستخدام تحليل التباين هنا .

ملحق (٨ أ) : Appendix - (8A)

تعليمات إستخدام الحاسب الآلى لإستخدام برنامج SAS , Minitab

سوف نستخدم مثالى (٨-٢)، (٨-٤) كنماذج لتوضيح تعليمات برامج Minitab، SAS التى تنتج مخرجات الحاسب الآلى لهذه المشاكل .

(٨- أ - ١) مثـال (٨-٢)

Minitab

لإنتاج مخرجات Minitab لمثال (٨-٢) نستخدم أوامر READ , NAME لإدخال البيانات. ويحدد أمر NAME الإسم لعمود Minitab . وقد أطلقنا C1 على «thickness» ، C2 على «Kolo watt» (متغير الإستجابة). وبعد عبارة READ ، ندخل البيانات بوضع نوع كثافة المادة العازلة متبوعة بعدد ساعات الكيلو وات (بالآلاف) فى مجموعة واحدة معينة لكل سطر .

وتنتج التعليمات التالية شكل (٨-٦) ومخرجات Minitab لجدول (٨-٦)وينتج الأمر (PLOT) الشكل (٨-٦) (يتم إستخدام أسلوب مماثل لإنتاج الشكل (٨-١)، (٨-٥)) ، بينما ينتج الأمر ANOVA المخرجات فى جدول (٨-٦) . لاحظ أنه فى عبارة ANOVA نعبر عن معادلة بتنويع الإستجابة (الكيلو وات) فى الجانب الأيسر والمعالجات (الكثافة) فى الجانب الأيمن. ويتم إنهاء المعادلة بإنتهاء الفترة .

```
MTB > name C1 = «thickness» Cs = «Kilo watt»
MTB > read C1 C2
```

```
DATA > 4   14.4
DATA > 4   14.8
DATA > 4   14.8
DATA > 4   15.2
DATA > 4   14.3
DATA > 4   14.6
DATA > 6   14.5
DATA > 6   14.1
DATA > 6   14.6
DATA > 6   14.2
DATA > 8   13.8
DATA > 8   14.1
DATA > 8   13.7
DATA > 8   13.6
DATA > 8   14.0
DATA > 10 13.0
DATA > 10 13.2
DATA > 10 13.1
DATA > 12 12.8
DATA > 12 12.9
DATA > 12 13.2
DATA > 12 13.3
DATA > 12 12.7
DATA > end
MTB > LPOT C2 C1
MTB > anova C2 = C1
```

SAS

تذكر أنه فى SAS تسبق العبارات CARDS , INPUT , DATA البيانات . وتسمى عبارة INPUT المعالجات فى الشكلة (THIKNESS) ندخل البيانات بتحديد عدد المعالجات (ونستخدم ببساطة الأعداد 1, 2, 3.... لتحديد المعالجات المختلفة، متبوعة بمتغير الإستجابة. وكما كان الحال فى برنامج Minitab نضع مجموعة محددة فى كل سطر. وهذا يعنى -بالطبع- أننا نكرر رقم المعالجة عدد مرات يساوى المشاهدات الموجودة بالمعالجة .

وإذا كنا نرغب فى الوصول إلى الشكل البيانى لبرنامج SAS المماثل لشكل (٨-٦)، سوف نستخدم التعليمات التالية بعد إدخال البيانات .

```
PROC PLOT,
PLOT KILOWATT * THIK NESS;
```

لاحظ أنه كما كان الحال فى برنامج Minitab، يتم وضع المتغير الأول المذكور فى عبارة PLOT على المحور الرأسى y – axis ، بينما يتم وضع المتغير الثانى على المحور الأفقى X-axis .

وينتج الإجراء PROC ANOVA جدول تحليل التباين . ويتبع PROC ANOVA بعبارات MODEL , CLASS فى سطور منفصلة. وتحتوى عبارة CLASS على أسماء المعالجات المذكور فى عبارة INPUT (THIKNESS) وتوازن العبارة MODEL متغير الإستجابة مع المعالجات حيث يطلق عليهم معاً عبارة INPUT .

وبالنسبة لمثال(٨-٢) التعليمات التالية تنتج جدول تحليل التباين الموضح برنامج SAS، جدول تحليل التباين .

```
DATA;
INPUT THIKNESS KILOWATT
CARDS;
1   14.4
1   14.8
1   15.2
1   14.3
1   14.6
2   14.5
2   14.1
2   14.6
3   13.8
3   14.1
3   13.7
3   13.6
3   14.0
4   13.0
4   13.4
4   13.2
5   13.1
5   12.8
5   13.2
5   13.3
5   12.7
PROC ANOVA;
CLASS THIKNESS;
MODEL KILOWATT = THIKNESS'
```

Analysis of variance procedure

Dependent variable : **KILOW WATT**

source	DF	Sum squares	Mean squares	F value	Pr > F
Model	4	9.83556522	2.45889130	36.46	0.0001
Error	18	1.21400000	0.06744444		
corrected	22	11.04956522			

R-squares	c.v.	Root MSE	KILOW WATT
0.890131	1.881296	0.25970068	13.80434783

Source	DF	A nova SS	Mean squares	F value	Pr > F
THIKNESS	4	9.83556522	2.45889130	36.46	0.0001

(٨- أ - ٢) مثال (٨-٤)

Minitab

للحصول على الرسم البيانى بشكل (٨-١٠) أو الأشكال البيانية فى الأشكال (٨-٨)، (٨-٩) وبالمثل جدول تحليل التباين، يمكن إستخدام نفس الأسلوب الذى ناقشناه فى ملحق 7 فى مثال (٨-٧).

وتنتج التعليمات التالية شكل (٨-١٠) وجدول تحليل التباين بإستخدام برنامج Mnitab لمثال (٨-٤) . لاحظ أن عبارة DATA تلى الأمر SET للعمود C_1 (auto) ، ويحدد الرقم الموجود بين القوسين الخمس سيارات ، «4» التى تلى القوس المعلق توضح عدد السائقين. وبالمثل تلى عبارة DATA الأمر SET للعمود C_2 (السائق) وتعطى عدد السيارات أولاً ثم تحدد الأربعة سائقين بالأرقام داخل الأقواس. بعد الأمر SET للعمود C_3 (عدد الأميال)، ثم إستخدام خمس سطور للبيانات DATA لإدخال عدد الأميال - سطر لكل سيارة - . وينتج الأمر LPLOT الشكل البيانى الموجود فى شكل (٨-١٠) . وإذا كنا نرغب فى وضع المعالجات على المحور الأفقى نضع C2 مكان C1 .

```
MTB > name c1 = 'auto' , c2 = 'driver' , c3 = 'mileage'
MTB > set c1
DATA > (1:5)4
DATA > end
MTB > set c2
DATA > 5 (1:4)
DATA > end
MTB > set c3
DATA > 33.6    36.9    34.2    34.8
DATA > 32.8    36.1    35.3    37.1
DATA > 31.9    32.1    33.7    34.8
DATA > 27.2    34.4    31.3    32.9
DATA > 30.6    35.3    34.6    32.8
DATA > end
MTB > IPLOT C3    C2    C1
MTB > a nova c3 = c2 c1 .

Factor        Type      Levels        Values
driver        fixed          4     1 2 3 4
auto          fixed          5     1 2 3 4 5

Analysis of Variance for mileage

Source      DF        SS        MS        F          P
driver      3      41.68    13.892     7.43      0.005
auto        4      38.09     9.523     5.09      0.012
Error       12     22.44     1.870
Total       19    102.21     5.380
```

: SAS

للحصول على مخرجات SAS لجدول تحليل التباين فى جدول (٨-١١)، نستخدم بدقة نفس الأومر المستخدمة فى مثال(٨-٢) . والإختلاف الوحيد هنا هو أننا نستخدم أسماء مختلفة لتعريف القطاعات، المعالجات، متغير الإستجابة. وكما كان الحال سابقاً، تحتوى CLASS على أسماء

القطاعات والمعالجات كما هى معطاة فى عبارة INPUT (DRIVER, AUTO) وتعادل عبارة MODEL أسماء متغير الإستجابة (MILEAGE) مع أسماء القطاعات والمعالجات. وكما هو الحال فى جميع أوامر SAS ، ننهى العبارات بالشولة المنقوطة (;) . وتنتج التعليمات التالية جدول تحليل التباين الموضح فى جدول (٨-11) :

برنامج SAS

```
DATA;
INPUT DRIVER AUTO MILEAGE;
CARDS;
1 1 33.6
1 2 32.8
1 3 31.9
1 4 27.2
1 5 30.6
2 1 36.9
2 2 36.1
2 3 32.1
2 4 34.4
2 5 35.3
3 1 34.2
3 2 35.3
3 3 33.7
3 4 31.3
3 5 34.6
4 1 34.8
4 2 37.1
4 3 34.8
4 4 32.9
4 5 32.8
PROC ANOVA;
CLASS DRIVER AUTO;
MODEL MILEAGE = DRIVER AUTO;
```

وإذا كنت ترغب فى الحصول على رسم بيانى SAS مماثل لشكل (8-10) سوف نستخدم التعليمات التالية بعد إدخال البيانات :

```
PROC PLOT;
PLOT MILEAGE * AUTO = DRIVER;
```

وكما كان الحال من قبل، يتم وضع المتغير المذكور أولاً فى عبارة PLOT على المحور الرأسى Y-axis ويتم وضع المتغير الثانى على المحور الأفقى X-axis وسوف تظهر على الرسم البيانى القيم المختلفة للمتغيرات المذكورة على يمين علامة (=) .

ملحق (٨ب) : Appendix - (8B)

المقادير الجبرية الأسهل حساباً لمجموع المربعات

(٨-ب- ١) العينات المستقلة

فى معظم تطبيقات تحليل التباين ، يقوم الحاسب الآلى بإجراء الحسابات اللازمة. وفى حالة إستخدامك للآلة الحاسبة اليدوية، فإن المقادير الجبرية التالية المستخدمة فى حساب SST , SSTR – وهى المكافئة للصيغ المعطاة سابقاً – تبسط بشكل كبير جهود حساب هذه المقادير . ونظراً لأن SST = SSTR + SSE ، فإن الإجراء الأكثر شيوعاً هو حساب SST , SSTR، وبإستخدام هذه المقادير الجبرية يمكن تحديد قيمة SSE عن طريق الطرح :

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{nj} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} \qquad (8.23)$$

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{n} \qquad (8.24)$$

وقد تبدو هذه المقادير صعبة، ولكنها فى الواقع سهلة التنفيذ. لاحظ أولاً أن التعبير الرياضى (8.23) هو مكافئ للتعبير الحسابى المستخدم فى حساب SST فى الفصل الثانى*. والفرق الوحيد هو أننا نستخدم الرمز T وليس $\sum X$ لتعريف مجموع المشاهدات فى مجموعة البيانات. ويقول التعبير الرياضى (8.23) أنه لحساب مجموع المربعات الكلى، نتبع الثلاث خطوات التالية :

خطوات حساب مجموع المربعات الكلى

(1) تربيع كل مشاهدة فى البيانات المبوبة بأكملها ؛ ومن ثم إيجاد مجموع هذه المربعات $\sum \sum X_{ij}^2$

(2) اجمع كل المشاهدات فى البيانات المبوبة كلها ويتم ايجاد مربع هذا المجموع، ومن ثم قسمته على عدد المشاهدات فى البيانات المبوبة كلها T^2/n: .

(3) قم بطرح المقدار الثانى من الأول ينتج SST .

ويقول التعبير الرياضى (8.24) أنه لحساب SSTR نتبع أيضاً ثلاث خطوات، حيث الخطوتين الأخيرتين كتلك الخاصة بالمقدار SST :

خطوات حساب مجموع مربعات المعالجات

(1) تربيع مجموع المشاهدات فى كل عينة من K عينة وقسمة كل مجموع مربع على عدد المشاهدات فى العينة الخاصة به ، وتجميع كل المقادير الناتجة لكل العينات التى عددها K :
$\sum T_j^2 / n_j : K$

(2) مثلما كان الحال فى الخطوة 2 للمقدار SST : تجميع كل المشاهدات فى البيانات المبوبة وتربيع هذا المجموع، ومن ثم قسمته على العدد الكلى للمشاهدات فى البيانات المبوبة : T^2 / n

(3) مثلما كان الحال فى الخطوة 3 للمقدار SST : بطرح المقدار الثانى من الأول ينتج SSTR .

* $SST = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$

وسوف نوضح هذه الحسابات بإستخدام بيانات مثال (٨-١) ، المشتمل على الحجم المعبأ (بالأونس) المسكوب بواسطة الآلات الأربع وقد تم تقديم البيانات على جدول (٨-٤) مرة أخرى ، ونعيدها هنا مرة ثالثة للتسهيل .

الآلة			
1	2	3	4
5.24	5.20	5.19	5.17
5.22	5.20	5.20	5.18
5.22	5.21	5.18	5.19
5.23	5.22		5.19
5.23			

مجاميع المعالجات والمجموع الكلى :

$$T1 = 5.24 + 5.22 + 5.22 + 5.23 + + 5.23 = 26.14$$
$$T2 = 5.20 + 5.20 + 5.21 + 5.22 = 20.83$$
$$T3 = 5.19 + 5.20 + 5.18 = 15.57$$
$$T4 = 5.17 + 5.18 + 5.19 + 5.19 = 20.73$$
$$T = 5.24 + 5.22 + ... + 5.19 + 5.19 = 83.27$$

حجم العينة الكلى :

$$n = 5 + 4 + 3 + 4 = 16$$

مجموع المربعات :

لاحظ $\left[\frac{T^2}{n} = \frac{(83.27)^2}{16} = 433.368306\right]$

$$SSE= (5.24)^2 + (5.22)^2 + ... + (5.19)^2 - 433.368306 = 0.006394$$

$$SSTR = \left[\frac{(26.14)^2}{5} + \frac{(20.83)^2}{4} + \frac{(15.57)^2}{3} + \frac{(20.73)^2}{4}\right] - 433.368306$$
$$= .005364$$

$$SSE = SST - SSTR = .006394 - .005364 = .00103$$

درجات الحرية :

المعالجات $K-1 = 4-1 = 3$

الخطأ العشوائى $= n-k = 16-4 = 12$

الكلى $= n-1 = 16-1 = 15$

متوسط المربعات :

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{.005364}{4-1} = .001788$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-k} = \frac{.00103}{16-4} = .000086$$

قيمة F

$$F = \frac{MSRT}{MSE} = \frac{.001788}{.000086} = 20.79$$

(٨ - ب-٢) البيانات فى قطاعات :

التعبيرات الرياضية التالية لحساب SSTR , SSBL , SST المكافئة للتعبيرات الرياضية (8.10) - (8.12) على التوالى وهى أسهل بشكل كبير إذا لم تستخدم الحاسب الآلى .

$$SST = \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{b} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{bk} \qquad \textbf{(8.25)}$$

$$SSBL = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{b} T_i^2 - \frac{T^2}{bk} \qquad \textbf{(8.26)}$$

$$SSTR = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{k} T_j^2 - \frac{T^2}{bk} \qquad \textbf{(8.27)}$$

وكما رأينا سابقاً يمكن الحصول على مجموع مربعات الخطأ بعملية الطرح .

$$SSE = SST - SSBL - SSTR$$

ولوصف المقادير الجبرية المستخدمة فى الحصول على مجموع المربعات فى كلمات، لاحظ أنه يتم تحديد مجموع المربعات الكلى ومجموع المربعات المعالجات بنفس الطريقة المستخدمة فى حالة العينات المستقلة. لاحظ أيضاً أن مقدار (T^2/bk) هو مربع مجموع المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة الكلية مقسوماً على عدد المشاهدات الكلية فى البيانات المبوبة، وهذا المقدار هو الذى يتم طرحه فى كل حالة. ولحساب SSBL بإستخدام التعبير الرياضى (8.26) نتبع الثلاث خطوات التالية :

خطوات حساب مجموع مربعات القطاعات

(1) تربيع مجموع كل قطاع، جمع هذه المربعات لكل القطاعات ومن ثم قسمة هذا المجموع على K (عدد المعالجات) .

(2) مثلما كان الحال فى الخطوة 2 عند حساب SST : جمع كل المشاهدات فى بيانات العينة المبوبة الكلية وتربيع هذا المجموع ومن ثم قسمته على عدد المشاهدات الكلية فى بيانات العينة المبوبة حيث ($n= b\ k$) وهو : (T^2/bk) .

(3) وبطرح (T^2/bk) من المقدار الذى حصلنا عليه فى الخطوة (1) ينتج SSBL .

وسوف نوضح حساب مجموع المربعات بإستخدام بيانات العينة لمثال (٨-٣) ، حيث يمثل عدد مرات أعطال الآلات اليومية على مدى خمس أيام لثلاثة ورديات. وقد تم إعادة البيانات مرة أخرى لتسهيل الحساب .

	الوردية			
اليوم	A	B	C	المجموع
الاثنين	13	14	15	42
الثلاثاء	11	12	12	35
الأربعاء	11	13	12	36
الخميس	10	12	13	35
الجمعة	13	14	14	41
المجموع	58	65	66	189

لاحظ أنه يوجد K=3 معالجات (الورديات) ، ويوجد b = 5 قطاعات (الأيام) ، مجموع المشاهدات الكلية هو (T=189) . لذلك فإن :

$$\frac{T^2}{bk} = \frac{(189)^2}{(5)(3)} = 2,381.4$$

وبإستخدام التعبيرات الرياضية (8.25) ، (8.26) ، (8.27) ، نحدد مجاميع المربعات SST ، SSBL ، SSTR كالتالى :

$$SST = (13)^2 + (11)^2 + \dots\dots\dots + (13)^2 + (14)^2 - 2,381.4 = 25.6$$

$$SSBL = \frac{(42)^2 + (35)^2 + (36)^2 + (35)^2 + (41)^2}{3} - 2,381.4 = 15.6$$

$$SSTR = \frac{(58)^2 + (65)^2 + (66)^2}{5} - 2,381.4 = 7.6$$

ومن التعبير الرياضى (8.28) ، فإن مجموع مربعات الخطأ هو :

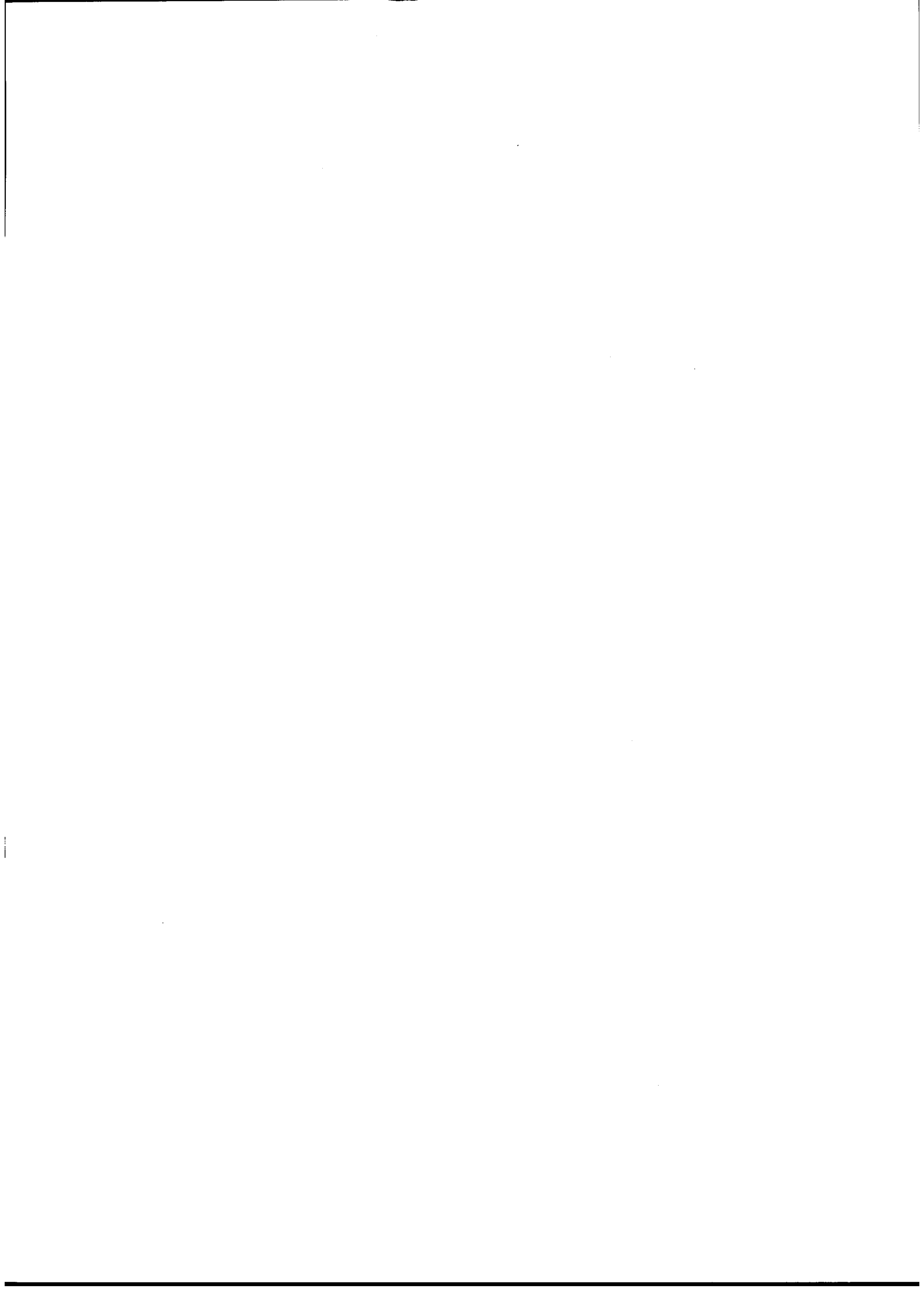
$$SSE = 25.6 - 15.6 - 7.6 = 2.4$$

الفصل التاسع

تحليل الإنحدار الخطي البسيط

SIMPLE LINEAR REGRESSION ANALYSIS

محتويات الفصل :



الفصل التاسع

تحليل الإنحدار الخطي البسيط

SIMPLE LINEAR REGRESSION ANALYSIS

(٩-١) نظرة عامة على محتويات الفصل Bridging To New Topics

سوف نتعرف – فى هذا الفصل – على طرق لدراسة العلاقة الإحصائية بين المتغيرات. ويعرف النموذج الإحصائى – كما هو معرف فى الفصل الأول – بأنه معادلة رياضية توضح كيف يرتبط متغير ما بمتغير أو بعدة متغيرات أخرى. وبناء النماذج الإحصائية تساعدنا فى تعريف العوامل المحددة لمعظم إختلاف نواتج العمليات. كما تساعدنا أيضاً على التنبؤ. فبفرض وجود نموذج إحصائى، يمكن التنبؤ بقيمة أحد المتغيرات عند معلومية قيم المتغير أو المتغيرات الأخرى.

بفرض أن مثمن عقارات يود تقدير القيمة السوقية لمنزل (القيمة السوقية هي القيمة المتوقعة لسعر بيع المنزل، إذا ما تم بيعه) فيجب أن يكون لديه معلومات عن عينة مناظرة لأسعار بيع عدة منازل لها نفس خصائص هذا المنزل. والمشكلة الإحصائية هي: بالإعتماد على بيانات هذه العينة، كيف يمكن التنبؤ بسعر البيع لهذا المنزل بالتحديد.

بفرض وجود معلومات عن أسعار البيع لمجموعة من المنازل المناظرة فإن أفضل مقدر **best predicator** هو $\overline{X}$ (الوسط الحسابى لأسعار عينة المنازل المناظرة). ويكون متوسط العينة $\overline{X}$ أفضل مقدر إذ لم تتوافر معلومات أخرى غير سعر البيع. ومن خلال تقدير العلاقة بين سعر بيع المنزل وحجمه، يمكننا تحسين دقة التنبؤ بدرجة كبيرة. وتحليل الإنحدار: هو الطريقة التى تهتم ببناء العلاقة بين متغير (سعر البيع) ومتغير أو عدة متغيرات أخرى مثل (الحجم).

وكما يوضح هذا المثال، فإن هذا المدخل فى التنبؤ يبحث فى درجة إعتماد متغير ما على متغير آخر. ويعد تحليل الإنحدار طريقة لدراسة الارتباط **association** بين متغير ما (سعر البيع) ومتغير آخر أو أكثر (مثل الحجم). فإذا كان الإهتمام بمتغير واحد فقط، سمى هذا الأسلوب «تحليل الإنحدار الخطى البسيط» **Simple Linear Regression Analysis** وهو موضوع هذا الفصل. بينما إذا كان الإهتمام بعدة متغيرات أخرى سمى هذا الأسلوب «تحليل الإنحدار المتعدد» **Multiple Linear Regression Analysis** وهو موضوع الفصل العاشر. ونموذج الإنحدار: هو معادلة رياضية تهتم بالتنبؤ بقيم متغير ما بالإعتماد على قيم متغير أو عدة متغيرات أخرى.

العمليات الحسابية في تحليل الانحدار تعتبر مجهدة بصورة واضحة عن تلك التي قابلناها في الفصول (٥-٨)، وفى الواقع فإن معظم تطبيقات الإنحدار الخطى المتعدد، يكون من الصعب استخراج نتائجها، بدون إستخدام البرامج الإحصائية مثل **Minitab** أو **SAS**. ومع ذلك فإننا سوف

نفترض أن الطالب يمكنه إستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد تحليل جيد، قبل المحاولة على الحاسب. لذلك فإن معظم الأمثلة والتمارين لهذا الفصل سوف تحتوى على مجموعات صغيرة وبسيطة من البيانات. في الفصل العاشر سوف نعتمد كلية على الحاسب الآلي. حيث أن مفاهيم الانحدار المتعدد في معظمها هي امتداد للانحدار البسيط، يكون من المهم أن نتعلم جيداً هذه المفاهيم في هذا الفصل.

(٩-٢) العلاقة بين متغيرين : نموذج خط الإنحدار البسيط :

Relationships Between Two Variables: The Simple Linear Regression Model

بفرض أننا نرغب فى التنبؤ بسعر بيع أحد المنازل آخذاً فى الإعتبار حجم هذا المنزل. وبفرض أن Y تشير إلى سعر البيع ؛ X المساحة بالقدم المربع، سنشير إلى Y على أنه المتغير التابع أو متغير الاستجابة **response variable** وإلى X على أنه المتغير المفسر/المتنبئ به (المتغير الذى بنى عليه التنبؤ) **predictor variable**.

(٩-٢-١) علاقات الأرتباط مقابل علاقات السبب والنتيجة :

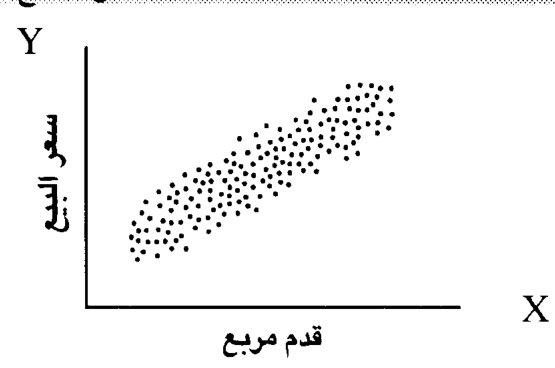
إذا كانت معلومية قيم X سوف تفيد فى التنبؤ بقيم Y، فإننا نقول انه يوجد إقتران أو إرتباط **assosciation** بين Y , X . ومن الأهمية فهم أن وجود الإرتباط بين متغيرين لا يعنى بالضرورة وجود علاقة السبب والنتيجة. والسببية تعنى أن التغير فى X يتسبب فى تغير مناظر فى Y بفرض ثبات جميع العوامل الأخرى المؤثرة على Y . وهذا ربما يكون حقيقيا للعلاقة بين حجم المنزل وسعر البيع، فزيادة حجم المنزل سوف تزيد قيمته إذا بقيت العوامل الأخرى ثابتة على ما هى عليه.

ويمكن أن يستخدم تحليل الإنحدار كنموذج إرتباط بين المتغيرات، ولكن لا يمكن أن نتأكد من أن هذه العلاقة سببية. والفكرة الأساسية هي تثبيت جميع العوامل الأخرى المؤثرة على المتغير التابع، مع تغيير المتغير المفسر.

شكل الإنتشار : Scatter Diagrams

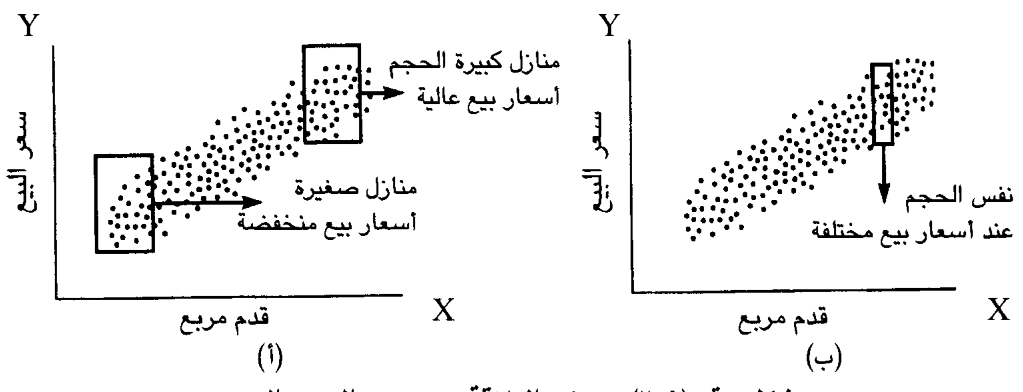
نرغب الآن في إنشاء نموذج يوضح العلاقة المصاحبة (إذا كان هناك علاقة) بين Y ، X. وسوف نبدأ بتحديد مجتمع الدراسة الذي نريد تقدير أو إستنتاج معلماته. إفترض أننا سوف نقوم بمشاهدة سعر البيع وكذلك الحجم لكل منزل في مجتمع الدراسة (في الحقيقة لانستطيع عمل هذه الدراسة نظراً لأن معظم هذه المنازل لم تباع حديثاً وبالتالي لن نستطيع معرفة سعر البيع). وبرسم البيانات المشاهدة، سوف نستطيع تكوين فكرة عن العلاقة بين Y ، X.

بفرض تسجيل السعر والحجم لكل منزل فى مجتمع المنازل المناظرة، ومن خلال الرسم البيانى للبيانات المسجلة، يمكن ملاحظة طبيعة العلاقة بين Y , X . وبفرض أن الشكل البيانى (شكل ٩-١) يوضح العلاقة بين سعر البيع Y والحجم X ، هذا الشكل يسمى بالشكل الإنتشارى. والشكل الانتشاري قدم من قبل في الفصل الثاني، كوسيلة لفحص طبيعة العلاقة بيانياً بين متغيرين.



شكل رقم (٩-١) : الشكل الانتشاري للمتغير Y مقابل X

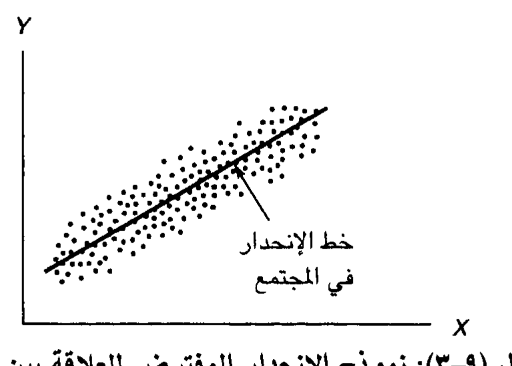
ولتوضيح شكل العلاقة التي قد تكون موجودة بين Y , X ننظر إلى (شكل ٩-٢). يلاحظ فى الجزء (أ) أن عدد كبير من المنازل (ذات قيم X الكبيرة) تميل إلى إرتفاع أسعار البيع (قيم كبيرة لقيمة Y) ، بينما يلاحظ فى الجزء (ب) أن العلاقة غير تامة لأن معظم المنازل التي لها نفس الحجم تكون عند أسعار مختلفة، ويحدث هذا لأن المنازل التى لها نفس الحجم تختلف عن بعضها البعض أخذا في الاعتبار عدة عوامل أخرى، مثل وجود مكيف، عدد الحمامات، وجود مدفأة. لذلك قد يبدو أن هناك ارتباط بين X، Y ولكنه بالتأكيد غير تام.



شكل رقم (٩-٢) : معنى العلاقة بين سعر البيع والحجم

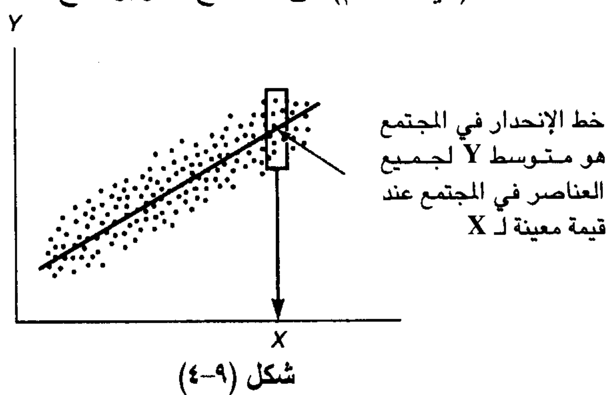
(٩-٢-٢) نموذج الإنحدار :

يبدأ تحليل الإنحدار بتعريف نموذج الإنحدار - بأنه معادلة رياضية تصف العلاقة بين Y , X فى المجتمع ، وعندما نهتم بمتغير تفسيرى واحد، فإن الشكل الإنتشارى يعتبر الخطوة المبدئية الأهم لتحديد نموذج الإنحدار المناسب. وفى إعتقادك من رؤية شكل (٩-١) ما هو شكل العلاقة بين Y , X ؟ إن هذه العلاقة تقترب من نموذج الخط المستقيم كما يوضحها شكل (٩-٣) التالى :



شكل (٩-٣): نموذج الانحدار المفترض للعلاقة بين X، Y

ويلاحظ من شكل (٩-٣) السابق أن معظم النقط لا تقع على الخط المستقيم، ويرجع ذلك لوجود متغيرات أخرى بخلاف المتغير X . لذلك فإن نموذج الإنحدار لا يمثل كل نقطة تماماً، ولكن قيم Y تميل إلى الإرتفاع مباشرة في المجتمع بإرتفاع قيم X . وعلى سبيل المثال، المنازل الكبيرة يكون لها أسعار بيع أعلى. وبالتالي فإن نموذج الإنحدار يعكس القيمة المتوسطة للمتغير Y (أى متوسط سعر البيع) عند قيمة معينة للمتغير X (أي الحجم) فى المجتمع ، ويوضح ذلك شكل (٩-٤) التالى :



شكل (٩-٤)

نموذج الانحدار: خط يصور متوسط Y عند أي قيمة معينة لـ X

ومن المهم أن نكون قادرين على التعبير عن العلاقة الانحدارية بين متغيرين Y , X فى نموذج رياضى. وعلى سبيل المثال فإن الشكل الإنتشارى السابق يوضح أن نموذج الإنحدار المناسب فى المجتمع يمكن تمثيله بخط مستقيم. ويمكن كتابة معادلة الخط المستقيم على النحو التالى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X \qquad \textbf{(9.1)}$$

حيث β_0 تشير إلى الجزء المقطوع من محور Y (قيمة Y عندما X=0)، β_1 تشير إلى ميل الخط المستقيم، وقد استخدمت الحروف اليونانية لتميز هذه الكميات لأنها تصف المجتمع، الجزء المقطوع β_0 ، الميل β_1 هى معلمات أو مؤشرات نموذج الإنحدار. وهذه القيم عادة غير معلومة ولكن يمكن تقديرها كما سنوضح فيما بعد .

ولتوضيح علاقة الخط المستقيم، دعنا نفترض معلومية معادلة الإنحدار فى المجتمع للمتغير Y (سعر البيع)، X (الحجم بالقدم المربع) هي :

$$Y = 60,000 + 30X$$

إذن الجزء المقطوع من محور Y هو ($\beta_0 = 60,000$) والميل ($\beta_1 = 30$) . ويمكن توضيح هذه المعادلة على النحو التالى :

1- المنزل الذى حجمه (X=3000) قدم مربع، يكون سعر بيعه فى المتوسط (Y = \$150,000)

2- اذا كانت (X=0) ، فإن سعر البيع فى المتوسط يكون \$60,000 . وهذا قد يمثل سعر البيع المتوسط لمنزل خالى (سيتم إيضاح ذلك فيما بعد) وهذا يحدث فقط إذا كانت البيانات تحتوى على قيمة (X = 0) .

3 - مقدار التغير فى Y عندما تتغير X من صفر إلى 3000 هو : (150,000 - 60,000 = 90,000) وهذا يؤكد أن الميل هو (90,000 / 3000 = 30)

4- بما أن الميل يساوي 30 ، فإن متوسط سعر البيع يزيد بمقدار \$30 مع إضافة قدم مربع واحد إلى مساحة المنزل .

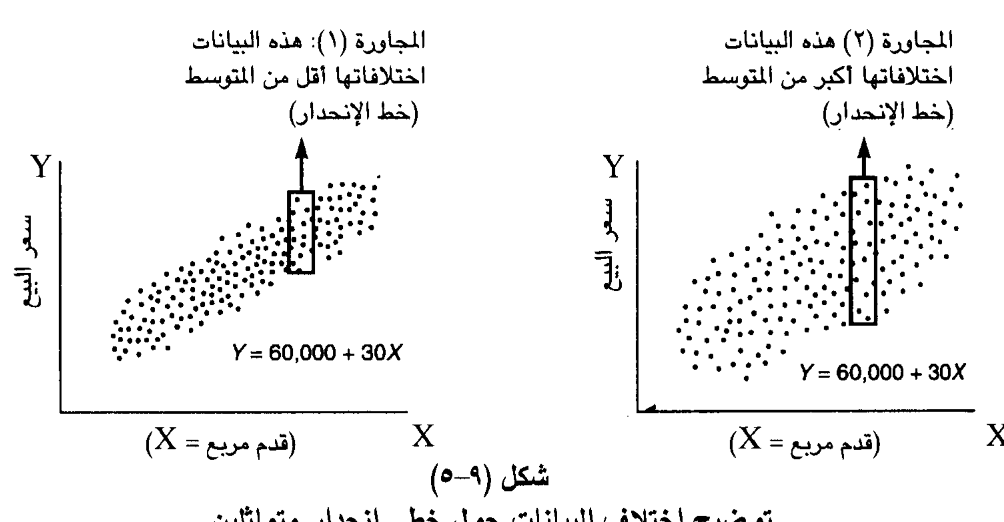
وبفرض أننا نرغب فى تقدير سعر البيع لمنزل مساحته 2800 قدم مربع . افترض أيضاً أن متوسط سعر البيع فى المجتمع لمنازل يمكن مقارنتها هو $120,000 وأن متوسط مساحة المنزل2,000 قدم مربع . اذا كان حجم المنزل ليس محلا للاهتمام ، فإن أفضل تقدير لسعر بيع أى منزل ، هو متوسط سعر البيع فى المجتمع أى $120,000 . ولكن نموذج الإنحدار يستخدم المعلومات المتاحة عن مساحة المنزل فى التنبؤ بمتوسط سعر بيعه ، وعلى هذا فإن نموذج الإنحدار يشير إلى أن متوسط سعر بيع أى منزل مساحته (X=2800) قدم هو :

(60,000 + 30 (2800) = $144000)

وهذا هو سعر البيع المتنبأ به للمنزل موضوع الاهتمام . وبدلاً من استخدام متوسط المجتمع كله كسعر تنبؤي ، فإنه يمكننا الآن استخدام المتوسط فقط لتلك المنازل محل المقارنة والتي حجمها 2800 قدم مربع . ويلاحظ أن سعر البيع المتنبأ به يفوق المتوسط لسعر البيع $120000، وذلك لأن المنزل الذي مساحته 2800 قدم مربع يكون أكبر من المتوسط 2000 قدم مربع لمجتمع المنازل المقارنة .

والحقيقة أننا لا نستطيع تحديد قيم β_1 , β_0 لأننا لا نستطيع ملاحظة المجتمع بالكامل . وإذا أمكننا سحب عينة ممثلة ، فيمكن تقدير قيم β_1 , β_0 وعندئذ يمكن إستخدام تقدير لنموذج الإنحدار واستخدامه فى التنبؤ ، وسوف نرى كيف يتم ذلك فيما بعد .

إن مجرد وجود نموذج انحدار لتوضيح العلاقة بين Y ، X لايعني بالضرورة أن النموذج مناسب لتوفيق البيانات . وبسبب هذه الحقيقة ، فإن التنبؤات الناتجة عن النموذج المستخدم يجب أن تكون قريبة نسبياً من القيم الفعلية المناظرة Y . وبعبارة أخرى انه يجب أن يكون توفيق البيانات بإستخدام نموذج الانحدار جيد . وللتوضيح ، افترض أن لدينا بيانات تمثل المنازل في مجاورتين مختلفتين ، افترض أيضا أنه قد تم استخدام معادلتى انحدار متماثلتين لهذه البيانات ، كما يتضح ذلك من شكل (٩-٥) . لاحظ انه ، علي الرغم من استخدام معادلتي انحدار متماثلتين فإن البيانات من المجاورة الأولى يتم توفيقها بخط الانحدار بطريقة أفضل من البيانات من المجاورة الثانية: وبعبارة أخرى ، فإن القيم الفردية Y تختلف قليلاً عن متوسط Y لكل قيم X . وكنتيجة لذلك فإن أخطاء التنبؤ سوف تكون أقل بالنسبة للمنازل من المجاورة الأولى عنها بالنسبة للمنازل من المجاورة الثانية . ولذلك نقول أن التوفيق أفضل في المجاورة الأولى لأن أخطاء التنبؤ تكون أقل .



شكل (٩-٥)
توضيح اختلاف البيانات حول خطى انحدار متماثلين

ونحتاج أن نكون قادرين على تقدير الدرجة التي تختلف بها البيانات عن خط الانحدار . فعند قيمة ما للمتغير X، فإن الاختلاف بين قيمة Y وخط الانحدار يسمى خطأ error، ويرمز لها بالرمز (ε) epsilon. هذا الاختلاف هو الخطأ الذي نقع فيه إذا تم استخدام خط الانحدار للتنبؤ بالقيم الفردية للمتغير Y . وحتى يمكن الاحتساب لهذه الاختلافات عن خط الانحدار، فإن نموذج انحدار خطى كامل لتوضيح العلاقة بين المتغيرات Y ، X لابد أن يحتوى على عنصر الخطأ كما يلي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \qquad (9.2)$$

الجزء المحدد: متوسط Y عند معلومية X

الجزء العشوائي: الانحراف غير المفسر من خط انحدار المجتمع

تعرف المعادلة (9.2) باسم نموذج الإنحدار الخطى البسيط، ويوضح أن قيمة Y فى المجتمع تحدد من خلال :

(1) $(\beta_0 + \beta_1 X)$ المتوسط لجميع مفردات المجتمع والتي لها نفس قيم X .

(2) ε قيمة إختلاف المتغير Y عن خط إنحدار المجتمع .

والجزء الأول $(\beta_0 + \beta_1 X)$ يسمى بالجزء المحدد لأنه يتحدد بالكامل من خلال قيمة المتغير X . وهذا الجزء المحدد يطلق عليه خط إنحدار المجتمع **population regression line**. أما عنصر الخطأ ε ، فيطلق عليه الجزء العشوائي **random Component** لأن قيمته لأي قيمة فردية في المجتمع يفترض أن تختلف بطريقة غير متوقعة لجميع مفردات المجتمع والتي لها نفس قيم X . ولهذا السبب فإنه يشار إليه كخطأ عشوائى **Random error**. وعموماً فإن الاستنتاج الاحصائي بإستخدام اسلوب الإنحدار يعتمد أساساً على فرض عشوائية الخطأ .

بالإضافة إلى ذلك فإن الخطأ العشوائى لقيم X يقاس عن طريق تباين الخطأ **error variance** والذي يرمز له بالرمز σ_ε^2. وهذا أيضا هو نفس تباين أخطاء التنبؤ والتي تصاحب مفردات المجتمع. أي أن σ_ε^2 عبارة عن تباين Y لجميع مفردات المجتمع والتي تأخذ قيمة عامة X. ويلاحظ أنه مثل قيم β_1 ، β_0 فإن σ_ε^2 عبارة عن معلمة غير معلومة والتي لابد من تقديرها بإستخدام بيانات عينة الدراسة. وكما يدلنا الشكل (٩-٥)، فإن قيمة σ_ε^2 تدل على مدى قرب توفيق بيانات العينة بإستخدام نموذج الانحدار . فإذا كانت العلاقة بين Y ، X علاقة خطية حقيقية، فإن التوفيق باستخدام التعبير (9.2) لبيانات عينة الدراسة جيد حيث يكون حجم σ_ε^2 صغير نسبيا . ولكن إذا كان توفيق البيانات ليس على درجة عالية من الجودة فإن حجم σ_ε^2 سوف يكون كبير وسيظهر الخطأ في التعبير (9.2) بأنه عنصر كبير ذو دلالة.

ان الهدف الأساسي في تحليل الإنحدار هو أن نحدد معادلة انحدار لها معنى وتوفق بيانات عينة الدراسة بحيث يكون تباين الخطأ أصغر مايكون. والجدير بالذكر أن توفيق نموذج مفترض لبيانات عينة لايعنى ببساطة أن هذا النموذج كافى sufficient لهذا التوفيق، ولكن يجب: (١) اختبار نموذج مناسب (بمعنى أنه يمكننا رسم شكل الانتشار والتأكد من أن خط الإنحدار هو المناسب). (٢) تقييم نموذج الانحدار (٣) نأخذ في الاعتبار أن اضافة متغيرات مفسرة إضافية للنموذج من شأنه تخفيض تباين الخطأ (وسوف يكون هذا هو موضوع الفصل العاشر).

مثال (٩-١)

قامت شركة كهرباء محلية بإختيار عدة منازل متشابهة مأهولة بالسكان لتستخدمها فى بناء نموذج تجريبى لإستهلاك الطاقة (كيلو وات / يوم) كدالة فى درجات حرارة العالية خلال أشهر الشتاء فى منطقة جغرافية ما. وتم الحصول على البيانات التالية خلال 18 يوم .

درجة الحرارة	-1	1.5	3.5	-3	.5	2.5	4	5	-5
الطاقة المستخدمة	94	81	79	97	88	75	74	67	107
درجة الحرارة	-.5	9	9.5	7	3	-2	6	8	11
الطاقة المستخدمة	86	58	55	65	73	91	65	58	52

(أ) حدد المتغير التابع والمتغير المفسر فى هذا التطبيق ، بناءً على هدف شركة الكهرباء فى تقديم نموذج الإنحدار ؟

(ب) إرسم البيانات ، بالإعتماد على الشكل الإنتشارى ، هل يظهر وجود علاقة بين الطاقة المستخدمة يومياً ودرجات الحرارة المرتفعة؟ هل تعتقد أن هذه العلاقة خطية؟ إذا كانت كذلك ، وضح ذلك؟

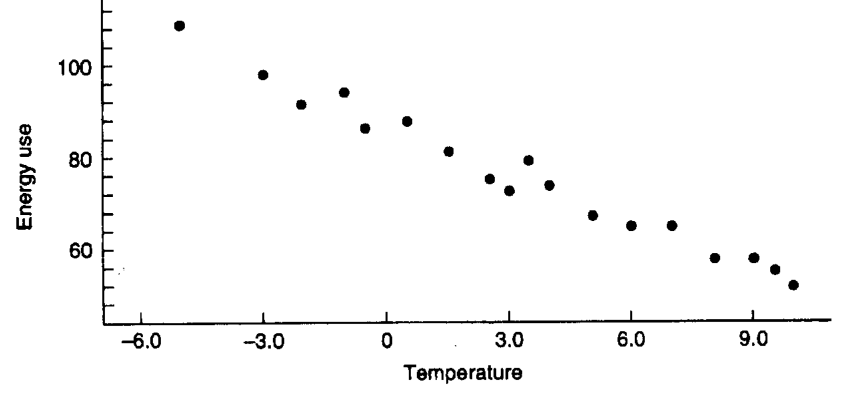
(ج) إذا كانت العلاقة التقريبية بين الطاقة ودرجات الحرارة المرتفعة تمثل خط مستقيم ، ما هى إشارة ميل هذا الخط؟ هل إجابتك تتفق مع معلوماتك عن العلاقة بين الطاقة المستخدمة ودرجات الحرارة المرتفعة ؟

الحــل :

(أ) حيث أن شركة الكهرباء تريد التنبؤ بإستهلاك الطاقة ، فإن إستهلاك الطاقة هو المتغير التابع . ويكون المتغير المفسر هو درجة الحرارة اليومية لأن شركة الكهرباء تشعر بأنه يفسر درجة الإختلاف فى الإستهلاك اليومى للطاقة .

(ب) الشكل الإنتشارى موضح فى شكل (٩-٦) . يظهر الشكل السابق التوقع الطبيعى للعلاقة بين الطاقة المستخدمة وإرتفاع درجات الحرارة. وبإرتفاع درجات الحرارة ، تنخفض الطاقة المستخدمة. وفى الواقع فإنه يمكن ملاحظة - بالعين المجردة - أن النقط تقترب من الخط المستقيم ، لذلك فإن أفضل توفيق لهذه البيانات هو الخط المستقيم ، وتظهر العلاقة أيضاً صغر حجم الخطأ العشوائى .

(ج) وبما أن إستهلاك الطاقة يتناقص - فى شكل خطى - بزيادة درجات الحرارة فى أيام الشتاء فإننا نتوقع أن يكون ميل خط الإنحدار سالب. وهذا يتمشى مع فهمنا المسبق لتأثير درجة الحرارة على الإستهلاك اليومى من الطاقة .



شكل (٩-٦)
الشكل الإنتشارى للطاقة المستخدمة مقابل درجة الحرارة

مثال (٩-٢)

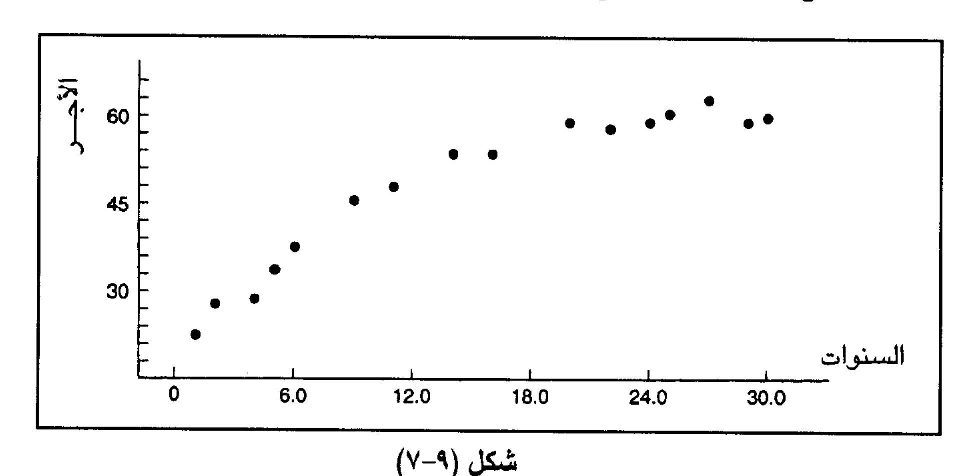
نفذت دراسة لفحص العلاقة بين عدد سنوات الخبرة والأجر السنوى لمجموعة من الأفراد فى حرفة معينة في منطقة جغرافية ما لعينة من 16 حرفى . (الأجر بألف دولار)

السنوات (X)	1	2	4	5	6	9	11	14
الأجـــر (Y)	23	27	29	34	46	46	48	54
السنوات (X)	16	20	22	24	25	27	29	30
الأجـــر (Y)	54	29	58	59	61	63	59	60

بالإعتماد على الشكل الإنتشارى ، هل يظهر علاقة بين Y , X ؟ وهل هذه العلاقة خطية؟ إشرح ؟

الحل

يوضح شكل (٩-٧) شكل الانتشار . وبناءً على ذلك الشكل ، فإنه لايوجد أى شك بأن هناك علاقة بين الأجر وسنوات الخبرة ، ولكن يوجد شك فى أن الخط المستقيم يعتبر أفضل تمثيل للبيانات . فعلى سبيل المثال ، لاحظ أنه كلما زادت سنوات الخبرة ، فإن الأجر يتزايد . ولكن معدل الزيادة في الأجر ينخفض (تكون الزيادة بطيئة) كلما زاد عدد سنوات الخبرة . وبالتالي فإن شكل الانتشار يوضح أن العلاقة تكون في شكل منحنى . أى أن استخدام الخط المستقيم لن يكون هو التمثيل المناسب في توفيق البيانات (وسوف نوضح كيفية التعامل مع المنحنى في الفصل ١٥) .



شكل (٩-٧)
الشكل الانتشاري للأجر مقابل سنوات الخبرة

مثال (٩-٣)

رغب مدير الجامعة فى دراسة العلاقة بين متوسط درجات أو نقط التخرج (GPA) والعمر لعينة من 15 طالب فى مرحلة البكالوريوس فى كلية التجارة . وكانت البيانات كالتالى :

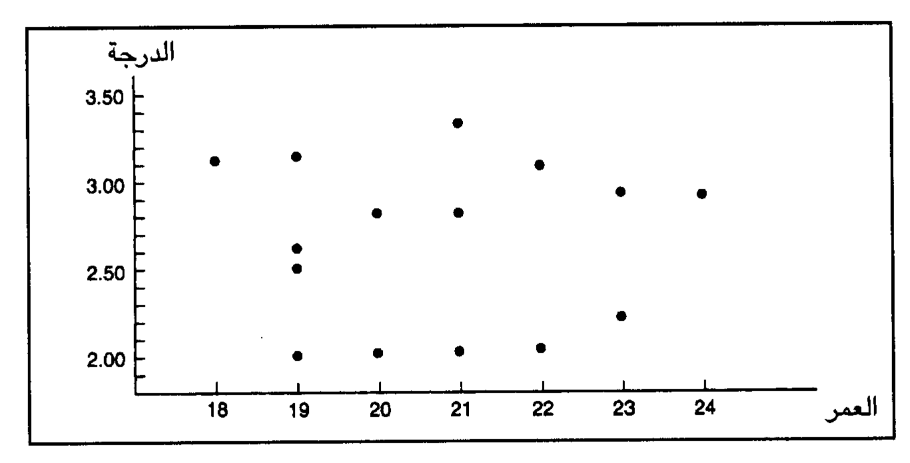
العمر (X)	20	21	19	19	20	21	18	22
متوسط الدرجات (Y)	2.13	3.38	2.07	2.63	2.85	2.16	3.15	3.12
العمر (X)	23	19	22	24	23	19	21	
متوسط الدرجات (Y)	2.97	2.52	2.17	2.95	2.25	3.17	2.85	

انشأ الشكل الإنتشارى ، ثم صف العلاقة بين متوسط الدرجات والعمر اذا كان يبدو أن هناك علاقة ؟

الحل :

يوضح شكل (٩-٨) شكل الانتشار . ومن هذا الشكل ، يتضح لنا انه لاتوجد علاقة واضحة بين متوسط التقدير (متوسط نقط الدرجات) والعمر .

أيضاً يلاحظ أن متوسط GPA للطلاب صغيرى السن يساوي تقريباً متوسط GPA للطلاب كبيرى السن . ويكون أفضل ما نستطيع عمله هنا هو أن نقوم برسم خط مستقيم بمجرد النظر بحيث يكون موازيا للمحور الأفقي (X-axis) ويتقاطع مع المحور الرأسي (Y-axis) عند 2.7 تقريباً. وحيث أن ميل أي خط مستقيم يوازي المحور الأفقي يساوي الصفر ، فإن هذا يعنى انه لاتوجد علاقة خطية بين المتغيرات Y ، X. وبالتالي فإن المعلومات عن سن الطلاب لايكون لها قيمة كبيرة عند التنبؤ بمتوسط نقطة التقدير . وأى خط مستقيم يتوازى مع المحور X فإن ميله يساوى الصفر ، ويعنى ذلك أنه لا توجد علاقة خطية بين Y , X .



شكل (٩-٨)

الشكل الانتشاري لمتوسط الدرجات مقابل العمر

(٩-٢-٣) إستخدامات نماذج الإنحدار :

تعتبر نماذج الإنحدار أداة مفيدة جداً فى ادارة العمليات التجارية . بصفة عامة يمكن إستخدام نماذج الإنحدار فى نقطتين أساسيتين: أولاً فى إظهار شكل العلاقة ، ثانياً فى التنبؤ والتقدير .

إن الهدف الأساسي لنموذج الانحدار هو تمثيل نظام معقد في شكل بسيط، ذو معنى حتى يمكنه تزويدنا بفهم أفضل بخصائص ذلك النظام. هذا الفهم يكون من بين اهتمامات المدير أو متخذ القرار، لتوضيح ذلك افترض أن خط الانحدار المقدر للمثال (٩-١) (الطاقة المستهلكة يومياً مقابل درجات الحرارة العالية). على الصورة التالية :

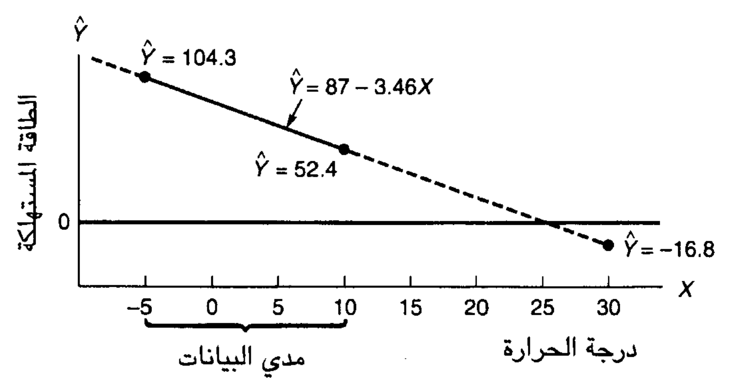
$$\hat{Y} = 87 - 3.46 X$$

حيث $\hat{Y}$ «Y - hat» قيمة Y المقدرة عند قيمة معينة للمتغير X . وتوضح المعادلة السابقة أن الطاقة اللازمة تنخفض فى المتوسط بمقدار 3.46 كيلو وات تقريباً مع إرتفاع درجة الحرارة بمقدار درجة واحدة. وهذا هو تفسير تقدير الميل. ومن المهم أن تضع في ذهنك أن الميل هو الأساس في وصف العلاقة الخطية بين متغيرين، فإذا كان X ، Y يرتبطا بعلاقة خطية، فإن الميل لايمكن أن يكون صفر. فإذا كان الميل مساوياً للصفر فإن العلاقة بين X ، Y لا يمكن أن تكون خطية .

والقواعد الإحصائية للتعليق على نموذج الإنحدار يجب أن تكون خلال الفترة التى تقع داخلها قيم المتغير X ، لأننا سنقع فى خطأ إذا كان التعليق على النموذج يتضمن قيم تقع خارج نطاق المتغير X ، إلا إذا كنا نتحدث عن القواعد النظرية. وبالرجوع إلى نموذج الطاقة المستهلكة، فيلاحظ أن مدى درجات الحرارة بين (5-)، (10)، لذلك فإن النموذج سوف يستخدم فى التنبؤ بالطاقة المستهلكة خلال هذا المدى لدرجات الحرارة . ولتوضيح ذلك ، نفترض أننا استخدمنا هذا النموذج فى التنبؤ بالطاقة المستهلكة خلال يوم صيفى عند درجة حرارة 30 ، فتنبؤ النموذج يكون :

$$(\hat{Y} = 87 - 3.46(30) = -16.8 \text{ kilowatts})$$

ومن الواضح أنها نتيجة غير منطقية، لأنه من الخبرة، يمكن القول أن الطاقة المستهلكة يومياً ستزيد مع إرتفاع درجات الحرارة صيفاً، بسبب إستخدام التكييف، وهذا ما يوضحه شكل (٩-٩).



شكل (٩-٩): العلاقة الخطية بين درجة الحرارة والطاقة المستهلكة

ما هو التفسير المناسب للجزء المقطوع من محور Y ؟ توضح معادلة الإنحدار أن متوسط الطاقة المستهلكة يومياً 87 كيلو وات عندما تكون درجة الحرارة مساوية للصفر أى X = صفر ، وهذا تفسير مناسب لتقدير قيمة β_0 . فى بعض التطبيقات قد لايكون لهذا التفسير معنى، فعندما نضع X = صفر، يجب أن تكون هذه القيمة ضمن نطاق X، فى هذه الحالة يكون التفسير له معنى. بينما إذا لم يحتوى نطاق X على القيمة صفر، فإننا نتوقع الحصول على قيمة ليس لها معنى وقد تكون خيالية. وبالرجوع إلى مثال الطاقة المستهلكة، نجد نطاق X من (5-) إلى (10) من درجات، ولأن هذا المدى يحتوى على قيمة X = صفر . فإن الجزء المقطوع من محور Y سوف يكون له معنى.

وبإختصار فإن التعليق على نموذج الإنحدار المقدر، يكون من خلال مدى قيم X فى العينة، ومن خلال هذا المدى يكون مفتاح التعليق على الميل المقدر. وهو يشرح مقدار التغير فى Y المناظر للتغير فى X .

التقدير والتنبؤ :

بعد تكوين وجهة نظر عن العلاقة، وفهمها، والاعتقاد بأن نموذج الانحدار المقدر يمثل بدقة هذه العلاقة، فإننا غالباً نريد استخدام النموذج للتنبؤ بقيم متغير الاستجابة، فإذا نظرنا إلى مثال تقييم الأصول، فإن المسعر أو المثمن يستطيع تقدير القيمة السوقية للمنزل عن طريق التعويض بحجم المنزل بين مجموعة أخرى من الاعتبارات، في معادلة الانحدار المقدرة. وفي هذا السياق فإنه يوجد طريقتين مختلفتين يمكن استخدام نموذج الإنحدار فيهما:

(أ) التقدير : يستخدم نموذج الإنحدار المقدر فى تقدير القيمة المتوسطة للمتغير Y عند قيمة معلومة لـX . بفرض أن شركة للإستثمار تود المقارنة بين القيم الفعلية لأصول قابلة للمقارنة فى منطقتين، وبالتحديد هى ترغب فى مقارنة متوسط أسعار البيع فى المدينة (أ) والمدينة (ب). يمكن أن يستخدم تحليل الإنحدار لهذا الغرض. عينات من الأصول القابلة للمقارنة من كل مدينة يجب تحديدها. وباستخدام نموذج الانحدار، حيث أن Y تشير إلى سعر البيع (10 آلاف دولار)، X القدم المربع وكانت نتائج النماذج كالآتى : (X بآلاف الأقدام المربعة)

المدينة (أ) : ($\hat{Y} = .8 + 6X$) ونطاق X من 2 إلى 3.2

المدينة (ب) : ($\hat{Y} = 1.1 + 5.2X$) ونطاق X من 2 إلى 3.2

لاحظ أن هذه النماذج مناسبة عندما يكون X من 2 إلى 3.2 ، فمثلاً المنازل التى لها مساحة قدرها 2200 قدم مربع أى ($X = 2.20$) فإن هذه النماذج تقدر متوسط أسعار البيع كالآتي :

فى المدينة (أ) : متوسط سعر البيع 140,000 دولار .

فى المدينة (ب) : متوسط سعر البيع 125,400 دولار .

(تم الحصول على هذه التقديرات بالتعويض عن X بالقيمة 2.20 فى كل معادلة) .

النقطة الهامة هنا أن شركة الاستثمار مهتمة بالقيمة المتوسطة Y عند قيمة معينة X، وليس لديها اهتمام خاص بالتنبؤ بسعر البيع لأى منزل مساحته 2200 قدم مربع.

(ب) التنبؤ : قد يستخدم نموذج انحدار مقدر للتنبؤ بقيمة Y لكل مفردة من مفردات المجتمع (مجتمع الدراسة)، بمعلومية قيمة معينة للمتغير X. وبالرجوع إلى مثال تقييم الأصول من وجهة نظر المسعر أو المثمن. وبصفة خاصة، إذا كان خط الانحدار المقدر للمدينة A هو: ($\hat{Y} = .8 + 6.0X$). لن يكون هذا النموذج كافى للمسعر ليقوم بتقدير قيمة متوسط سعر البيع: ويجب عليه أن يتنبأ بسعر البيع لكل مفردة في المجتمع. هذا التنبؤ يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة التي نقدر بها قيمة المتوسط للمتغير Y، بمعلومية قيمة X. حيث نقوم ببساطة بالتعويض بقيمة X في معادلة الانحدار. ولهذا تكون قيمة سعر البيع المتوقع أو المتنبأ به لمنزل مساحته 2200 قدم مربع ($X = 2.2$) هي 140000 ($\hat{Y} = .8 + 6.0\ (2.2) = 14$). وربما تتساءل لماذا نفرق بين تقدير المتوسطات والتنبؤ بكل قيمة من قيم Y ، إذا كان لهما نفس النتائج لنفس قيمة X. ويرجع السبب

في ذلك للدقة، فإذا أردنا استخدام النموذج، فإنه يكون من الأهمية بمكان أن نعلم ما هو حجم الخطأ في حالة التقدير وكذلك في حالة التنبؤ. وكما سنرى في الجزء (٩-٥) فإن الخطأ يكون أكبر في حالة التنبؤ بقيمة Y بوصفها عنصر من مجتمع عنها في حالة تقدير متوسط قيم Y لكل عناصر المجتمع والذي يحتوى على قيمة معينة للمتغير X.

تمارين

(٩-١) فى دراسات الإنحدار، ما هو الفرق بين المتغير التابع والمتغير المفسر (المستقل) ؟

(٩-٢) فى دراسات الإنحدار، ماذا نريد أن نحدد بالنسبة لكل من المتغير التابع والمتغير المفسر (المستقل)؟

(٩-٣) إشرح ما هو المطلوب لبناء دليل علاقة السبب والنتيجة بين المتغيرين X , Y فى تحليل الإنحدار ؟

(٩-٤) إشرح الهدف من نموذج الإنحدار ؟

(٩-٥) ما هو الأسلوب الذى يتم إستخدامه مبدئياً لتحديد نموذج الإنحدار المناسب ؟

(٩-٦) إفترض أن نموذج الإنحدار المقدر لتحديد العلاقة بين أسعار البيع ومساحة المنزل فى جزء معين فى المدينة هو عبارة عن :

$$\hat{Y} = .5 + 6.8X$$

(أ) ماذا يعنى الرقم (.5) فى هذه العلاقة ؟

(ب) ماذا يعنى الرقم (6.8) فى هذه العلاقة ؟

(ج) هل تحديد هذه المعادلة يعنى بالضرورة أنها تعبر عن العلاقة بين سعر البيع ومساحة المنزل ؟ إشرح ذلك ؟

(د) إذا كانت إجابتك فى الجزء (ج) بالنفى، ما هى المعلومات أو التحليل الاضافي الضروري لإنشاء نموذج إنحدار مناسب أو غير مناسب لوصف العلاقة بين سعر البيع ومساحة المنزل ؟

(٩-٧) إفترض أن نموذج الإنحدار المقترح لتمثيل العلاقة بين الأجور وعدد سنوات الخبرة المذكورة فى المثال (٩-٢) هو :

$$\hat{Y} = 28.9 + 1.26X$$

(أ) ماذا يعنى الرقم (28.9) فى هذه العلاقة ؟

(ب) ماذا يعنى الرقم (1.26) فى هذه العلاقة ؟

(ج) هل تحديد هذه المعادلة يعنى بالضرورة أنها تعبر عن العلاقة بين الأجر وعدد سنوات الخبرة ؟ إشرح ذلك ؟

(د) إذا كانت إجابتك فى الجزء (ج) بالنفى ما هى المعلومات المطلوبة أو التحليل المطلوب لإنشاء نموذج إنحدار مناسب أو غير مناسب لتمييز وتوضيح العلاقة بين الأجر وسنوات الخبرة ؟

(٩-٨) عرف مكوني نموذج الإنحدار البسيط ($Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$) وإشرح معناهما؟

(٩-٩) أذكر وإشرح نوعى الإستخدام لنماذج الإنحدار ؟

(٩-١٠)محلل تأمينى يريد أن يحدد إلى أي مدى يرتبط دخل الأسرة ومقدار مبلغ تأمين الحياة على رب الأسرة. فإذا كانت درجة الأرتباط قوية، فإن الدخل يكون بمثابة مؤشر جيد على مقدار مبلغ التأمين الذى تطلبه شركة التأمين. وبناءاً على بيانات مجمعة من 18 أسرة تم الحصول على البيانات التالية (تم كتابة البيانات بآلاف الدولارات) :

الدخل	45	20	40	40	47	30	25	20	15
مبلغ التأمين	70	50	60	50	90	55	55	35	40
الدخل	35	40	55	50	60	15	30	35	45
مبلغ التأمين	65	75	105	110	120	30	40	65	80

(أ) ارسم شكل الإنتشار لهذه البيانات ، هل أمكنك تحديد العلاقة بين هذين المتغيرين كما يظهر من الرسم، وإذا كان الأمر كذلك، ما هو نوع تلك العلاقة المفترضة ؟

(ب) وإذا كانت تلك العلاقة خطية، هل تعتقد أن ميل ذلك الخط يكون موجب أم سالب؟ إشرح ذلك ؟

(٩-١١) يعلم طلبة الجامعة أنه كلما زاد متوسط نقط التخرج (GPA) كلما كان هناك فرصة أكبر للحصول على عمل أفضل عند التخرج. إفترض أن البيانات التالية توضح متوسط نقط التخرج لعدد 15 خريج من تلك الجامعة وبداية رواتبهم (بآلاف الدولارات) :

متوسط نقط التخرج (GPA)	2.95	2.30	3.40	3.60	3.20	2.85	3.10	2.85
بداية المرتب	23.5	25.0	26.1	27.4	26.2	20.0	23.0	23.8
متوسط نقط التخرج (GPA)	3.05	2.70	2.75	3.10	3.15	2.95	2.75	
بداية المرتب	20.7	19.4	20.5	22.2	24.0	22.2	21.8	

(أ) ارسم شكل الإنتشار لهذه البيانات ، هل أمكنك تحديد العلاقة بين هذين المتغيرين كما يظهر فى الرسم ، وإذا كان الأمر كذلك، ما هو نوع تلك العلاقة المفترضة؟

(ب) وإذا كانت تلك العلاقة خطية، هل تعتقد أن ميل ذلك الخط يكون موجب أم سالب؟ إشرح ذلك؟

(٩-١٢) ما يلى بيانات تعبر عن الطول X والوزن Y لعينة عشوائية مكونة من 10 إناث عاملين بإحدى الشركات الكبرى :

الطول (بالبوصة)	68	67	65	68	64
الوزن (بالرطل)	119	118	129	135	123
الطول (بالبوصة)	67	66	65	64	66
الوزن (بالرطل)	140	125	132	118	130

(أ) ارسم شكل الإنتشار لهذه البيانات ، هل أمكنك تحديد العلاقة بين هذين المتغيرين كما يظهر من الرسم، وإذا كان الأمر كذلك، ما هو نوع تلك العلاقة المفترضة ؟

(ب) وإذا كانت تلك العلاقة خطية ، هل تعتقد أن ميل ذلك الخط يكون موجب أم سالب؟ إشرح ذلك ؟

(٩-١٣) كيف يتأثر إستهلاك الكحوليات بسعر بيعها ؟ توضح البيانات التالية الأسعار النسبية (بالسنت) للكحوليات لكل وحدة إستهلاك (باللتر) من الكحوليات وذلك فى الفترة من 1948 - 1967 في مدينة إونتاريو بكندا .

(أ) ارسم شكل الإنتشار لهذه البيانات ، هل أمكنك تحديد العلاقة بين هذين المتغيرين كما يظهر من الرسم ، وإذا كان الأمر كذلك ، ما هو نوع تلك العلاقة المفترضة ؟

السنة	السعر النسبي (X)	وحدة الإستهلاك (Y)	السنة	السعر النسبي (X)	وحدة الإستهلاك (Y)
1948	5.7	7.09	1958	4.3	7.96
1949	5.8	7.18	1959	4.3	7.77
1950	5.5	7.23	1960	4.3	8.14
1951	5.2	7.23	1961	4.3	8.14
1952	5.1	7.32	1962	4.1	8.23
1953	5.5	7.64	1963	4.0	8.46
1954	5.6	7.73	1964	3.9	8.74
1955	4.7	7.55	1965	3.8	8.77
1956	4.5	7.91	1966	3.9	9.18
1957	4.4	7.86	1967	3.5	8.91

(ب) وإذا كانت تلك العلاقة خطية ، هل تعتقد أن ميل ذلك الخط يكون موجب أم سالب؟ إشرح ذلك ؟

(٩-١٤) كيف يمكن التنبؤ بقيمة الضرائب التى يدفعها المواطن (دافع الضريبة) بمعرفة دخله الإجمالى؟ البيانات التالية توضح عينة عشوائية مكونة من 14 مواطن بحيث يتضح منها الدخل الإجمالى ونسبة الضرائب المدفوعة فى سنة معينة :

الدخل الإجمالي (بالآف الدولارات)	25.6	42.2	57.6	98.8	10.4	30.1	40.0
نسبة الضرائب المدفوعة	15.4	16.8	19.7	21.7	10.8	15.2	18.9
الدخل الإجمالي (بالآف الدولارات)	29.3	16.1	18.0	88.2	34.0	22.1	70.0
نسبة الضرائب المدفوعة	15.9	12.0	14.1	21.1	17.6	14.8	21.6

(أ) ارسم شكل الإنتشار لهذه البيانات ، هل أمكنك تحديد العلاقة بين هذين المتغيرين كما يظهر من الرسم ، وإذا كان الأمر كذلك ، ما هو نوع تلك العلاقة المفترضة ؟

(ب) وإذا كانت تلك العلاقة خطية ، هل تعتقد أن ميل ذلك الخط يكون موجب أم سالب؟ إشرح ذلك؟

(٩-٣) تقدير معالم نموذج الإنحدار البسيط :

Estimating The Parameters of The Simple Linear Model

لتوفيق نموذج الإنحدار المفترض ليمثل بيانات العينة، فإن أول خطوة هي تقدير معالم النموذج β_1 , β_0 لنموذج الانحدار البسيط. وكنتيجة لتقدير β_1 , β_0، نكون في موقف يتطلب تقدير تباين الخطأ σ_ε^2. ولكننا سندرس أولاً طرق الحصول على بيانات العينة.

(٩-٣-١) الحصول على بيانات العينة :

يوجد ثلاث طرق للحصول على بيانات العينة :

1 - المعاينة العشوائية البسيطة **Simple Random Sampling**: أحياناً يتم إختيار العينة العشوائية البسيطة بحيث يكون كلا من Y , X متغيرات عشوائية. غير أنه من الأفضل عند تقدير خط إنحدار المجتمع إختيار قيم X بعناية ثم تحديد قيم Y المناظرة لها تلقائياً .

2 - المعاينة العشوائية لقيم X المختارة **Random Sampling for Selected X-Values**: يتم إختيار العينة العشوائية لقيم Y بناءاً على قيم X المحددة مسبقاً. فعلى سبيل المثال، افترض أننا مهتمين بأسعار البيع Y للمنازل ذات الأحجام التى تتراوح بين 1,500 إلى 2,500 قدم مربع. فإننا يمكن أن نختار الأحجام 1,500 و 2,000 و 2,500 ثم نختار عينة عشوائية من المنازل لكل فئة، مع إهمال المنازل ذات الأحجام التى تخرج عن هذا المدى. وإختيار مدى لقيم X مرغوب جداً ليس فقط لأنه يسمح لنا بمشاهدة قيم Y داخل المدى الذي نهتم به لـ X، ولكن لأنه أيضاً يوفر فرصة لزيادة درجة الإعتماد على الإستنتاجات المتعلقة بعملية التحليل، وهذا ما سوف نناقشه فى الجزء (٩-٦) .

3 - البيانات الملائمة **Convenience Data** : في بعض الأحيان لا يكون ممكناً إجراء معاينة عشوائية؛ هنا يمكن أن نحصل على البيانات التى حدثت فعلا، أي المتاحة. ففى مثال مثمن العقارات ، نلاحظ أن البيانات المتاحة ممثلة فى المنازل التى بيعت بالفعل. وأن هذه البيانات تحددت بواسطة ملاك المنازل وليس بواسطة الإختيار العشوائى .

ولعمل تحليل انحدار، فلابد أن نفترض أن «اختيار ملاك المنازل» يمثل المجتمع بالنسبة للعلاقة بين سعر البيع وحجم المنزل. وفي بعض الحالات، يكون من الخطأ عمل هذا الافتراض. فإذا إفترضنا أن معظم المنازل في البيانات الملائمة قديمة. وبالتالي فإن النموذج الذي تم التوصل إليه من هذه البيانات لن يعكس العلاقة الحقيقية بين سعر البيع وحجم المنازل لكل المنازل في المجاورة.

وفى جميع الحالات السابقة يفترض أن قيم X مقاسة بدون أخطاء، ويكون تحليل الإنحدار مناسباً للاوضاع الثلاث. وهناك نقطتين هامتين يجب أن نفهمهما: (1) بتحديدك المسبق لمدى X ، تكون قادراً على تحسين الإستنتاج (وهذا موضح فى الجزء (٩-٦))، (2) إذا رغبت فى إستخدام البيانات الملائمة، فيجب عليك أن تقرر أولاً ما إذا كانت البيانات تمثل البيئة التى ترغب فى صنع إستنتاجات عنها بكفاية أم لا . فإذا كانت الإجابة لا ، فإن الإستنتاجات المبنية على تحليل الإنحدار يمكن أن تكون بها أخطاء بدرجة ملموسة .

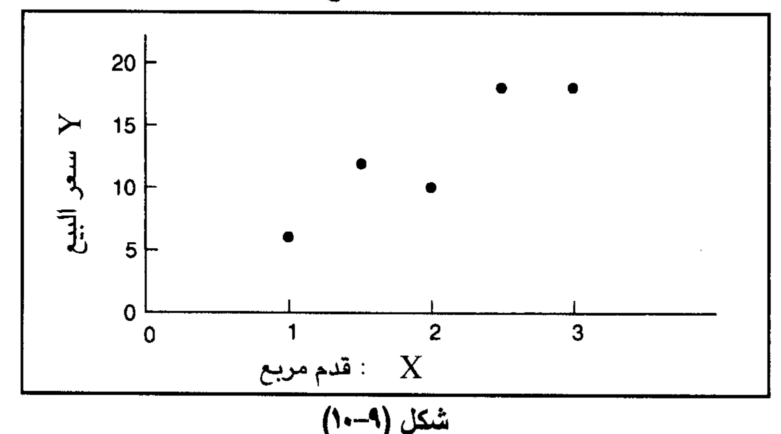
(٩-٣-٢) طريقة المربعات الصغرى :

بالعودة إلى المعادلة (9.2)، كيف يمكن تقدير β_0 , β_1 أيضاً σ_ε^2 من بيانات العينة؟ بفرض أننا حصلنا على البيانات التالية من عينة من خمس منازل وبفرض أن Y تشير إلى سعر البيع بالعشرة آلاف دولار بمعنى أن Y=10 تعنى أن سعر البيع 100,000 دولار، كما أن X تشير إلى المساحة لأقرب الف قدم مربع. البيانات هنا مقربة لرقم صحيح لتبسيط العرض.

X	Y
1	6
1.5	12
2	10
2.5	18
3	18

الوسط $\overline{X} = 2$ ؛ $\overline{Y} = 12.8$

هل تُظهر هذه البيانات وجود علاقة بين سعر البيع (Y) والحجم (X) فى المجتمع؟ عادة يستخدم الشكل الإنتشارى كأداة بسيطة لإظهار هذه العلاقة. ويلاحظ من الشكل الإنتشارى فى (٩-١٠)، أن سعر البيع يميل إلى الإرتفاع بزيادة الحجم ولكن هذه العلاقة غير تامة، فعندما إنخفضت Y من 12 إلى 10 ارتفعت X من 1.5 إلى 2 ، أيضاً ارتفعت قيمة X من 2.5 إلى 3 بينما ظلت قيمة Y ثابتة. وهذا يعنى وجود عدة عوامل أخرى تؤثر على سعر بيع المنزل بالإضافة إلى الحجم .

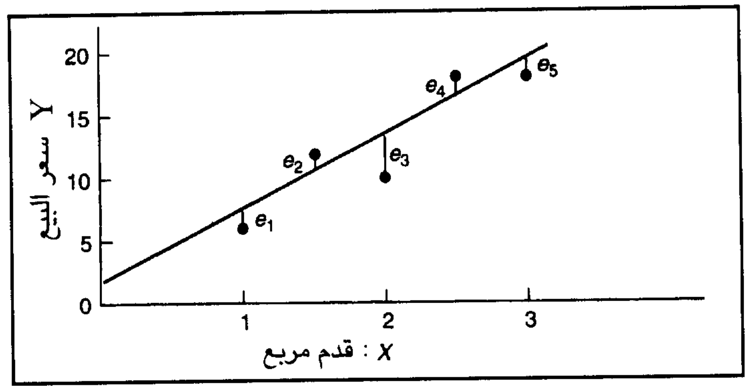


شكل (٩-١٠)

الشكل الانتشاري للبيانات السابقة

ولتقدير خط الإنحدار فى المجتمع برسم خط مستقيم يمر خلال بيانات العينة، فإن ذلك يتم بالعين المجردة وفق التقدير الشخصي. ولكن للحصول على أفضل خط، فإن اجراء معين يجب أن يستخدم. أولاً، يجب أن نحدد ماذا نقصد باللفظ «أحسن خط» «**the best line**» . يلاحظ من الشكل (٩-١٠) أننا لا يمكن أن نرسم خط مستقيم يمر بجميع النقاط الخمسة. والآن نرغب فى رسم خط واحد فقط، بحيث تكون المسافة الرأسية من النقط إلى الخط أقل ما يمكن. هذه المسافات الرأسية تمثل أخطاء العينة التي يجب أن تحدث لو أن هذا الخط استخدم لتقدير متوسط Y عند كل قيمة لـ X في العينة. أخطاء العينة هذه تسمى بالبواقي **residuals** ويرمز لها بالرمز e . البواقي في هذا المثال موضحة فى الشكل (٩-١١) .

ولأنه توجد خمسة بواقى، فيجب تلخيصها بطريقة ما، وإحدى هذه الطرق هى إختيار الخط الذي يصغر مجموع البواقي، ولكن هذه الطريقة غير عملية، لأنه يوجد أكثر من خط مجموع البواقى لكل منهم يساوى الصفر. والبعض لايلائم البيانات مطلقا. على سبيل المثال، مجموع البواقى تساوى الصفر عند الخط $Y = \overline{Y}$.



شكل (٩-١١) البواقي في مثال تقييم الأصول

وحتى إذا كانت البواقى لهذا الخط كبيرة، فإن البواقى الموجبة تلاشى البواقى السالبة والمحصلة تكون صفر. وبدلاً من ذلك، فإن الطريقة المفضلة هي تصغير مجموع مربعات البواقى، والخط الذى يجعل مجموع مربعات البواقى ($\sum e_i^2$) أقل ما يمكن يسمى بخط المربعات الصغرى أو خط الإنحدار المقدر **least squares line or the estimated regression line**. ومجموع مربعات البواقى لهذا الخط أقل من أى خط آخر. والأسلوب المستخدم فى إيجاد خط المربعات الصغرى يسمى، طريقة المربعات الصغرى **Method of Least Squares** .

ولتحديد خط المربعات الصغرى ، يجب تقدير قيم β_1 , β_0 . هذه التقديرات تشير إلى الجزء المقطوع من محوز Y ، والميل، على الترتيب، وتستخدم معادلات المربعات الصغرى فى تحديدهما.

الأحصاءات b_1 ، b_0 تعرف على أنها تقديرات المربعات الصغرى للمعالم β_1 ، β_0 على التوالي، ويتم تحديدها باستخدام علم التفاضل. وتفاصيل ذلك هى خارج نطاق عرض هذا الكتاب.

$$b_1 = \frac{SP(XY)}{SS(X)} \quad \textbf{(9.3)}$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} \quad \textbf{(9.4)}$$

حيث :

$$SP(XY) = \sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$= \sum(X_iY_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} \quad \textbf{(9.5)}$$

و :

$$SS(X) = \Sigma(X_i - \overline{X})^2 = \Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n} \quad \textbf{(9.6)}$$

وفى معظم الأحيان ، يستخدم الحاسب لتحديد تقديرات المربعات الصغرى. اذا استخدمت الآلة الحاسبة الشخصية، لاحظ أن الشق الثاني من المعادلات (9.5)، (9.6) تبسط العمليات الحسابية بشكل ملحوظ. وتكون القيم SP(XY)، SS(X) عبارة عن القيمة المبدئية والتي تستخدم لحساب المقدرات b_1 ، b_0. وسوف تظهر هذه القيم في الكثير من المعادلات التي سوف تظهر في هذا الفصل. والقيمة

SS(X)، والتي تعبر عن مجموع مربعات X، تظهر في البسط في التعبير الحسابي الذي نستخدمه لحساب تباين العينة للمتغير X. وهي ببساطة تقيس الأختلاف الكلي **total variation** للمتغير X. أما الكمية SP(XY) فهو عبارة عن كمية لم تتعرض لها حتى الآن وهى تعبر عن مجموع حاصل ضرب X، Y. وتعرف بأنها تغايرات «**Covariation**»- أي الدرجة التي تتأثر بها الاختلافات أو الانحرافات في قيم Y نتيجة الاختلاف أو الانحراف في قيم X. وبإستخدام المثال السابق، سوف نوضح حساب تقديرات المربعات الصغرى، الجزء الثابت والميل بإستخدام هذه الطريقة المتدرجة في الحساب .

X	Y	XY	X^2
1	6	6	1
1.5	12	18	2.25
2	10	20	4
2.5	18	45	6.25
3	18	54	9

$\sum X_i = 10 \qquad \sum Y_i = 64 \qquad \sum X_i Y_i = 143 \qquad \sum X_i^2 = 22.5$

$\bar{Y} = \frac{64}{5} = 12.8 \qquad , \qquad \bar{X} = \frac{10}{5} = 2$

مجموع حاصل الضرب:

$$SP(XY) = 143 - \frac{(10)(64)}{5} = 15$$

مجموع مربعات X

$$SS(X) = 22.5 - \frac{(10)}{5} = 2.5$$

بالتعويض بهذه القيم فى المعادلات (9.3) ، (9.4) يمكن إيجاد الجزء الثابت والميل (تقديرات المربعات الصغرى) .

$$b_1 = \frac{15}{2.5} = 6 \qquad , \qquad b_0 = 12.8 - 6(2) = .8$$

وعلى ذلك ، يكون خط الإنحدار المقدر (خط المربعات الصغرى) هو :

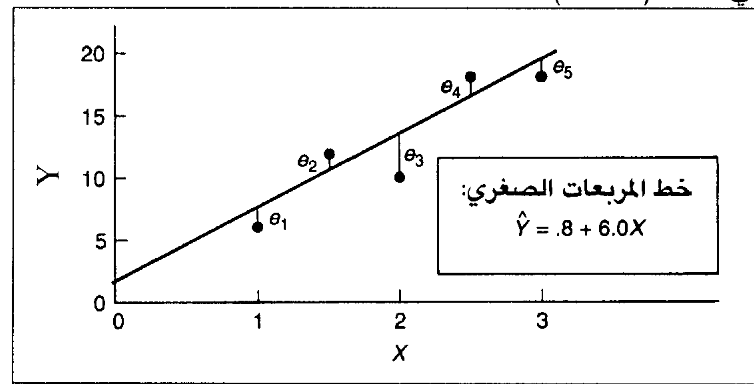
$$\hat{Y} = .8 + 6X$$

تذكر أن خط المربعات الصغرى ، يجعل مجموع مربعات البواقى أقل ما يمكن. بفرض أننا نرغب فى تحديد مجموع مربعات البواقى فى المثال السابق. مبدئياً تذكر أن البواقى عند كل نقطة فى العينة هى الفرق بين القيمة الفعلية Y والقيمة المتنبأ بها لـ Y عن طريق خط المربعات الصغري .

أى أن $e_i = Y_i - \hat{Y}$. الحسابات اللازمة لتقدير البواقي كما يلي :

X	الفعلية Y	القيمة التقديرية $\hat{Y} = .8 + 6X$	البواقي $e = Y - \hat{Y}$	مربعات البواقي $e^2 = (Y - \hat{Y})^2$
1.0	6	6.8	-.8	.64
1.5	12	9.8	2.2	4.84
2.0	10	12.8	-2.8	7.84
2.0	18	15.8	2.2	4.84
3.0	18	18.8	-.8	.64
			$\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$	$\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \Sigma e_i^2 = 18.8$

ومجموع مربعات البواقى (إختصاراً SSE) الناتجة من خط المربعات الصغرى $\hat{Y}= .8 + 6X$ هى ($SSE = 18.8$) ومجموع مربعات البواقى ستكون أكبر لأى خط آخر لهذه البيانات. لاحظ أيضاً أن مجموع البواقى يساوى صفر، وهذا يعنى أن النقط أدني خط المربعات الصغرى تعادل النقط التي تقع أعلى خط المربعات الصغرى من حيث طول الأبعاد الرأسية. خط المربعات الصغرى والبواقي موضحة في شكل (٩-١٢).



شكل (٩-١٢) خط المربعات الصغرى والبواقي

(٩-٣-٣) تقدير تباين الخطأ σ_ε^2

لقد تعلمنا كيفية تقدير β_1 , β_0؛ الميل والجزء الثابت على الترتيب في خط إنحدار المجتمع. وتحتاج أيضاً إلى معرفة كيف يتم تقدير تباين الخطأ σ_ε^2. والذي يصف درجة اقتراب توفيق خط الانحدار للبيانات، ولاداء ذلك نقدم المقدر S_e^2 للمعلمة σ_ε^2 بأسلوب مماثل عندما قدمنا تقدير تباين المجتمع في الفصل الثاني.

وبفرض أن W_1 , W_2 .... W_n على الترتيب هى مشاهدات عينة عشوائية. (استخدمنا الرمز W بدلا من X أو Y منعا للتداخل أو الارتباك). فإن صيغة التباين تكون :

$$S^2 = \frac{\sum(W_i - \overline{W})^2}{n-1}$$

حيث البسط هو مجموع مربعات الانحرافات بين قيم W ووسطها من العينة $\overline{W}$ ولأن المقام (n-1) فإن S^2 تصبح تقدير غير متحيز للمقدار σ^2 . ولأننا استخدمنا $\overline{W}$ كتقدير لمتوسط المجتمع غير المعلوم، فإنه تم طرح واحد من حجم العينة فى المقام لكى تصبح S^2 تقدير غير متحيز، واذا كان لدينا معلمتين غير معلومتين، عندئذ نطرح 2 من حجم العينة n فى المقام، وهكذا.

الصيغة S_e^2 مثل الصيغة S^2 . تذكر أن خط الإنحدار فى المجتمع غير معلوم. ومعنى ذلك أن S_e^2 يقيس الإختلافات فى مشاهدات العينة (قيم Y) عن خط الإنحدار المقدر (قيم $\hat{Y}$) . وهذه الإختلافات تمثل البواقى $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ وطبقاً لذلك فإن بسط S_e^2 هو مجموع المربعات البواقى $SSE = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$. وماذا عن المقام ؟ لتحديد قيم $\hat{Y}$ فإننا قدرنا معلمتين β_1 , β_0 ، ولكى نجعل S_e^2 تقدير غير متحيز للمعلمة σ_ε^2 ، يجب أن نطرح 2 من حجم العينة n وعلى ذلك فإن المقام يصبح (n-2) ويمكن تعريف S_e^2 كالآتى:

$$S_e^2 = \frac{SSE}{n-2} \qquad \textbf{(9.7)}$$

where: $$SSE = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad \textbf{(9.8)}$$

هي مجموع مربعات البواقي (خطأ العينة). وبالتالي، يصبح تقدير خطأ الإنحراف المعيارى σ_ε على الصورة:

$$S_e = \sqrt{S_e^2} \qquad (9.9)$$

ومن الأهمية بمكان فهم ماذا يقيس S_e^2 . S_e^2 تقيس إلى أى مدى يكون خط المربعات الصغرى ملائم لقيم Y فى العينة. فإذا كان الخط ملائماً تماماً، فإن كل البواقي يجب أن تساوى صفر وبالتالي تصبح S_e^2 تساوى صفر. كبر البواقي يعني كبر S_e^2 وإنخفاض درجة الملائمة، ويسمى الإحصاء S_e^2 بتباين البواقى أو متوسط مربعات الخطأ **residual variance or mean square for error (MSE)** وكذلك يسمى الإحصاء S_e الإنحراف المعيارى للبواقى أو الجذر التربيعى لمتوسط مربع الخطأ **residual standard deviation** أو **root mean square for error (RMSE)**.

ويمكن حساب S_e^2 ، S_e من المثال السابق كالتالى : بما أن SSE = 18.8

فإن :

$$S_e^2 = \frac{18.8}{5-2} = 6.2667$$

$$, \quad S_e = \sqrt{6.2267} = 2.5033$$

(٩-٣-٤) معامل التحديد : تجزئة الإختلاف الكلى :

الهدف الأساسى من تحليل الإنحدار هو إيجاد نموذج يلائم البيانات ويتسق نظرياً، بقدر الامكان مع المعلومات غير الإحصائية. ولكى نتأكد من أن نموذج الخط المستقيم يلائم البيانات، يجب أن نناقش تباين البواقى S_e^2 أو MSE كمقياس لدرجة الملائمة. وبشكل موضوعى فإن أفضل توفيق يجعل S_e^2 أقل ما يمكن يأتى بإضافة متغيرات تفسيرية أخرى كما سنرى ذلك في الفصل العاشر. ولأن قيمة S_e^2 تعتمد على كيفية قياس قيم Y فى العينة، لذلك فإننا لا يمكن أن نعلق على قيمة S_e^2 إلا إذا أخذنا فى الإعتبار كيفية قياس قيم Y . لذلك فإننا سوف نتحدث عن مقياس آخر لا يأخذ فى الإعتبار كيفية قياس قيم Y فى العينة، ألا وهو معامل التحديد ويرمز له بالرمز r^2 .

ولتعريف r^2 ، يمكن أن نستفيد من أسلوب تحليل التباين الذي قدم في الفصل الثامن. ففى تحليل التباين، كانت الفكرة الأساسية هى تقسيم مجموع الإختلافات فى العينة(SST) إلى قسمين :

1- الإختلافات بسبب الفروق بين متوسطات المعالجات (SSTR) .

2 - الإختلافات بسبب العوامل العشوائية (SSE) .

حيث : SST = SSTR + SSE

هذا الأسلوب يمكن تطبيقه فى تحليل الإنحدار بنفس الصورة. لاحظ، أنه إذا كانت Y فى المجتمع تأخذ قيم ثابتة، فإنه يمكن التنبؤ بها بدقة تامة، لكن تحدث مشكلة فى التنبؤ عندما تختلف قيم Y داخل المجتمع .

بفرض أنه تم تحديد خط إنحدار المربعات الصغرى من بيانات عينة، السؤال الآن هو: لماذا تختلف قيم Y فى العينة ؟ يرجع ذلك لسببين محتملين :

1 - بسبب العلاقة الإنحدارية مع X . نحن نعلم أن المتغير Y مرتبط مع المتغير X، وقيم X فى العينة متغيرة. إذن مع كل تغير فى قيم X تتغير قيم Y ، فمثلاً أسعار المنازل الكبيرة تميل إلى الإرتفاع أكثر من المنازل الأقل مساحة، فى ظل ثبات باقى العوامل .

2- بسبب العوامل العشوائية، هناك عوامل أخرى تؤثر فى قيم Y أيضاً. ويفترض أنها تتغير عشوائياً، فمثلاً قد يباع منزلين لهما نفس المساحة بأسعار مختلفة، لإختلاف الموقع، وعدد المطابخ وعوامل أخرى .

الآن، كيف نقيس هذين النوعين من الاختلافات؟ في الفصل الثاني، قدمنا طريقة تحديد الاختلاف الكلي لأي متغير، ثم وضحت بعمق في الفصل الثامن، واستخدمت من قبل في هذا الفصل عند حساب الاختلافات الكلية في قيم X [الصيغة (9.6)]. وعلى ذلك، فإن الاختلاف الكلي في قيم Y في العينة يمكن تحديده بالصيغة (9.10):

$$SS(Y) = \sum(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i^2)}{n} \qquad \textbf{(9.10)}$$

لاحظ أن هذا التعبير يناظر SST في تحليل التباين فى الفصل الثامن وسوف نستخدم الرمز SST للإشارة إلى هذا الإختلاف . إذن SST , SS (Y) متساويان ويشيران إلى نفس الكمية . والإختلاف الراجع إلى العوامل العشوائية هو ببساطة الإختلاف غير المفسر فى قيم Y من خط المربعات الصغرى، وهو مجموع مربعات البواقى ونشير إليه بالرمز SSE . والفرق بين الاختلاف الكلي SST والاختلاف غير المفسر SSE بنموذج الإنحدار، يسمى مجموع مربعات الإنحدار **regression sum of squares** ويرمز إليه بالرمز SSR ، وعليه : SSR = SST - SSE ، لذلك فإن مجموع مربعات الإنحدار تشير إلى الإختلافات فى قيم Y في العينة والتى يمكن تفسيرها فى ضوء اختلافات قيم X في العينة. ويمكن تقسيم الإختلافات الكلية مثلما ظهرت فى الفصل الثامن كالآتى :

$$SST \quad = \quad SSR \quad + \quad SSE$$

مجموع المربعات الكلى = مجموع مربعات الإنحدار + مجموع مربعات الخطأ

ويمكن حساب مجموع المربعات الكلى لقيم Y فى المثال السابق كالآتى :

$$SST = SS(Y) = (6^2 + 12^2 + \dots\dots\dots \; 18^2) - \frac{(6+12+\dots\dots+18)^2}{5} = 108.8$$

وسبق أن حددنا مجموع مربعات البواقى ، (SSE = 18.8) ، إذن يمكن إيجاد مجموع مربعات الإنحدار .

$$SSR = SST - SSE = 108.8 - 18.8 = 90$$

ودرجة ملائمة معادلة الإنحدار المقدرة تتحدد بمقارنة مجموع مربعات الإنحدار SSR بمجموع المربعات الكلى SST . ومعامل التحديد (r^2) **The Coefficient of determination** هو نسبة مجموع مربعات الإنحدار إلى مجموع المربعات الكلى ويعطى بالعلاقة التالية :

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} \qquad \textbf{(9.11)}$$

ومن المثال السابق ، توفر لدينا: (SSR = 90) , (SSE = 18.8) , (SST = 108.8) بالتالي يكون معامل التحديد:

$$\therefore \; r^2 = \frac{90}{108.8} = \frac{108.8 - 18.8}{108.8} = .8272$$

معنى معامل التحديد (r^2) :

معامل التحديد ما هو إلا وصف إحصائي يوضح نسبة التغير الكلى فى قيم Y فى العينة والتى يمكن تفسيرها فى ضوء علاقة خط الإنحدار مع التغير فى X وهذا منطقيا لأنه كلما زادت الاختلافات بين قيم Y، كلما صعبت عملية التنبؤ. وعموماً فإنه إلى الحد الذي نستطيع شرح الأختلاف الأساسي أو المبدئي في قيم Y عن طريق معادلة الانحدار، نكون قادرين على التنبؤ بقيمة Y. ومعامل التحديد هو إحصاء محرر من وحدات القياس يأخذ أى قيمة داخل المدى (صفر ، 1). فإذا كان (r^2) قريب من الصفر، معنى ذلك أن معادلة خط الإنحدار المقدرة تفسر القليل من الاختلافات في قيم Y. وإذا كان (r^2) قريب من الواحد الصحيح دل ذلك على أن معادلة خط الإنحدار المقدرة يمكنها تفسير جزء كبير من إجمالى الإختلاف فى المتغير Y . وكلما زادت قيمة r^2، كلما كانت معادلة خط الانحدار المقدرة أكثر ملائمة وأكثر فاعلية في التنبؤ بـ Y. وحيث أن r^2 مقياس محرر، فغالبا ما يساء تفسيره. يجب أن تعلم أن r^2 لا تعنى قياس. ولا تقيس (r^2) مدى صحة نموذج الإنحدار المقدر، بمعنى قيمة r^2 لايمكن أن تشير إلى أن معادلة إنحدار Y على X في المجتمع، هي علاقة خط مستقيم تام، أي أنه يقيس فقط كيف أن الأختلافات الكلية في قيم Y في العينة، يمكن تفسيرها بمعادلة الانحدار المقدر (خط المربعات الصغري). وقد يكون من الشائع أن تكتشف أن معامل التحديد عند استخدام خط المربعات الصغرى كبير (إفترض أن $r^2 = 90$) ورغم هذا قد نجد أن نموذج آخر يكون أكثر صلاحية لتوفيق البيانات.

تفسير آخر لمعامل التحديد (r^2) :

فى الجزء (٩-١) ، وضحنا أن تحليل الإنحدار يقدم الوسائل التى من خلالها يمكن إدخال المعلومات الإضافية (المتغير X) إلى التحليل . ويمكن أيضاً رؤية معامل التحديد على أنه مؤشر إحصائي وصفى **descriptive statistic** يوضح كيفية أن إدخال المتغير X يساعد كثيراً فى التنبؤ بـ Y. هذه الفكرة مباشرة ومبنية على أساس التفكير التالى :

1 - نقيس أولاً خطأ التنبؤ الكلى **the total prediction error** الذى سوف يحدث ، إذا لم يتم أخذ X فى الإعتبار، فإن أفضل تنبؤ لقيم Y سوف يكون ببساطة متوسط العينة $\overline{Y}$. فى هذه الحالة نقيس خطأ التنبؤ الكلى على أنه مجموع مربعات الإنحرافات بين قيم Y الفعلية ، $\overline{Y}$ أى تكون : $\sum(Y_i - \overline{Y})^2$. لاحظ أن هذه الكمية هي SST

2 - نقيس بعد ذلك خطأ التنبؤ الكلى الذى يحدث عندما تستخدم X للتنبؤ (أى إستخدام خط إنحدار المربعات الصغرى) . وهذا يعني مجموع مربعات الإنحرافات بين قيم Y وتنبؤات الإنحدار لها أى $\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ وهذا يعطي مجموع مربعات البواقي، ويرمز لها بالرمز SSE .

3 - الإنخفاض فى خطأ التنبؤ الكلى كنتيجة لإستخدام X هو : (SSR = SST - SSE) ، أي الفرق بين خطأ التنبؤ الكلى بدون إستخدام X ، (SST) وخطأ التنبؤ الكلى عندما يتم إستخدام X ، (SSE) .

4 - معامل التحديد ($r^2 = SSR / SST$) ، يمكن رؤيته على أنه ذلك الجزء من خطأ التنبؤ الكلى الذى يتم التخلص منه عن طريق إستخدام X .

وفى مثال تثمين العقارات ، وجدنا أن ($r^2 = .8272$) . هذا يعنى أن 82.72 % من الإختلافات فى قيم Y فى العينة، تم تفسيرها عن طريق العلاقة الخطية المقدرة مع X . وبمعنى آخر، يمكننا القول أن

إستخدام خط المربعات الصغرى للتنبؤ يؤدى إلى تخفيض 82.72 % من خطأ التنبؤ الكلى والذى كان سيحدث إذا تم إستخدام متوسط العينة فقط للتنبؤ .

مثال (٩-٤)

يرغب مدير مطعم عش البلبل Bird's Nest فى الحصول على نموذج يوضح إلى أى مدى يكون إيراد الفترة المسائية مرتبط بعدد «العملاء أو الزبائن Covers» أى عدد الأشخاص الذى يطلبون وجبة. البيانات التالية لست فترات مسائية حديثة (الإيرادات معبر عنها بمئات الدولارات) :

الفترة المسائية	عدد الوافدين (العملاء)	الإيراد
1	15	5
2	20	8
3	50	12
4	30	10
5	25	9
6	40	13

(a) حدد خط إنحدار المربعات الصغرى للتنبؤ بدخل الفترة المسائية بمعلومية عدد الوافدين ، وفسر تقديرات الميل slope والجزء المقطوع intercept .

(b) إلى أى مدى لقيم X تكون تفسيراتك فى جزء (a) صحيحة؟ لماذا تكون محدودة في هذا المدى؟

(c) كون شكل الإنتشار وارسم عليه خط المربعات الصغرى . هل يبدو أن النموذج الخطى مناسب ؟

(d) قدر تباين الخطأ وإحسب معامل التحديد . إستخدم هذه المعلومات لوصف مدى ملائمة نموذج المربعات الصغرى .

الحل

(a) المتغير التابع هنا هو Y ويمثل دخل الفترة المسائية. المتغير المفسر هو X ، ويمثل عدد الوافدين للفترة المسائية. نستخدم Minitanb لتحديد الكميات التالية :

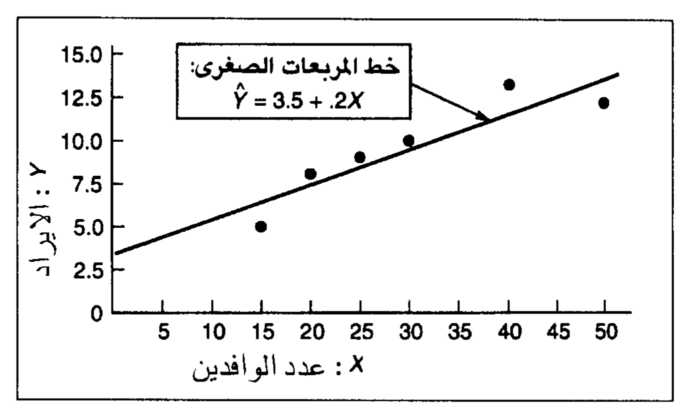
$$b_0 = 3.5 \; ; \; b_1 = .2 \; ; \; SST = 41.5 \; ; \; SSR = 34.0 \; ; \; SSE = 7.5 \; ; \; SS(X) = 850$$

حيث أن تقديرات المربعات الصغرى هى $(b_0 = 3.5)$ ، $(b_1 = .2)$ ، فإن خط المربعات الصغرى يكون:

$$\hat{Y} = 3.5 + .2X \qquad \text{for } X \text{ in } (15,50)$$

تقدير الميل هو $b_1 = .2$ ؛ هذا يعنى أن لكل وافد إضافى ، متوسط الإيراد المقدر يزيد بمقدار 0.2 (أو $20) . وحيث أن البيانات الممثلة لا تشتمل على معلومات عندما تكون (X=0) ، فإن تفسير تقدير الجزء المقطوع $(b_0 = 3.5)$ يكون غير ذى معنى. فى الواقع ، نعلم أنه لن يكون هناك أى إيراد من الوجبات إذا كانت $X = 0$ أى اذا كان لا يوجد أى عميل .

(b) كما أشرنا فى إجابة جزء (a) ، تفسير النموذج يكون صحيح إحصائياً فقط للأيام التى يكون فيها عدد الوافدين بين 15 , 50 . وحيث انه لا يوجد لدينا بيانات خارج هذا المدى؛ لذلك، لا تستطيع أن نستنتج إحصائياً أن نفس العلاقة الخطية السابقة تكون مناسبة عندما يكون عدد الوافدين أقل من 15 أو يزيد عن 50 .



شكل (٩-١٣)
شكل الإنتشار وخط المربعات الصغرى للإيراد Y مقابل عدد الوافدين X

(c) شكل الإنتشار وخط المربعات الصغرى معطى فى شكل (٩-١٣) ، بناء على هذا الشكل، التوفيق الخطى **linear fit** يبدو معقول . ومع ذلك يكون من الصعب قول هذا بثقة عندما يكون حجم العينة صغير جداً .

(d) حيث أن (SSE = 7.5) , (n=6) يكون تباين البواقى :

$$S_e^2 = \frac{SSR}{n-2} = \frac{7.5}{4} = 1.875$$

والإنحراف المعيارى للبواقى يكون :

$$S_e = \sqrt{1.875} = 1.3693$$

ويكون معامل التحديد للعينة عند معلومية: (SST = 41.5) , (SSR = 34.0) :

$$r^2 = \frac{34}{41.5} = .8193$$

التفسير المناسب لذلك هو ، أن 81.93% من الاختلافات اليومية في إيرادات العينة، تفسر عن طريق الإختلافات اليومية فى عدد الوافدين. بناء على ذلك ، يمكننا القول أن (1-.8193 = .1807) أو 18.07% من الاختلافات اليومية فى عينة الإيرادات لا تفسر عن طريق الإختلاف اليومى فى الوافدين ولكن يمكن إعتبارها خطأ عشوائى. وإذا اعتقدت الإدارة أن التوفيق مناسب، يمكن زيادة حجم العينة، أو يمكن إدخال متغيرات تنبؤية أي تفسيرية **Predictor Variables** إضافية فى محاولة لحساب بعض الإختلاف غير المفسر هذا .

تمارين

(٩-١٥) إعتبر بيانات العينة التالية :

X	2	6	8	10	15
Y	50	35	30	44	20

(a) كون شكل الإنتشار .

(b) ارسم خط مستقيم على شكل الإنتشار السابق، بحيث يكون أفضل تمثيل للعلاقة الخطية بين X , Y من وجهة نظرك .

(c) عين البواقى الخمسة (الإنحرافات عن قيم Y فى العينة من الخط الذي تم رسمه في (كا) على شكل الإنتشار .

(d) حدد قيم البواقى الخمسة عن طريق قياسهم بالمسطرة .

(e) احسب مجموع مربعات البواقى من جزء (d) .

(٩-١٦) بإستخدام بيانات التمرين (٩-١٥) أجب على ما يلى :

(a) حدد خط المربعات الصغرى وفسر تقديرات الميل والجزء المقطوع .

(b) ارسم خط إنحدار المربعات الصغرى من جزء (a) على أن يوقع فى شكل الإنتشار السابق .

(c) عين البواقى الخمسة على شكل الإنتشار .

(d) حدد قيم البواقى الخمسة عن طريق طرح قيم Y التى تم التنبؤ بها من معادلة المربعات الصغرى من القيم الفعلية المناظرة .

(e) حدد مجموع مربعات البواقى من جزء (d) . قارن هذا المجموع بمجموع مربعات البواقى الذى حصلت عليه فى جزء (e) تمرين (٩-١٥) . أيهما أقل ؟ على أى شئ يدل هذا بخصوص درجة التوفيق النسبي relative fits للخطين ؟

(٩-١٧) بإستخدام بيانات التمرين (٩-١٦) :

(a) احسب تباين البواقى S_e^2 وفسر معناه .

(b) احسب SSR , SSE , SST . وضح أى جانب للبيانات يوصف عن طريق كل من هذه الكميات .

(c) احسب معامل التحديد r^2 وفسر معناه .

(٩-١٨) إفترض أنك حصلت على الحسابات التالية فى توفيق خط مستقيم لعينة من البيانات:

$$n = 15 \;;\; \Sigma Y_i = 1{,}133 \;;\; \Sigma X_i = 23 \;;\; SP(XY) = -1{,}535.286 \;;$$
$$SS(X) = 863.7333 \;;\; \Sigma Y_i^2 = 89.091 \;;\; SSE = 782.8288$$

(a) حدد خط المربعات الصغرى وفسر نتيجة تقديرات الميل والجزء المقطوع لخط أنحدار المجتمع .

(b) احسب تباين الباقى S_e^2 وفسر معناه .

(c) احسب معامل التحديد r^2 وفسر معناه .

(٩-١٩) إفترض أن نتائج تحليل الإنحدار فى الحسابات التالية :

$$n = 31 \;;\; \Sigma Y_i = 4{,}212 \;;\; \Sigma X_i = 2{,}856 \;;\; \Sigma X_i Y_i = 391{,}442.01 \;;$$
$$\Sigma Y_i^2 = 582{,}904.36 \;;\; \Sigma X_i^2 = 264.770 \;;\; SSE = 3{,}630.1392$$

أجب على نفس أسئلة تمرين (٩-١٨) .

(٩-٢٠) اعتبر بيانات العينة التالية :

X	1	2	3	4	5	6
Y	2	4	4	6	9	10

(a) كون شكل إنتشار لهذه البيانات . هل تبدو العلاقة الخطية مقبولة ؟

(b) افترض أن التوفيق الخطى مناسباً، حدد خط المربعات الصغرى وفسر ميله والجزء المقطوع ؟

(c) احسب تباين الباقى S_e^2 ومعامل التحديد r^2 وفسر معنى كل منهم ؟

(٩-٢١) إعتبر بيانات العينة التالية :

X	2	2	4
Y	4	6	11

(a) كون شكل إنتشار لهذه البيانات .

(b) مفترضاً أن العلاقة الخطية مناسبة، حدد خط المربعات الصغرى .

(c) ارسم خط المربعات الصغرى وكل من الخطوط الأخرى التالية على شكل الإنتشار من جزء (a) : $(\hat{Y}= 1 + 2X)$, $(\hat{Y} = 7)$. أى هذه الخطوط يعد الأفضل في تمثيل قيم عينة Y ؟ لماذا ؟

(d) لكل خط فى جزء (c) ، حدد البواقى .

(e) لكل خط فى جزء (c) ، احسب مجموع البواقى . بماذا تدل نتائجك بخصوص فائدة مجموع البواقى كمؤشر لدرجة توفيق الخط ؟

(f) لكل خط فى جزء (c) احسب مجموع مربعات البواقى . لأى خط يكون SSE الأصغر ؟

(٩-٢٢) اعتبر بيانات العينة التالية :

X	3	5	5	7	9	9
Y	6	2	1	-1	-4	-8

(a) كون شكل إنتشار لهذه البيانات . هل العلاقة الخطية تبدو مقبولة ؟ .

(b) إفترض أن التوفيق الخطى مناسب، حدد خط المربعات الصغرى وفسر ميله والجزء المقطوع .

(c) احسب تباين البواقى S_e^2 ومعامل التحديد r^2 وفسر معناهم .

(٩-٢٣) بالاشارة إلى تمرين (٩-١٢).

(a) إفترض أن العلاقة الخطية مناسبة، حدد خط المربعات الصغرى وفسر التقديرات الناتجة للميل والجزء المقطوع لخط إنحدار المجتمع .

(b) احسب تباين الباقى S_e^2 ومعامل التحديد r^2 وفسر نتائجك .

(٩-٢٤) بالاشارة إلى التمارين (٩-١٥) ، (٩-٢٠) ، (٩-٢٢) ، (٩-٢٣) :

(a) قارن تباينات البواقى لخط إنحدار المربعات الصغرى الذى حددته فى هذه التمارين. بناء على هذه المقارنة فقط ، هل يمكنك تحديد أى خط ، يعتبر أكثر ملائمة لبيانات العينة؟

(b) بناء على معامل التحديد الذى حسبته فى هذه التمارين ، هل يمكنك تحديد الخط الذى يوفق أفضل قيم العينة Y ؟ أى خط مربعات صغرى يقدم أسوأ توفيق ؟ وضح إجابتك .

(c) هل إجابتك لجزء (b) تتفق مع تفسيراتك لشكل الإنتشار لهذه التمرينات ؟ وضح .

(٩-٢٥) بالاشارة إلى تمرين (٩-١٤) . افترض أن النموذج الخطى مناسباً وأن خط المربعات الصغرى تم تحديده ليكون $\hat{Y} = 12.0 + .116X$.

(a) فسر تقديرات الميل والجزء المقطوع لهذه المشكلة .

(b) حدد البواقى واستخدمها لتحديد تباين البواقى .

(c) احسب معامل التحديد r^2 . فسر المعنى لنتيجتك .

(d) بناء على إجابتك لجزء (c) فقط ، هل يمكنك إستنتاج أن خط المربعات الصغرى مناسب (ملائم) للتقدير والتنبؤ؟ وضح .

(٩-٤) الإستنتاجات الإحصائية المتعلقة بنموذج الإنحدار الخطى البسيط :

Statistical Inferences For The Simple Linear Regression Model

ناقشنا فيما سبق تباين البواقى S_e^2 ومعامل التحديد r^2 كمقاييس لمدى توفيق معادلة الإنحدار المقدرة (خط المربعات الصغرى) لقيم Y للعينة الممثلة. وناقشنا أيضاً الإستخدامات المتنوعة لنموذج الإنحدار. ومع ذلك ، وقبل إستخدام هذا النموذج ، من المهم التأكد إذا كان النموذج ملائم للإستخدام المطلوب. وتقييم أداء النموذج يتضمن مناقشة القضايا التالية :

(1) هل بيانات العينة تدل على وجود فعلي لإرتباط خطى بين X ، Y فى المجتمع؟ من الممكن أن لا يكون هناك إرتباط على الإطلاق أو أن الإرتباط غير خطى. إذا كان ذلك ، فإن العلاقة المقترحة عن طريق خط المربعات الصغرى يمكن ببساطة أن تكون نتيجة لتغيرات المعاينة العشوائية **random sampling variability** . شكل الإنتشار يقدم فكرة أولية لهذا السؤال. ميل المجتمع β_1 هو المعلمة الرئيسية **key parmeter** هنا . إذا كانت β_1 = صفر ، لا يكون هناك إرتباط خطى بين Y ، X لذلك ، إذا كان دليل العينة لا يساند وجود علاقة خطية بين Y ، X فى المجتمع ، سوف يكون من الحماقة بناء قرارات جادة على خط المربعات الصغرى .

(2) ما مدى دقة التقديرات أو التنبؤات المبنية على خط المربعات الصغرى؟ إذا كنت ترغب فى إتخاذ قرارات بناء على هذه التقديرات أو التنبؤات . يكون من المهم فهم كيف يمكن أن تبتعد عن ذلك.

(3) هل الشروط ضرورية لتحليل الإنحدار المقدم فى هذا التطبيق؟ كما سترى الآن ، فإن استدلالات الإنحدار (لكى تحقق أول قضيتين) تكون مبنية على فروض معينة عن المجتمع. إذا كانت هذه الفروض غير صحيحة ، فإنه ربما تنتج بعض النتائج المضللة أو حتى السخيفة.

(4) هل من الممكن أن يمتد نموذج الإنحدار المفترض لكى يتضمن المتغيرات التنبؤية (التفسيرية) المحتملة الأخرى؟ على سبيل المثال ، فى مشكلة تثمين العقارات ، هل من الممكن أن تكون

متغيرات أخرى مثل عدد الحمامات bathrooms ، وجود مدفأة، أو عمر المنزل، يكون لها تأثير ذو معنى فى سعر البيع للمنزل؟ هذا بالطبع محتمل جداً ؛ وهذا الفرض سيتم تناوله بالتفصيل فى فصل (١٠) .

(٩-٤-١) فروض النموذج Model Assumptions

تكون الإجراءات المتضمنة فى إستنتاجات الإنحدار صحيحة فقط إذا وجدت شروط معينة للمجتمع . حيث أننا لا نستطيع ملاحظة المجتمع كله ، فإننا يجب أن نكون مستعدين لإفتراض وجود هذه الشروط . وفيما بعد نقدم طرقاً لفحص مصداقية هذه الشروط . وتكون إستنتاجات الإنحدار مبنية على أساس الفروض الأربعة التالية وهى تتعلق بالإرتباط بين Y ، X فى المجتمع . وهى تتركز على وجه الخصوص على النموذج الخطى البسيط المعطى بالمعادلة (9.2) :

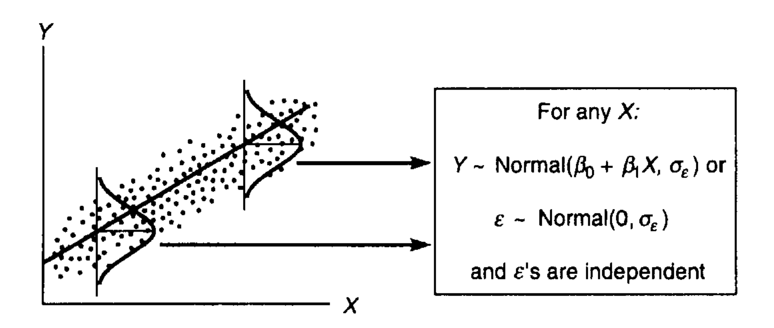
(1) النموذج الخطى البسيط يمثل بشكل صحيح الإرتباط بين متغير الإستجابة response والمتغير المفسر predictor وهذا يعنى أن لكل قيم X التى تقع داخل مدى بيانات العينة، قيمة متوسطة لمتغير الاستجابة Y تعطى عن طريق خط إنحدار المجتمع عند هذه القيمة للمتغير X . بتعبير آخر ، فإنه لأى قيمة X ، يكون هناك مجتمع لقيم Y حيث أن ($E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$)ومتوسط الخطأ العشوائي يساوى صفر .

(2) تباين الخطأ σ_ε^2 يكون ثابت **The error variance σ_ε^2 is constant** ، تباين ثابت للخطأ يعنى أن إختلاف قيم Y حول خط إنحدار المجتمع هو نفسه الإختلاف لكل قيم X داخل مدى بيانات العينة. وإذا كان إختلاف قيم Y حول معادلة الإنحدار تعتمد على قيم X ، فإن σ_ε^2 تكون غير ثابتة لكل قيم X . هذا يستلزم إستخدام إجراء بديل للإنحدار معروف على أنه المربعات الصغرى المرجحة **weighted least squares** وهى خارج نطاق عرض هذا الكتاب .

(3) الأخطاء العشوائية مستقلة **The random errors are independent**. هذا الفرض ينطوى على أن الخطأ المصاحب لأى قيمتين من قيم Y يكون مستقل. على سبيل المثال، بمعلومية قيمة واحدة لـ Y تكون أعلى أو أسفل خط إنحدار المجتمع لا يخبرنا بشئ عن ما إذا كانت قيمَة أخرى أعلى أو أسفل خط الإنحدار .

(4) الخطأ العشوائى يتبع توزيع طبيعي **The random errors are normally distributed**. هذا الفرض ينطوى على أن قيم Y توزع طبيعياً حول خط إنحدار المجتمع. ولذلك فإننا نفترض أن ε هو متغير عشوائي طبيعى بمتوسط 0 وإنحراف معيارى σ_ε ، لذلك لأى قيمة X، تكون Y متغير عشوائى طبيعى بمتوسط $(\beta_0 + \beta_1 X)$ وإنحراف معيارى σ_ε.

هذه الفروض يمكن تلخيصها بمصطلحات إحصائية عن طريق قول أن توزيع قيم Y ؛ بمعلومية X يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط قدره $(\beta_0 + \beta_1 X)$ وتباين قدره σ_ε^2 أي أن $Y \sim Normal\ (\beta_0 + \beta_1 X,\ \sigma_e)$ ويكون التعبير المكافئ أن توزيع الخطأ يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط 0 وتباين σ_ε^2 أى أن $\varepsilon \sim Normal\ (0,\ \sigma_e)$ ، حيث أن الإنحراف المعيارى للخطأ σ_ε يكون ثابتاً على المدى الكلى لقيم العينة X . هذه الفروض موضحة فى شكل (٩-١٤) .



شكل (٩-١٤) فروض نموذج الإنحدار

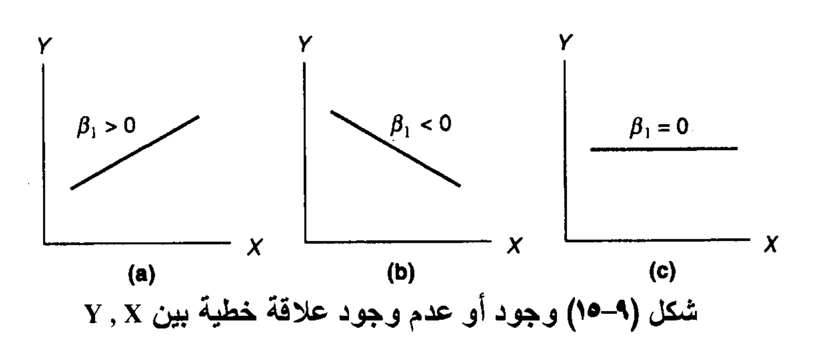
فحص فروض الإنحدار Checking the Regression Assumptions

إن الفروض الثلاثة الأولى السابقة أكثر أهمية من الفرض الرابع (الأخير) . وإستنتاجات الإنحدار تكون لدرجة معقولة غير حساسة لمخالفة فرض الاعتدالية (**normality**) . وعلى الجانب الآخر، لا يكون هناك تحليل إنحدار كامل بدون التأكد من صحة الفروض الثلاث الأولى. ولكى يتم هذا ، نفحص بمجرد النظر **visually** رسم البواقى المصاحبة لخط المربعات الصغرى. ويكون هدفنا هو إكتشاف نموذج بين البواقى قد يوحى بمخالفة ممكنة لفرض ما . حيث أن البواقى تمثل الأخطاء العشوائية، فيجب أن لا تظهر نموذج يمكن تمييزه .

قبل أن نبدأ مع إستنتاجات الإنحدار، هناك إعتبار واحد متبقى فى أى تحليل إنحدار والذى لا يمكن التأكيد عليه بشدة. وهو يتعلق بطبيعة بيانات العينة. البيانات المستخدمة فى تقدير معادلة الإنحدار يجب أن تكون ممثلة، بمعنى أن تكون بيانات مقطعية (**Cross - Section**) لبيئة ما نرغب فى دراستها وإذا لم تكن كذلك، فإن معادلة المربعات الصغرى لن تمثل البيئة المهتم بها، وهكذا يمكن أن تعطى نتائج مضللة للغاية .

(٩-٤-٢) المتوسط والخطأ المعيارى للتقديرات b_1 , b_0 :

تعتبر مقدرات المربعات الصغرى b_0 , b_1 أفضل الاحصاءات المتعلقة بتقدير ميل المجتمع β_1 والجزء المقطوع β_0، على الترتيب . وإذا كانت β_1 تساوى صفر، فإنه لا يوجد ارتباط خطى بين X , Y فى المجتمع . بتعبير آخر فإن العلاقة الخطية بين X , Y تتواجد للمجتمع فقط إذا كانت β_1 لا تساوى صفر . شكل (٩-١٥) يوضح خط إنحدار المجتمع $(E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X)$ ووجود إرتباط خطى في الأجزاء (a) , (b) بينما يوضح الجزء (c) عدم وجود علاقة خطية بين X , Y، والإستنتاجات التى تتعلق بالميل β_1 تكون أكثر أهمية إلى حد بعيد عن الإستنتاجات عن الجزء المقطوع β_0 .



شكل (٩-١٥) وجود أو عدم وجود علاقة خطية بين Y , X

ربما تتذكر من الفصل الخامس وحتى الفصل الثامن أن بداية الإستنتاج الإحصائي هى تحديد توزيع المعاينة لأفضل إحصاء **the best statistic** . حيث أن b_1 هى أفضل إحصاء لإثبات تواجد علاقة خطية، يجب أن نحدد توزيع المعاينة لها. وربما يكون هناك صعوبة فى البداية بإعتبار أن b_1 متغير عشوائى. هذا بالطبع ولأن b_1 إحصاء لعينة؛ فإن b_0 تكون كذلك، وتعتمد قيمهم الفعلية فى أى تطبيق على العينة الممثلة المحددة التى يتم اختيارها.

نحدد أولاً المتوسط والخطأ المعيارى لـ b_1؛ ثم نحدد توزيع المعاينة لها. لقد تم ايضاح أن المتوسط والخطأ المعيارى لـ b_1 يكون كما يلى :

$$E(b_1) = \beta_1 \qquad \textbf{(9.12)}$$

$$SE(b_1) = \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{SS(X)}} \qquad \textbf{(9.13)}$$

حيث أن SS (X) هى مجموع المربعات الكلى للمتغير X كما تم تعريفه فى معادلة (9.6). بإسترجاع أن خطأ التباين غير المعروف σ_ε^2 يجب أن يقدر عن طريق تباين البواقى S_e^2 . بذلك يكون الخطأ المعيارى المقدر لـ b_1 يكون :

$$SE(b_1) = \sqrt{\frac{S_e^2}{SS(X)}} \qquad \textbf{(9.14)}$$

وقد تم ايضاح أيضاً أن المتوسط والخطأ المعيارى المقدر لـ b_0 على الصورة التالية :

$$E(b_0) = \beta_0 \qquad \textbf{(9.15)}$$

$$SE(b_0) = \sqrt{\frac{S_e^2 \sum X_i^2}{nSS(X)}} \qquad \textbf{(9.16)}$$

على التوالى. لذلك فإن إحصاء المربعات الصغرى b_1 يكون مقدر غير متحيز لميل المجتمع β_1، وكذلك يكون الإحصاء b_0 للجزء المقطوع β_0.

ولتوضيح حساب $SE(b_1)$، $SE(b_0)$، بإسترجاع مثال (٩-٤) (مشكلة مطعم عش البلبل Bird's Nest). فى هذا المثال، حددنا أن: $(b_1 = .2)$ ، $(b_0=3.5)$ ، $(SS(X) = 850)$ ، $(S_e^2= 1.875)$ ، $(n = 6)$. بإستخدام قيم X ، يمكننا أيضاً تحديد أن $(\sum X_i^2= 6,250)$. بالتعويض فى المعادلات (14.9) ، (16.9) نجد أن الخطأ المعيارى المقدر لـb_1 يكون :

$$SE(b_1) = \sqrt{\frac{1.875}{850}} = .047$$

والخطأ المعيارى المقدر لـ b_0 يكون :

$$SE(b_0) = \sqrt{\frac{(1.875)(6,250)}{(6)(850)}} = 1.5158$$

والآن ، توقف دقيقة لتجيب عن سؤال طالما قمت بالإجابة عنه عدة مرات من قبل : بمعلومية أن $(b_1 = .2)$ ، $(SE(b_1) = .047)$ ، هل تجد أنه يكون مقبول الإدعاء بأن ميل المجتمع β_1 يساوى صفر؟ إذا إستخدمنا فكرة فترة الثقة، سوف نجد أن أكثر من أربع أخطاء معيارية أصغر من $(b_1 = .2)$ المقدرة ويوجد القيمة 0 من بينهم. حيث أن $(\beta_1 = 0)$ تبدو غير مقبولة، فإن هذا التحليل يدل على أن الإرتباط الخطى بين X , Y يوجد بالفعل. وسوف نعود لهذا النوع من التفكير بعد تحديد توزيع المعاينة للمقدر b_1 .

(٩-٤-٣) توزيع المعاينة للمقدر b_1 : The Sampling Distribution of b_1

إذا كانت الفروض الأساسية عن المجتمع صحيحة، فإنه يمكن توضيح أن توزيع المعاينة لإحصاء المربعات الصغرى b_1 هو توزيع طبيعى بمتوسط وخطأ معيارى كما هو معطى عن طريق معادلة (9.12) ، (9.13) على التوالى . الآن ، لماذا يتوزع المقدر b_1 طبيعياً؟ من الممكن توضيح أن معادلة (9.3) للاحصاء b_1 هى توليفة خطية لمتغيرات عشوائية طبيعية (قيم العينة Y)* . نتيجة لذلك ، b_1 نفسها تتوزع طبيعياً . (انظر الفصل (٥-٥-٢) لمراجعة توزيع التوليفة الخطية لمتغيرات عشوائية طبيعية)

حيث أن b_1 تتوزع طبيعياً، يمكننا بسهولة جعلها معيارية وتحويلها إلى الإحصاء Z إذا كنا نعلم تباين الخطأ σ_ε^2. ويمكننا بعد ذلك إستخدام التوزيع الطبيعى المعيارى لعمل إستدلات عن الميل β_1. لكن طالما أن تباين الخطأ σ_ε^2 غير معروف ، يجب أن نبدل σ_ε^2 فى معادلة (9.13) بتباين البواقى S_e^2 . كما تتوقع فإن جعل b_1 معيارية فى هذه الطريقة يؤدى إلى الإحصاء T التالية :

$$T = \frac{b_1 - \beta_1}{SE(b_1)} \qquad \textbf{(9.17)}$$

التى لها توزيع T بدرجات حرية (n-2) ، لأن مقام المعادلة لتباين البواقى S_e^2 هو (n-2)، لذلك فإن الإستنتاج الإحصائى المتعلق بالميل β_1 يكون مبنى على أساس إحصاء المربعات الصغرى b_1 ، ويتضمن توزيع T بدرجات حرية (n-2) .

(٩-٤-٤) فترات الثقة وإختبار الفروض لـ β_1 :

Confidence Intervals and Hypothesis Testing For β_1:

إستخدام توزيع T لعمل إستنتاجات إحصائية يجب أن يكون شيء مألوفاً لديك من الآن. بالنسبة إلى الإستنتاجات عن الميل β_1 ، فإن الاجراءات تبقى كما هى في جوهرها. (يمكنك مراجعة الفصول (٥-٥-٤)، (٦-٤-٣) في هذا الشأن)

فترات الثقة لـ β_1 :

طالما أن أساس فهم الإرتباط بين X , Y هو الميل β_1 لخط إنحدار المجتمع، يكون من الضرورى أن نفهم الدقة التى تم بها تقدير β_1 . كما هو الحال دائماً فى التقدير، نصف دقة المقدر عن طريق حساب هامش خطأ المعاينة له وفترة الثقة الناتجة. وبناء على مناقشة فترات الثقة فى جزء(٦-٤-٣)، فأن فترة ثقة %(α -1) 100 للميل β_1 تعطى عن طريق :

$$b_1 \pm t_{1-\alpha/2,\ n-2}\ SE(b_1) \qquad \textbf{(9.18)}$$

حيث :

$$\text{Margin of sampling error (هامش خطأ المعاينة)} = t_{1-\alpha/2,\ n-2}\ SE(b_1) \qquad \textbf{(9.18)}$$

($t_{1-\alpha/2,\ n-2}$)هى القيمة الجدولية المناسبة لتوزيع T (انظر جدول C فى الملحق فى نهاية هذا الكتاب) .

---

* تذكر أن قيم X يمكن اختيارها. لذلك تم إعتبارها على أنها ثابتة بدلاً من اعتبارها كميات عشوائية طالما أنه تم قياسها بدون خطأ .

للتوضيح ، دعنا نحدد ثقة 95% للميل β_1 فى مشكلة مطعم عش البلبل (مثال ٩-٤) . حددنا من قبل أن $(b_1 = .2)$, $(SE(b_1) = .047)$, $(n=6)$. لمستوى ثقة 95% ودرجات حرية $(n - 2 = 4)$ ، نجد أن القيمة الجدولية هى : $(t_{.975,4} = 2.776)$. هكذا تكون فترة ثقة 95% للمعلمه β_1 هى :

$$.2 \pm (2.776)(.047) = .2 \pm .13$$

أو (.33 , .07) . كما فى الحالات السابقة ، يمكننا إعتبار مجموعة قيم مقبولة لـ β_1 ضمن الفترة (.33 , .07) وتكون القيم خارج هذه الفترة غير مقبولة. على وجه الخصوص ، لاحظ أن القيمة $(\beta_1 = 0)$ لا تكون واقعة فى تلك الفترة . وهذا يعنى أن الإدعاء بأنه لا يوجد إرتباط خطى بين X , Y فى المجتمع غير مقبول ومن الممكن أن يرفض .

على الرغم من أن فترة الثقة 95% لـ β_1 تدل على وجود إرتباط خطى بين X , Y ، الا ان هذه الفترة تدل على أن β_1 لم يتم تقديرها بدقة كبيرة ، على سبيل المثال ، الفترة (.33 , .07) لقيم β_1 تعنى أنه إذا زاد عدد الوافدين X بواحد فى اليوم فإن متوسط الإيراد Y ربما يزيد بمقدار قليل مثل7$ إذا كانت $(\beta_1 = .07)$ أو بمقدار كبير 33$ إذا كانت $(\beta_1 = .33)$. هذا النقص فى دقة تقدير β_1 لايكون مفاجئاً إذا اعتبرنا أن العينة مكونة من بيانات لست فترات مسائية جديدة (n=6) . (تعمدنا إستخدام عينة صغيرة لتسهيل التمثيل ، لكن عدم ملائمة مثل هذه العينة الصغيرة لمعظم التطبيقات الفعلية سوف يظهر الآن) .

إختبار الفروض لـ β_1 :

فى مشكلة مطعم عش البلبل ، إفترض أننا نرغب إختبار فرض العدم **null hypothesis** بعدم وجود إرتباط خطى بين الإيراد (Y) وعدد الوافدين (X) مقابل الفرض البديل أنه يوجد إرتباط خطى. فيما يتعلق بالنموذج الخطى البسيط ، معادلة (9.2)، فإن هذه الفروض من الممكن أن تصاغ كالآتى:

$$H_0: \quad \beta_1 = 0 \qquad \textbf{(9.20)}$$
$$H_a: \quad \beta_1 \neq 0$$

كما فعلنا سابقاً، فترات الثقة يمكن إستخدامها لتحديد ما إذا كان دليل العينة يخالف إدعاء H_0 بعدم وجود إرتباط خطى بين X , Y . إذا كان الصفر لا يدخل ضمن الفترة بمستوى ثقة عالى ، فإن دليل العينة يخالف إدعاء عدم وجود إرتباط خطى بين X , Y ويساند وجود إرتباط خطى (الفرض البديل) . حيث أن فترة ثقة 95% وهى: (.33 , .07) لمشكلة المطعم لا تتضمن صفر ، فإن دليل العينة يخالف الفرض العدمى H_0 ويساند وجود علاقة خطية بين الإيراد وعدد العملاء. لاحظ أنه عن طريق النظر لشكل الإنتشار فى شكل (٩-١٣) ، سوف نصل لنفس الإستنتاج .

يمكن الوصول لنفس النتيجة عن طريق إستخدام مدخل القيمة P-value P. القيمة P تظهر إلى أى مدى يخالف دليل العينة الفرض بعدم وجود إرتباط خطى بين X , Y . كما سبق ، كلما صغرت القيمة P ، كلما ضعف دليل قبول H_0 ، وهكذا يصبح الفرض البديل أكثر قوة .

إفترض أن ادعاء الفرض العدمى صحيح (أي $\beta_1 = 0$) ، نجد أن قيمة الاحصاء T (معادلة {9.17}) لمشكلة مطعم عش البلبل Bird's Nest هى :

$$T = \frac{.2 - 0}{.047} = 4.26$$

بالنسبة للفرض البديل ذو الجانبين ، القيمة P هى إحتمال أن الاحصاء T مع أربع درجات حرية سوف يعطى قيمة سواء أكانت أكبر من 4.26 أو أقل من 4.26-. والكمبيوتر يشير إلى أن هذا الإحتمال هو {013. = (0065.) 2} . وإذا لم يكن لدينا مدخل إلى الكمبيوتر ، يمكننا تقريب القيمة P عن طريق إستخدام جدول C فى الملحق. نفحص الصف الخاص بأربعة درجات حرية ونستخرج القيم 3.747 , 4.604 التى تحصر (T = 4.26)، نجد أن المنطقة إلى اليمين من 4.604 هى (005. = 995.-1)، والمنطقة إلى اليمين من 3.747 هى (01. = 099.-1) هكذا، المنطقة إلى اليمين من T = 4.26 تكون بين 005. , 01. وحيث أن الفرض البديل ذو جانبين ، فإن القيمة P المطلوبة تكون بين (01. = (005.)2) , (02. = (01.)2) . القيمة P التى تكون أقل من 02. تعتبر غالباً صغيرة جداً لكى تساند إدعاء Ho بعدم وجود إرتباط خطى. لذلك، من الممكن أن نستنتج أن هناك فعلاً إرتباط خطى بين الإيراد وعدد الوافدين للمجتمع . (لكن ضع فى ذهنك ما يتعلق بعدم الدقة فى تقدير الميل β_1 يكون أساسه أن العينة الصغيرة) .

(٩-٤-٥) إستخدام أسلوب تحليل التباين فى الإنحدار الخطى البسيط :

An Analysis of Variance Approach in Simple Linear Regression

فى تعريف معامل التحديد r^2 فى الجزء (٩-٣-٤)، أخذنا فكرة عن تحليل التباين عن طريق تقسيم الإختلاف الكلى (SST) فى قيم العينة Y إلى مركبتين: مجموع مربعات الإنحدار (SSR)، الذى يحسب الإختلاف فى قيم Y بالعينة التى يمكن تفسيرها عن طريق الإختلاف فى قيم X بالعينة ، ومجموع مربعات الخطأ (SSE) ، الذى يحسب الإختلاف فى قيم Y والتي لايمكن تفسيرها عن طريق الإختلاف فى قيم X – أى ، الإختلاف الذى يرجع إلى أسباب عشوائية .

كبديل لإجراء T فى الجزء السابق ، يمكننا إستخدام تحليل التباين لإختبار الفرض العدمى .

$$H_0: \ \beta_1 = 0$$

مقابل الفرض البديل ذو الطرفين :

$$H_a: \ \beta_1 \neq 0$$

وإجراء تحليل التباين معادل لإجراء الاحصاء T إذا كان الفرض البديل ذو طرفين. هذا يعنى أن قيم P دائماً تكون متماثلة في الحالتين ولذلك فإن الإستنتاج يكون دائماً هو نفس القرار. ومع ذلك ، فإن إجراء تحليل التباين يقدم فكرة عن المصادر الممكنة للإختلاف والتى تكون بشكل خاص مفيدة إذا أخذ في الاعتبار نماذج معقدة (كما تم مناقشته فى فصل 10) . إضافة إلى ذلك، مخرجات معظم الحزم الإحصائية للكمبيوتر تشتمل على معلومات وثيقة الصلة لكل من المؤشر الإحصائي T وإجراء تحليل التباين. إذا درست كلا الإجرائيين، عملياً فإن كل هذه المخرجات سوف تكون مفيدة لك ، وسوف تكون مهياً بشكل أفضل لدراسة تطور أكثر النماذج تعقيداً

وبإسترجاع تحليل التباين ، فإن كل مجموع مربعات مرتبط بعدد معين من درجات الحرية. كما فى فصل (8)، فمجموع المربعات الكلى SST له (n-1) درجات حرية. عدد درجات الحرية لمجموع مربعات الباقى SSE هو (n-2) ، حيث أن هناك معلمتان يتم تقديرهما (β_0 , β_1) فى معادلة SSE . ولأن درجات الحرية لمجموع المربعات الكلى تحسب عن طريق جمع درجات الحرية لمجموع مربعات الإنحدار ودرجات الحرية لمجموع مربعات البواقى .

(df for SST = df for SSR + df for SSE)

هذا يترك درجة حرية واحدة لمجموع SSR. ويكون صحيح دائماً أن درجات حرية SSR مماثلة لعدد الحدود فى نموذج الإنحدار المفترض الذى يتضمن متغيرات تفسيرية. وحيث يوجد واحد فقط لمثل هذا الحد للنموذج الخطى البسيط (هذا الحد هو $\beta_1 X$) تكون هناك درجة حرية واحدة لمجموع مربعات الإنحدار SSR .

والآن نتذكر ثانية من الفصل الثامن أن متوسط المربعات يعرف على أنه مجموع المربعات مقسوما على درجات الحرية لهذا المجموع . وبالتالى فإن متوسط مربعات الانحدار تكون :

$$MSR = \frac{SSR}{1} \tag{9.21}$$

بينما متوسط مربعات الخطأ (تباين البواقى) يكون :

$$MSE = S_e^2 = \frac{SSE}{n-2} \tag{9.22}$$

لإختبار الفرض العدمى أنه لا يوجد إرتباط خطى بين X , Y . نقارن متوسط المربعات للإنحدار بمتوسط المربعات للخطأ. هكذا، فإن المؤشر الإحصائى فى إجراء تحليل التباين يكون عبارة عن النسبة التالية :

$$F = \frac{MSR}{MSE} \tag{9.23}$$

إذا كان الفرض العدمى بعدم وجود إرتباط خطى بين X , Y صحيحا، فإن توزيع المعاينة لهذه النسبة هو توزيع F بدرجات حرية 1 ، (n-2) .

سوف نستخدم هذه البديهيات لتحديد أى قيم للنسبة F سوف تساعدنا على إستنتاج أنه توجد علاقة خطية بين X , Y . وإذا كانت Y لها علاقة خطية بالمتغير X، فإن SSR والتي تمثل الاختلاف أو التغير في قيم Y والذي يفسر عن طريق الاختلاف في قيم X، يجب أن يكون كبير نسبيا. في المقابل، فإن الجزء غير المفسر للمتغير Y وهو SSE يجب أن يكون صغيراً نسبياً. وحيث أن SSR كبير، SSE صغير، فإن بيانات العينة توضح أن هناك علاقة خطية بين X ، Y. لذلك فإنه كلما كانت قيمة F كبيرة كلما كان هناك دليل قوى على وجود الارتباط الخطى بين X , Y . بعبارة أخرى فإنه كلما كبرت قيمة F ، كلما صغرت قيمة P ، وكلما قوى الدليل ضد الفرض العدمي بعدم وجود إرتباط خطى بين X , Y .

وللتوضيح ، دعنا نستخدم مثال مطعم عش البلبل Bird's Nest حيث أن :

SST = 41.5 , SSR = 34.0 , SSE = 7.5 , n = 6

وجدول تحليل التباين (ANOVA) للإختبار $(H_0: \beta_1 = 0)$ مقابل $(H_a : \beta_1 \neq 0)$ موضح فى جدول (٩-١).

جدول (٩-١)

جدول ANOVA لمشكلة مطعم عش البلبل Bird's Nest

المصدر	d f	مجموع المربعات	متوسط المربعات	قيمة F	قيمة P
عدد الوافدين	1	34.0	34.5	18.13	.0131
الخطأ	4	7.5	1.875		
إجمالي	5	41.5			

قيمة P هى (.0131) ولقد تم تحديدها فى الجدول بإستخدام الحاسب. ويمكننا تقريب قيمة P هذه عن طريق إستخدام جدول E فى الملحق كما يلى. بإستخدام درجة حرية واحدة (1) للبسط، (4) للمقام، نبحث عن القيمتين اللتين تحدان قيمة (F = 18.13). هاتان القيمتان هما (12.22)، (21.20). (لاحظ أن كل منهما تظهر فى صفحة مختلفة). نلاحظ أن المنطقة على اليمين من 12.22 تكون (.025 = 1-.975)، والمنطقة على يمين 21.20 تكون (0.1 = 1-.99) وهكذا فإن المنطقة على اليمين من (F = 18.13) تكون بين .025 , .01. لذلك فإن قيمة P تكون بين (.01) , (.025).

كما سبق أن أوضحنا فإن خطوات إيجاد تحليل التباين وT تكون متعادلة. دعنا نتحقق من ذلك فى مثال مطعم عش البلبل. حيث أن قيمة T كانت (T = 4.26). لاحظ أنه إذا تمكنا بتربيع قيمة (T = 4.26)، نحصل على ($18.15 = \{4.26\}^2$)، التى تعطي قيمة المؤشر الإحصائى F فى جدول تحليل التباين (مع وجود بعض التقريب). لاحظ أيضاً أن قيم P هي نفس القيمة لاتتغير(.0131). وفى الحقيقة، يمكن إثبات أن مربع المتغير العشوائى T بدرجات حرية γ هو المتغير العشوائى F بدرجات حرية 1 للبسط و γ للمقام؛ أى أن:

$$T_v^2 = F_{1,v} \qquad \textbf{(9.24)}$$

لذلك، فإن الأحصاء T (معادلة (9.17)) والأحصاء F الناتج عن تحليل التباين (معادلة 9.23) يكونا متكافئان فعلاً.

مثال (٩-٥)

فى مثال تثمين العقارات الذى تمت مناقشته فى البنود (٩-٣-٢)، (٩-٣-٤)، حددنا أن خط الإنحدار المقدر هو:

$$\hat{Y} = .8 + 6.0X, \quad SS(X) = 2.5, \quad SST = 108.8, \quad SSR = 90.0, \quad SSE = 18.8,$$
$$S_e^2 = 6.2667, \text{ and } n=5$$

(a) اعتماداً على فترة ثقة 95% للمعلمة β_1، هل ميل المجتمع β_1 تم تقديره بدقة معقولة؟ إشرح.

(b) ما المنتظر أن تكون عليه قيمة العينة لـ b_1، الميل المقدر، إذا لم يكن هناك فعلاً إرتباط خطى بين سعر البيع (Y) وحجم المنزل (X) فى المجتمع؟

(c) اعتماداً على إجراء تحليل التباين، هل دليل العينة يخالف الفرض القائل بأنه لا يوجد ارتباط خطى بين X , Y.

الحل

(a) من معادلة (9.14) الخطأ المعيارى المقدر لـ b_1 هو:

$$SE(b_1) = \sqrt{\frac{6.2667}{2.5}} = 1.5832$$

عند درجات حرية (n-2=3) ومستوى ثقة 95%، نجد أن قيمة T الجدولية Quantile value هى ($t_{.975,3} = 3.182$). حيث أن ($b_1 = 6$) فإن فترة الثقة 95% لـβ_1 تكون

$$6 \pm (3.182)(1.5832) = 6 \pm 5.04$$

أو (.96 , 11.04). لاحظ أن القيمة $\beta_1 = 0$ لا تدخل ضمن هذه الفترة، وهذا يدل على وجود الإرتباط الخطى بين X , Y. فى نفس الوقت، وبرغم ذلك فإن هذه الفترة توضح أن الميل لم يتم

تقديره بدقة كبيرة . فعندما تزيد X بوحدة واحدة (1,000 قدم مربع) ، فإن الزيادة المنتظرة فى متوسط سعر البيع يمكن أن تكون قليلة بمقدار $9,600 (إذا كانت $\beta_1 = .96$) أو كبيرة بمقدار $110,400 (إذا كانت $\beta_1 = 11.04$) . وهذا المدى الواسع يدل على نقص أو ضعف درجة الدقة فى تقدير β_1. وبدون شك فإن حجم العينة الصغير (n=5) ساهم فى ذلك .

(b) قيمة إحصاء ميل المربعات الصغرى هى ($b_1 = 6$) . ويتم تحديد إحتمال ملاحظة مثل هذه النتيجة في العينة عند عدم وجود إرتباط خطى بين X , Y عن طريق حساب القيمة P . حيث تخبرنا التجارب أن الميل يجب أن يكون موجب إذا وجد إرتباط خطى بين سعر البيع وحجم المنزل ، دعنا نختبر الفرض العدمي ($H_0 : \beta_1 = 0$) مقابل الفرض البديل ذو الطرف الواحد ($H_0: \beta_1 > 0$) . عند ($b_1 = 6$) ، ($SE(b_1) = 1.5832$) ، فإن قيمة الإحصاء T (معادلة {9.17}) تكون :

$$T = \frac{6-0}{1.5832} = 3.79$$

القيمة P هى إحتمال أن الإحصاء T بدرجات حرية (n-2 = 3) تأخذ قيمة أكبر من 3.79 أي :

$$\text{P-value} = P(T_3 > 3.79)$$

والقيمة P الفعلية المحسوبة من الكمبيوتر هى (.0161) . من جدول C فى الملحق ، نرى أن (T = 3.79) تقع بين القيم الجدولية ($3.182 \{t_{.975,3}\}$) ، ($4.541 \{t_{.99,3}\}$) ؛ لذلك ، نقرب القيمة P لكى تكون بين (.01) ، (.025) . ولأن القيمة P صغيرة جداً ، فإن دليل العينة يخالف فرض العدم ويساند الفرض البديل بوجود إرتباط خطى موجب بين X , Y فى المجتمع .

(c) تذكر أن (SST = 108.8) , (SSR = 90.0) , (SSE = 18.8) بإستخدام هذه الكميات ، يكون جدول تحليل التباين لإختبار ($H_0 : \beta_1 = 0$) مقابل الفرض البديل ذو الطرفين ($H_a : \beta_1 \neq 0$) ، القيمة P المعطاة فى جدول (٩-٢) تم إستنباطها بالكمبيوتر . وهى بالضبط ضعف القيمة P فى جزء(b) ، حيث أن القيمة P للاحصاء T فى جزء (b) تتعلق بفرض بديل ذو طرف واحد. وكما هو متوقع ، تكون القيمة F للمقدار (14.36) هى مربع القيمة T فى جزء (b) ($3.79^2 = 14.36$) . وحيث أن القيمة P صغيرة ، فإن دليل العينة الحالى يظهر ليخالف الفرض العدمي بعدم وجود إرتباط خطى بين سعر البيع وحجم المنزل ، كما فى جزء (b) .

جدول (٩-٢)

جدول ANOVA لمشكلة تقييم الملكية

المصدر	d f	مجموع المربعات	متوسط المربعات	قيمة F	قيمة P
الحجم	1	90.0	90.0	14.36	.0322
الخطأ	3	18.8	6.2667		
إجمالي	4	108.8			

إستخدام الكمبيوتر :

الأمثلة التى إستخدمناها لتوضيح إجراءات الإنحدار كانت سهلة نسبياً فيما يتعلق بالعمليات الحسابية، لكن من الواضح أنه من المرغوب فيه إستخدام الكمبيوتر لتنفيذ تحليل التباين عندما يكون متاح لك ذلك . ونعرض مخرجات Minitab لمثال (٩-١) (الطاقة مقابل درجة الحرارة) ،(٩-٢) (الأجر مقابل سنوات الخبرة) .

جدول(٩-٣)

مخرجات المثال (٩-١) بإستخدام Minitab

The regression equation is energy = 87.0 - 3.46 temp

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	86.9957	0.7572	114.89	0.000
temp	-3.4642	0.1395	-24.84	0.000

s = 2.586 R - sq = 97.5% R - sq(adj) = 97.3%

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	1	4123.5	4123.5	616.82	0.000
Error	16	107.0	6.7		
Total	17	4230.5			

ROW	temp	energy	yhat	residual
1	-1.0	94	90.460	3.54010
2	1.5	81	81.799	-0.79943
3	3.5	79	74.871	4.12894
4	-3.0	97	97.388	-0.38828
5	0.5	88	85.264	2.73638
6	2.5	75	78.335	-3.33524
7	4.0	74	73.139	0.86104
8	5.0	67	69.675	-2.67477
9	-5.0	107	104.317	2.68335
10	-0.5	86	88.728	-2.72781
11	9.0	58	55.818	2.18197
12	9.5	55	54.086	0.91407
13	7.0	65	62.746	2.25360
14	3.0	73	76.603	-3.60315
15	-2.0	91	93.924	-2.92409
16	6.0	65	66.211	-1.21059
17	8.0	58	59.282	-1.28222
18	10.0	52	52.354	-0.35384

لبيانات عينة مثال (٩-١) ، فإن مخرجات الكمبيوتر لتحليل التباين، تكون متضمنة نسخة لقيم $\hat{Y}$، X , Y والبواقي معطاة فى جدول (٩-٣). لاحظ أن معادلة المربعات الصغرى Energy= 87-3.46 Temp. تعطى الإستخدام الأول للأسماء التى نستخدمها لتسمية المتغيرات X , Y (عنوان العمود يمكن أن يستخدم أيضاً). تذكر أن ذلك يتم تطبيقه على مدى درجات الحرارة

للعينة من (-5) إلى (10) درجات سليزية. ثم تعرف قيم إحصاءات المربعات الصغرى، ($b_0 = 86.9957, b_1 = -3.4642$) مع أخطائها المعيارية المقدرة ($SE(b_0) = .7572$, $SE(b_1) = .1395$)، قيمة الأحصاء T، وقيم P المناظرة. المخرجات تستمر بتقديم الإنحراف المعيارى للباقى ($S_e = 2.586$)، قيمة r^2 معبر عنها كنسبة مئوية (97.5%) ، وقيمة r^2 المعدلة (التى بيناها فى فصل ١٠) أخيراً، جدول ANOVA معطى لإختبار فرض العدم ($H_0 : \beta_1 = 0$) مقابل الفرض البديل ($H_a : \beta_1 \neq 0$) .

ومن مخرجات جدول (٩-٣) ، هناك شك صغير جداً في وجود علاقة خطية بين إستهلاك الطاقة ودرجة الحرارة في المجتمع (بيانات العينة تخالف بسهولة فرض العدم ($H_0 : \beta_1 = 0$) بإستخدام كل من الإحصاءة T أو F. بالإضافة إلى ذلك ، 97.5% من الإختلاف فى قيم عينة الطاقة تفسر عن طريق الإختلاف فى درجات الحرارة. هذه النتيجة، مع الحقيقة الهامة أن الميل β_1 تم تقديره بدقة كبيرة كما وضحنا فى بند (٩-٥) ، تقودنا إلى تصديق أن خط المربعات الصغرى: (الحرارة 3.46 - 87.0 = الطاقة) يكون ملائماً للتقدير والتنبؤ ضمن مدى درجات الحرارة المستخدم فى تحديد هذا الخط.

ولبيانات عينة مثال (٩-٢)، فإن مخرجات الكمبيوتر، تتضمن قائمة قيم $\hat{Y}$ والبواقى، مقدمة فى جدول (٩-٤). كما لاحظنا سابقاً (بناء على شكل الإنتشار) ، لا يوجد بالفعل أدنى شك أنه توجد علاقة بين الأجر وسنوات الخبرة. بالرغم من أن هذا التحليل يظهر العلاقة الخطية بين الأجر وسنوات الخبرة، فإنه يظل هناك سؤال عن ما إذا كان الخط المستقيم هو أفضل وصف لهذه العلاقة. نقول هذا بسبب أنه فى شكل الإنتشار (شكل ٩-٧) نرى أنه بعد 20 سنة أو أكثر ، لايجب استخدام خط المربعات الصغرى (سنة 1.26 + 28.9 = الأجر) للتقدير أو التنبؤ وبالتالي يجب أن نحصل على النموذج الذى له درجة إنحناء أفضل، ويصف بطريقة أفضل طبيعة الإرتباط (مثل هذه النماذج تمت مناقشتها فى فصل ١٠) .

جدول (٩-٤)

نتائج مثال (٩-٢) بإستخدام برنامج Minitab

```
The regression equation is salary = 28.9 + 1.26 years

Predictor        Coef       Stdev     t-ratio        p
Constant       28.946       2.325       12.45    0.000
years          1.2607      0.1279        9.86    0.000

s = 5.017    R - sq = 87.4%    R - sq(adj) = 86.5%

Analysis of Variance

SOURCE          DF          SS          MS          F        p
Regression       1      2446.7      2446.7      97.22    0.000
Error           14       352.3        25.2
Total           15     2799.00

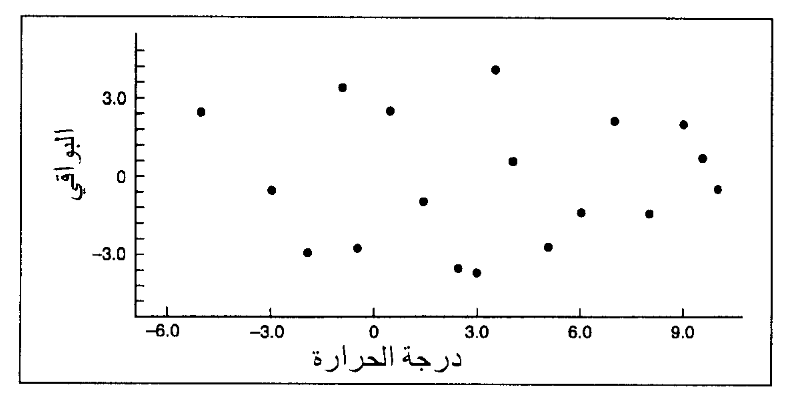
ROW          years      salary        yhat     residual
  1              1          23     30.2064     -7.20641
  2              2          27     31.4671     -4.46709
  3              4          29     33.9885     -4.98847
  4              5          34     35.2492     -1.24916
```

5	6	38	36.5098	1.49015
6	9	46	40.2919	5.70809
7	11	48	42.8133	5.18671
8	14	54	46.5953	7.40465
9	16	54	49.1167	4.88328
10	20	59	54.1595	4.84053
11	22	58	56.6809	1.31915
12	24	59	59.2022	-0.20222
13	25	61	60.4629	0.53709
14	27	63	62.9843	0.01571
15	29	59	65.5057	-6.50566
16	30	60	66.7663	-6.76635

(٩-٤-٦) مقدمة لتحليل البواقى An Introduction to the Analysis of Residuals

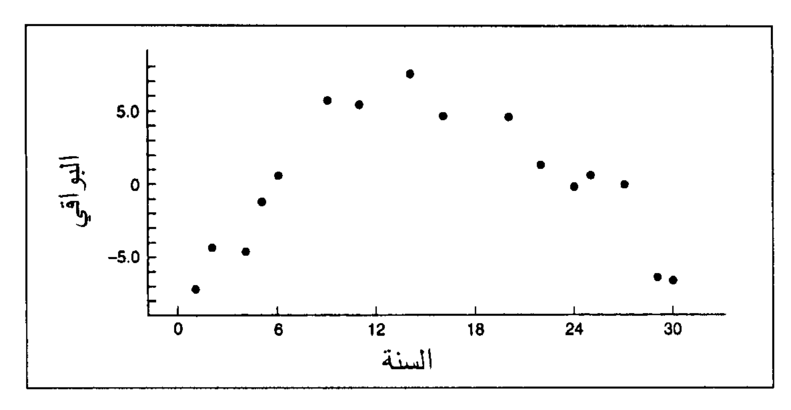
فى هذا الجزء ، نقدم تحليل البواقى بإستخدام مثال (٩-١)، (٩-٢) كما هو موضح. وتحليل البواقى هو أداة هامة فى محاولة لتحسين معادلة الإنحدار المقدرة. نقدم تحليل البواقى هنا ونوضح الموضوع بعمق أكبر فى فصل (١٠) .

ففى الجزء (٩-٤-١) ، ناقشنا الفروض الأساسية لإستنتاجات الإنحدار. الفرض الأول هو أن النموذج الخطى البسيط يمثل بشكل دقيق الإرتباط بين متغير الإستجابة response ومتغيرات التنبؤ predictor . إذا كان هذا الفرض صحيح، يكون شكل البواقى (على المحور الرأسى) مقابل قيم X المناظرة (على المحور الأفقى) يجب أن لا يظهر نموذج مميز. سبب ذلك أنه إذا كان النموذج صحيح، فإن البواقى تمثل أخطاء عشوائية بحتة؛ هكذا فإن، البواقى يجب ألا تظهر نموذج ما على الإطلاق عندما ترسم مقابل أى متغير. إذا ما تم ظهور نموذج ما، فإن البواقى ربما لا تمثل أخطاء عشوائية بحتة. تبعاً لذلك، هذا الفرض الأساسى ربما لا يكون صحيحاً فى بعض الحالات.



شكل (٩-١٦)

يوضح البواقى مقابل درجة الحرارة فى المثال (٩-١)



شكل (٩-١٧)

يوضح البواقى مقابل سنوات الخبرة فى المثال (٩-٢)

فى شكل (٩-١٦) تظهر البواقى لخط المربعات الصغرى لمعادلة (٩-١) (الطاقة اليومية المستخدمة مقابل درجات الحرارة اليومية) تم رسمها مقابل درجات الحرارة المناظرة. بالمثل، فى شكل (٩-١٧) ، البواقي لمثال (٩-٢) (الأجر مقابل سنوات الخبرة) تم رسمها مقابل سنوات الخبرة المناظرة. دعنا نبدأ مع شكل (٩-١٦). حيث يظهر نموذج غير مميز للبواقى بالنسبة لقيم درجات الحرارة. بتعبير آخر، يظهر عدم وجود إرتباط بين البواقي وقيم درجات الحرارة. لكن الآن تفحص البواقى فى شكل (٩-١٧) . يجب أن يكون واضح لك أن نفس الشئ لا يمكن قوله هنا. فهو يظهر نموذج يمكن تمييزه للبواقى بالنسبة لعدد سنوات الخبرة. لاحظ أن البواقى فى أدنى النهاية لمدى سنوات الخبرة تكون سالبة وفى منتصف المدى تكون موجبة وفى النهاية العليا تكون سالبة مرة أخرى. مثل هذا التغير لنموذج على شكل U يقترح وجود إنحناءة فى الإستجابة بالنسبة للزيادة في سنوات الخبرة. وبالتالي نحتاج إلى نموذج يدخل درجة الأنحناء فى العلاقة .

تمارين

(٩-٢٦) فيما يتعلق بالإستنتاج الإحصائى للنموذج الخطى البسيط، ما هى أهم معلمة؟ ولماذا تكون هذه المعلمة هامة ؟

(٩-٢٧) لماذا يكون فرض العينة الممثلة **representative sample** للبيانات مهم ؟

(٩-٢٨) هل يمكن لفرض النموذج الخطى البسيط الذي يمثل الأرتباط بين X , Y أن يتم إثبات صحته بمعلومية معامل التحديد r^2 ؟ وضح ذلك .

(٩-٢٩) لبيانات عينة ما ، إفترض أن المربعات الصغرى المقدرة للميل هى $(b_1 = 6.5)$ والخطأ المعيارى المقدر لها هو $(SE(\beta_1) = 1.5)$.

(أ) بدون أى معلومات أخرى، ماذا يمكن استنتاجه بطريقة معقولة عن ميل المجتمع β_1فى هذه الحالة؟ فسر إستنتاجك .

(ب) ماذا تعنى إجابتك لجزء (a) عن العلاقة الخطية بين X , Y ؟

(٩-٣٠) أجب عن نفس الأسئلة كما فى تمرين (٩-٢٩) إذا كانت $(b_1 = -2.4)$ ، $(SE(b_1) = 2.6)$.

(٩-٣١) أجب عن نفس الأسئلة كما فى تمرين (٩-٢٩) إذا كانت $(b_1 = 12.6)$ ، $(SE(b_1) = 7.0)$

(٩-٣٢) حدد فترة الثقة 95% للميل β_1 فى التمارين التالية وإستخدم كل فترة لتحديد ما إذا كان دليل العينة يخالف إفتراض عدم وجود إرتباط خطى بين X , Y :

(أ) تمرين (٩-١٥) .
(ب) تمرين (٩-٢٠) .
(ج) تمرين (٩-٢٢) .
(د) تمرين (٩-٢٣) .

(٩-٣٣) للتمارين التالية ؛ إلى أى مدى يساند دليل العينة الإعتقاد بأن هناك علاقة خطية موجبة بين X , Y ؟

(أ) تمرين (٩-٢٠) .
(ب) تمرين (٩-٢٣) .

(٩-٣٤) للتمارين التالية ؛ إلى أى مدى يساند دليل العينة الإعتقاد بأن هناك علاقة خطية سالبة بين X , Y ؟

(أ) تمرين (٩-١٥) .
(ب) تمرين (٩-٢٢) .

(٩-٣٥) للتمارين التالية ، إستخدم أسلوب تحليل التباين لإختبار الفرض العدمى بعدم وجود إرتباط خطى بين X , Y . هل يجب أن تكون نتائجك مختلفة عن تلك التى فى تمرين (٩-٢٣) ؟ فسر :

(أ) تمرين (٩-١٥) .
(ب) تمرين (٩-٢٠) .
(ج) تمرين (٩-٢٢) .
(د) تمرين (٩-٢٣) .

(٩-٣٦) بالرجوع إلى تمرين (٩-١٠) .

(أ) إفترض وجود علاقة خطية بين مبلغ تأمين الحياة والدخل، حدد خط المربعات الصغرى وفسر تقديرات الميل والجزء المقطوع من المحور الرأسى .

(ب) بناء على فترة ثقة 95% للميل β_1 ، هل β_1 تم تقديرها بدقة كبيرة؟ وضح .

(ج) بناء على إجراء تحليل التباين، هل دليل العينة يخالف الفرض بعدم وجود علاقة بين مبلغ تأمين الحياة والدخل ؟

(د) بإستخدام تحليل البواقى، هل اكتشفت أى إنتهاكات ملحوظة للفروض؟ وضح .

(٩-٣٧) ارجع إلى تمرين (٩-١١) أجب على أسئلة مماثلة كالتى فى تمرين (٩-٣٦) .

(٩-٣٨) ارجع إلى تمرين (٩-١٣) أجب على أسئلة مماثلة كالتى فى تمرين (٩-٣٦) .

(٩-٣٩) ارجع إلى تمرين (٩-١٤) ، (٩-٢٥) .

(أ) بناء على فترة ثقة 95% لقيمة β_1 ، هل β_1 تم تقديرها بدقة كبيرة؟ وضح .

(ب) إلى أى مدى يخالف دليل العينة الإدعاء بعدم وجود علاقة خطية بين نسبة الضرائب المسددة والنمو السنوى فى الدخل ؟

(ج) بإستخدام تحليل البواقى، هل اكتشفت أى نموذج ملحوظ؟ وضح .

(د) من خلال إجابتك للاجزاء (أ) إلى (ج) هل يمكنك إستنتاج أن خط المربعات الصغرى مناسب أو ملائم للتقدير والتنبؤ ؟ وضح .

(٩-٤٠) قام مدير إدارة الموظفين بعمل إختبار ذكاء لكل ممثلى المبيعات الجدد. إدارة المبيعات كان إهتمامها متعلق بمدى قدرة الإختبار على التنبؤ بحجم المبيعات النهائى. الآتى هو درجات الإختبار والمبيعات الأسبوعية (بآلاف الدولارات) لثمانية من ممثلى المبيعات :

درجات الأختبار	المبيعات
55	8
60	12
85	28
75	24
80	18
85	16
65	15
55	12

(أ) عين متغير الاستجابة والمتغير المفسر وبرر إجابتك .

(ب) كون شكل الإنتشار وحدد ما إذا كان الإرتباط الخطى واضحاً .

(ج) مفترضاً الإرتباط الخطى، حدد خط المربعات الصغرى وفسر تقديرات الميل والجزء المقطوع من المحور الرأسى .

(د) بناء على فترة الثقة 95% لـ β_1 ، هل يمكنك القول بأن β_1 تم تقديرها بدقة كبيرة؟ وضح .

(٩-٤١) إذا كانت Express Graphics شركة طباعة تطبع عبوات (صناديق) مختلفة بشكل كبير مثل علب للسجائر، صناديق مطهرات (منظفات)، صناديق لمستحضرات التجميل، مستحضرات صيدلية، وللوجبات السريعة. الأعمال تختلف فى الحجم، الشكل، جودة الطابعة، ونوع الورق المستخدم. وتقوم الشركة بعمل حوالى 200 عملية شهرياً. المدير مهتم بدرجة التوافق بين سعر البيع المستهدف (X) للعملية والمبلغ النهائي لفاتورة الحساب (Y) وفيما يلى بيانات عينة عشوائية لعدد 15 عملية :

السعر المستهدف (X)	المبلغ المدون بالفاتورة (Y)	السعر المستهدف (X)	المبلغ المدون بالفاتورة (Y)
$ 551	$ 328	$ 5,292	$ 6,417
469	543	83	85
1,882	2,577	2,336	2,178
545	404	123	127
13,596	15,090	4,285	4,349
929	292	76	115
633	1,045	125	381
		44	122

(أ) كون شكل الإنتشار . هل هناك علاقة بين مبلغ الفاتورة والسعر المستهدف ، وهل العلاقة في شكل خط مستقيم ؟ وضح .

(ب) إفترض العلاقة الخطية، حدد خط المربعات الصغرى وفسر تقديرات الميل والجزء المقطوع من المحور الرأسى .

(ج) حدد فترة ثقة 95% للميل β_1 . هل تعتقد أن الميل المقدر فى جزء (ب) دقيق بشكل كاف ؟ وضح .

(د) ماذا يخبرك تحليل البواقى لهذه المشكلة ؟ وضح .

(٩-٤٢) قام مسئول فى شركة طباعة بتطوير سعر مستهدف لعملية محتملة والتى يمكن أن تنتقل إلى العميل . المتغير الأساسى الذى يؤثر فى تكلفة الإنتاج هو سرعة آلة الطباعة فى العمل . فى الماضى، سرعة الآلة كان يتم تقديرها على أساس الخبرة الشخصية فى اجتماعات تسعير أسبوعية . هذا التقدير ، بجانب تقديرات أخرى يستخدم كمدخلات لبرنامج الكمبيوتر لتقدير تكلفة الإنتاج . فكر محلل السوق فى تحديد أى التقديرات هى الأفضل لسرعة آلة الطباعة يمكن الحصول عليها بإستخدام نموذج الإنحدار . وفى تحليل أولى، قام بجمع البيانات التالية لعينة من 15 عملية، سرعة آلة الطباعة (مئات الصور لكل ثانية) وصعوبة التدوين أو التسجيل registration فى طباعة الصندوق (تصنيف 1 = صعب ، 2 = عادى ، 3 = سهل ، تم تحديدها بالتقدير الشخصى) تم تسجيلها :

صعوبة التدوين	سرعة آلة الطباعة	صعوبة التدوين	سرعة آلة الطباعة
3	107	1	74
3	95	2	69
3	104	2	71
3	45	3	67
2	69	3	109
2	100	3	114
2	99	3	94
		3	120

(أ) حدد متغير الاستجابة والمتغير المفسر وبرر اختيارك .

(ب) أجب على الأجزاء (ب) إلى (د) فى تمرين (٩-٤٠) .

(ج) بماذا تقترح معادلتك المقدرة هل يوجد فرق بين سرعة آلة الطباعة للوظائف المصنفة1 (صعب) والوظائف 2 (عادية) ، فى المتوسط ؟

(٩-٤٣) يرغب مدير مؤسسة ما فى تحديد تأثير المدد الزمنية المختلفة على عدد الوحدات التى يتم تجميعها عن طريق مشغلى نظام تجميع قبل أن يأخذ المشغلين فترة راحة. وقد شك المدير فى أن فترات العمل الأطول قبل فترة الراحة تتجه لتخفيض الإنتاجية. وفى تجربة على فترات العمل تم تجربة فترات راحة 1، 2 ، 3 ، 4 ساعات لكل فترة، تم ملاحظة عدد الوحدات المجمعة لأربعة مشغلين . تم ملاحظة النتائج التالية :

الساعات قبل فترة الراحة	1	2	3	4
الوحدات المجمعة	25,29,23,31	55,65,63,54	73,75,74,71	90,88,91,87

(أ) أجب عن الأجزاء (أ) - (د) لتمرين(٩-٤٠) .

(ب) مستخدماً تحليل البواقى ، هل تكتشف أى نموذج ملحوظ؟ وضح .

(ج) هل تعتقد أن عينة البيانات هذه تبرهن بوضوح أن إنتاجية نظام التجميع تعتمد فعلاً على المدة الزمنية قبل أن يأخذ المشغل فترة راحة؟ فسر إعتقادك .

(٩-٥) درجة الإعتماد على التقديرات والتنبؤات : The Reliability of Estimates and Predictions

بشكل عام إذا أخفق الإحصاء T أو تحليل التباين فى تقدير أن Y مرتبطة خطياً مع X ، في هذه الحالة يجب الا يستخدم خط المربعات الصغرى للتقدير أو التنبؤ . وحتى لوكانت هذه الأساليب تساند وتدعم وجود علاقة خطية ، فمن الممكن ألا يكون خط المربعات الصغرى مقنع للتقدير أو التنبؤ .

ولما كان الهدف الأساسى من تحليل الإنحدار هو تقديم نموذج يمثل الوضع الفعلي بدرجة معقولة ويوفق البيانات المثلة إلى الحد الذى يكون فيه تباين الأخطاء العشوائية صغيراً بدرجة كافية . مثل هذا النموذج يقدم درجة دقة مقبولة عندما يستخدم للتقدير أو التنبؤ . لذلك ، فإن الهدف البديل يكون في تقديم نموذج يحقق درجة دقة مقنعة فى تقديراته وتنبؤاته . مع بقاء هذا الهدف فى الذهن ، نركز إهتمامنا على الأخطاء المعيارية لمقدرات الإنحدار وحدود الخطأ المصاحبة لهم .

(٩-٥-١) درجة الإعتماد على b_1 فى تقييم العلاقة الخطية بين X , Y

The Reliability of b_1 in Assessing the Linear Relationship Between Y and X

كما أشرنا سابقاً ، فإن الميل β_1 لخط إنحدار المجتمع هو المحدد الرئسى للعلاقة الخطية بين X , Y . لذلك من المهم معرفة دقة b_1 ، والتى تعتبر أفضل مقدر للاستدلال حول β_1 . وبالرجوع لمثال (٩-٥) (التعامل مع مشكلة تقييم الملكية) ، اكتشفنا نقص واضح فى درجة دقة تقدير β_1 ، حد الخطأ في ($b_1 = 6.00$) كان 5.04 ؛ لذلك كان مدى القيم المقبولة للمقدار β_1 واسع بشكل غير مقبول . هذا النقص فى درجة الدقة ناتج مباشرة من أن الخطأ المعيارى لقيمة b_1 كبير . ونلاحظ هنا أنه كلما كبر الخطأ المعيارى ، كلما كبر حد أو هامش خطأ المعاينة ، وكلما كبر مدى قيم β_1 المقبولة .

وعموما فإنه لأى درجة دقة فى تقدير β_1 ، فإن الخطأ المعيارى لقيمة b_1 يجب أن يكون أقل كثيراً من حجم قيمة b_1 . بتعبير آخر فإن نسبة قيمة b_1 إلى خطأها المعيارى يجب أن تكون كبيرة تماماً فى الحجم . لكن لاحظ أن هذه النسبة هى ببساطة القيمة T $\{T = b_1 / SE(b_1)\}$ للفرض العدمى ($H_0 : \beta_1 = 0$) . لذلك ، كلما كبر مقدار القيمة T ، تكون درجة الدقة أفضل فى تقدير الميل β_1 .

وجدول (٩-٥) يوضح قيم b_1 وأخطائهم المعيارية ، وقيم T للأمثلة الأربعة المستخدمة فى هذا الفصل . لاحظ أن أفضل درجة دقة فى تقدير الميل b_1 تتحقق فى مثال الطاقة مقابل درجة الحرارة لأن القيمة T لها أكبر مقدار مطلق ($T = -24.84$) . وهذا الأمر لايدهشنا كثيراً إذا قارنا شكل الإنتشار لمثال الطاقة مقابل درجة الحرارة (شكل٩-٦) مع أشكال الأمثلة الأخرى ، أشكال (٩-٧)، (٩-١٠)، (٩-١٣) .

جدول (٩-٥)

مقارنة الأخطاء المعيارية والقيم T للأمثلة الأربعة

مـثـال	قيمة b_1	الخطا المعياري	قيمة T
تثمين العقارات أو تقييم الملكية	6.0	1.5832	3.79
مطعم عش البلبل Bird's Nest	.2	.0470	4.26
الأجر مقابل الخبرة	1.2607	.1279	9.86
الطاقة مقابل درجة الحرارة	-3.4641	.1395	-24.84

كما تعلم ، يمكن إستخدام فترات الثقة لوصف درجة دقة المقدرات . لأحصاء المربعات الصغرى b_1، فترة ثقة {$100(1-\alpha)\%$} للمقدار β_1 تم تقديمها فى معادلة (9.18) وهامش خطأ المعاينة تم تقديمه فى معادلة (9.19) . لمثال الأجر مقابل الخبرة، تكون فترة ثقة 95% للمعلمة β_1 هى {القيمة الجدولية هى ($t_{.975,14} = 2.145$) } .

$$1.2607 \pm (2.145)(.1279) = 1.2607 \pm .2743$$

أو (1.54 ,99.) . هذه الفترة تعنى أنه عندما يزيد عدد سنوات الخبرة بسنة واحدة، متوسط الأجر ربما يزيد بكمية قليلة 990$ (إذا كانت $\beta_1 = .99$) أو يزيد بكمية كبيرة 1,540 $ (إذا كانت $\beta_1 = 1.54$) بثقة 95% . ويكون مدى هذه الفترة أقل بكثير من الموجود فى مشاكل تقييم الملكية ومطعم عش البلبل Bird's Nest .

فيما يتعلق بمثال الطاقة مقابل درجة الحرارة، تكون فترة ثقة 95% للمعلمة β_1 هى {القيمة الجدولية هى ($t_{.975,16} = 2.120$)} .

$$-3.4642 \pm (2.120)(.1395) = - 3.4642 \pm .2957$$

أو (3.17 - ,3.76-) . هذه الفترة تعنى أنه عندما تزيد درجة الحرارة اليومية بدرجة واحدة مئوية، فإن متوسط الطاقة المستخدمة ربما ينخفض بمقدار كبير مثل3.76 كيلو وات (إذا كانت $\beta_1 = -3.76$) أو بمقدار صغير مثل 3.17 كيلو وات (إذا كانت $\beta_1 = -3.17$) بثقة 95% . صغر أو ضيق المدى لهذه الفترة بالمقارنة بالموجود فى الثلاث أمثلة الأخرى لا يترك شك أن ميل المجتمع β_1 لمثال الطاقة مقابل درجة الحرارة تم تقديره بأفضل درجة دقة .

(٩-٥-٢) تقدير متوسط Y ، بمعلومية X : Estimating the Mean of Y , Given X

كما سبق أن أشرنا فى الجزء (٩-٢-٣) فإن هناك استخدامين أوليين لنماذج الإنحدار : (1) لإكتساب فكرة عن عملية تحليل الانحدار عن طريق دراسة العلاقة بين متغيرات الانحدار . (2) للتنبؤ أو التقدير . والإستخدام الأخير يتكون من أحد حالتين: فى الحالة الاولى، نرغب فى التنبؤ بقيم Y الفردية بمعلومية أن X تساوى بعض القيم الخاصة، التى تشير إليها بالرمز x . فى الحالة الأخرى، نرغب فى تقدير متوسط قيمة Y ، بمعلومية أن X تساوى x . لتمييز أفضل بين هاتين الحالتين ، نستخدم المصطلح تنبؤ prediction ليشير إلى التنبؤ بقيم Y الفردية وتقدير estimation ليشير إلى التقدير لمتوسط قيمة Y .

هناك حاجة لتقدير الأساليب التى ذكرت سابقاً . ففى مثال تثمين العقارات ، إفترض أننا نريد تقدير متوسط سعر البيع لكل المنازل المتشابهة والتى مساحتها 2,200 قدم مربع . نعوض ببساطة عن $(X = 2.2)$ فى معادلة الإنحدار ($\hat{Y} = .8 + (6.0)(2.2)$) . هكذا حددنا متوسط سعر البيع المقدر لكى يكون $\hat{Y} = .8 + (6.0)(2.2) = 14.0$ أى يكون 140000$. من الضرورى إدراك درجة الدقة لتقدير ما قبل إستخدامه في إتخاذ قرارات هامة . دعنا نقوم بفحص الدقة التى يمكن توقعها للتقدير 140,000$ لمتوسط سعر البيع للمنازل المتشابهة التى مساحتها 2,200 قدم مربع . درجة الدقة لأى تقدير تتحدد عن طريق هامش خطأ المعاينة له أو ، بمعنى مساو ، فترة الثقة المصاحبة . فى كلا الأمرين ، تكون الخطوة الأولى هى تحديد الخطأ المعيارى للمقدر .

ويمكن أن يتم التوضيح جبرياً أن الخطأ المعيارى لقيمة $\hat{Y}$ ، بمعلومية أن $(X = x)$ ، يعطى عن طريق :

$$SE(\hat{Y}) = \sqrt{\sigma_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^{2}}{SS(X)}\right]} \qquad \textbf{(9.25)}$$

وحيث أن تباين الخطأ σ_{ε}^{2} غير معلوم ، يتم تقديره بإستخدام تباين البواقى S_e^2 وهكذا ، الخطأ المعيارى المقدر للمقدار $\hat{Y}$ ، بمعلومية أن $X = x$ يكون :

$$SE(\hat{Y}) = \sqrt{S_{e}^{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^{2}}{SS(X)}\right]} \qquad \textbf{(9.26)}$$

الآن ، المقدر $(\hat{Y} = b_0 + b_1X)$ يمكن توضيحه على أنه متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى* . وحيث أننا قدرنا σ_{ε}^{2} بقيمة S_e^2 ، فإن الإستنتاجات عن متوسط المجتمع Y عندما تكون $(X = x)$ يكون مبنى على أساس توزيع T بدرجات حرية n-2 . وبالتالى فإن فترة ثقة $100(1-\alpha)\%$ لمتوسط قيم Y عندما تكون $(X = x)$ يكون كما يلى :

$$\hat{Y} \pm t_{1-\alpha/2,\, n-2} \sqrt{S_{e}^{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^{2}}{SS(X)}\right]} \qquad \textbf{(9.27)}$$

حيث هامش أو حد الخطأ Margin error يساوى :

$$t_{1-\alpha/2,\, n-2} \sqrt{S_{e}^{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^{2}}{SS(X)}\right]} \qquad \textbf{(9.28)}$$

نعود الآن لمثال تقييم الملكية لتحديد الدقة المتوقعة لتقديرنا 140,000$ لمتوسط سعر البيع للمنازل المتشابهة مع $(X = 2.2)$ (2,200 قدم مربع) . لقد وجدنا سابقاً أن $(\overline{X} = 2.0)$ ، $(S_e^2 = 6.2667)$ ، $(SS\{X\} = 2.5)$ ، $n = 5$. بالتالي الخطأ المعيارى المقدر لـ $\hat{Y}$ ، بإستخدام معادلة (9.26) هو :

$$SE(\hat{Y}) = \sqrt{(6.2667)\left[\frac{1}{5} + \frac{(2.2 - 2.0)^{2}}{2.5}\right]} = 1.1634$$

من المعادلة (9.27) ، فترة ثقة 95% لمتوسط سعر البيع لكل المنازل مع $(X = 2.2)$ هو : (لاحظ أن $t_{.975,3} = 3.18$)

$$14.0 \pm (3.182)(1.1634) = 14.0 \pm 3.702$$

* السبب: رأينا فيما سبق أن b_1 تتوزع طبيعياً. بأسلوب مشابه، bo يمكن توضيح أنها تتوزع توزيعا طبيعياً . حيث ان X ثابتة، $(\hat{Y} = b_0 + b_1X)$ هي توليفة خطية لمتغيرين عشوائيين طبيعيين، b_1X, b_0 وهكذا $\hat{Y}$، تكون أيضاً موزعة توزيعاً طبيعيا، بمعلومية X.

أو (10.298 , 17.702) يمكننا القول أنه بدرجة ثقة 95% فإن متوسط سعر البيع للمنازل التى مساحتها 2,200 قدم مربع يمكن أن يكون منخفض بمقدار $102,980 أو مرتفع بمقدار $177,020 . هل يشير هذا إلى درجة دقة جيدة ؟ يبدو هنا مدى واسع تماماً للقيم المقبولة لمتوسط سعر البيع. لذلك فإن المتوسط المقدر وهو $140,000 لا يمكن إعتباره دقيق جداً .

دعنا ننظر الآن إلى مثال استهلاك الطاقة. إفترض أننا نرغب فى تقدير متوسط الإستهلاك عندما تكون درجة الحرارة اليومية العالية هى 3 درجات سليزية. وجدنا أن خط المربعات الصغرى لهذا المثال هو ($\hat{Y} = 87.0 - 3.46X$) ؛ وهكذا فإن متوسط الطاقة المقدرة المستخدمة لدرجة الحرارة العالية 3 درجات هى ($\hat{Y} = 87.0 - 346(3) = 76.62$) . لتحديد الخطأ المعيارى لهذا التقدير، نحسب $\overline{X}$, SS(X) بإستخدام قيم درجات الحرارة الموجودة فى مثال (٩-١). ينتج من هذا أن ($\overline{X} = 3.2222$) ، (SS(X) = 343.6111) . ولقد سبق أن علمنا من جدول (٩-٣) أن :

($S_e^2 = \frac{107}{16} = 6.6875$) ، (n = 18) لهذا المثال. لذلك ، الخطأ المعيارى المقدر يكون :

$$SE(\hat{Y}) = \sqrt{(6.6875)\left[\frac{1}{18} + \frac{(3 - 3.2222)^2}{343.6111}\right]} = .6103$$

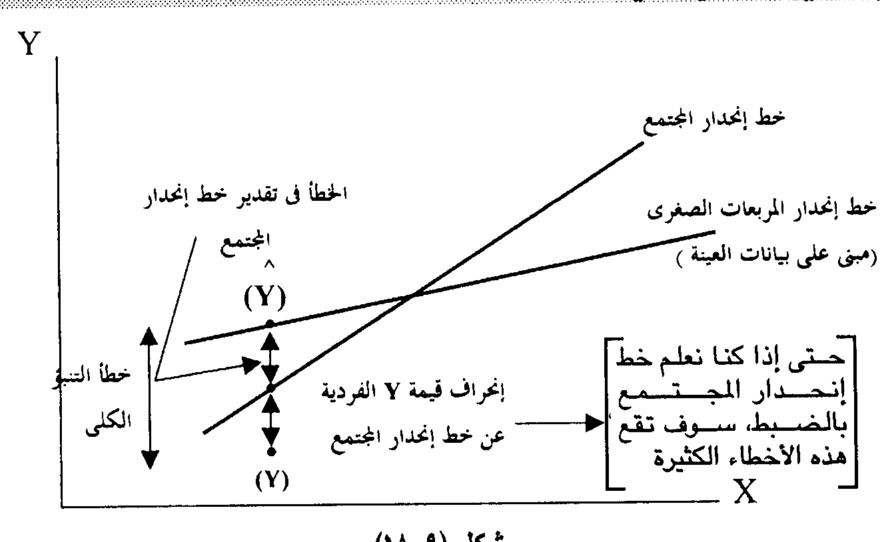
وبإستخدام فترة الثقة 95% لمتوسط استهلاك الطاقة عندما تكون درجة الحرارة اليومية العليا 3 درجات سليزية هى (حيث $t_{.975,16} = 2.120$) .

$$76.62 \pm (2.120)(.6103) = 76.62 \pm 1.29$$

أو (75.33 , 77.91) . وبمستوى ثقة 95% ، نستنتج أن متوسط إستهلاك الطاقة عندما تكون درجة الحرارة العليا اليومية هى 3 درجات سليزية، يمكن أن يكون منخفض إلى المقدار 75.33 أو مرتفع إلى المقدار 77.91 كيلو وات. هذا المدى يبدو صغير حقاً، وهكذا يدل على وجود دقة كبيرة فى التقدير 76.62 كيلو وات .

(٩-٥-٣) التنبؤ بقيم Y الفردية بمعلومية X : Predicting an Individual Y - Value , Given X

بمعلومية قيمة X ، فإن التنبوات **predictions** بقيم Y الفردية تكون مماثلة لتقدير متوسط **estimates** قيمة Y المناظرة للقيمة X . كلاهما يتم تحديده عن طريق التعويض بقيمة X فى معادلة الإنحدار المقدرة ($\hat{Y} = b_0 + b_1X$) . ومع ذلك فإن أخطاء التنبؤ prediction لقيم Y الفردية يكون أكبر من التى تكون للمتوسط. السبب ليس صعب الفهم. فى كلا الحالتين، التنبؤ أو التقدير **prediction or estimate** يكون للقيمة $\hat{Y}$ لخط المربعات الصغرى المناظرة لقيمة X المعطاة. حيث أن خط المربعات الصغرى من المحتمل ألا يمثل خط إنحدار المجتمع تماماً، يكون نتيجة هذا الخطأ. هذا الخطأ هو نفسه عند التنبؤ بقيم Y الفردية وعند تقدير متوسط المجتمع. ولكن التنبؤ بقيم Y الفردية تكون معرضة لخطأ إضافى أيضاً، لأن قيمة Y الفردية من المحتمل ألا تقع على خط إنحدار المجتمع مباشرة. إذا كنا نعلم خط الانحدار بدقة تامة، فإنه يمكن أن نقدر متوسط Y لهذه القيمة X بدون خطأ، لكننا لن نكون قادرين على التنبؤ بقيمة Y الفردية بشكل تام. هذا هو سبب أن الأخطاء تكون أكبر عندما نتنبأ بقيم Y الفردية **individual** منها عندما نقدر متوسط **mean** المجتمع للمتغير Y بمعلومية قيمة معينة X . شكل (٩-١٨) يوضح هذه النقطة .



شكل (٩-١٨)

شكل يوضح عنصرى أخطاء التنبؤ (1) التقدير غير الصحيح لخط إنحدار المجتمع (2) إنحراف نقطة البيانات الفردية عن خط إنحدار المجتمع

دعنا نرى كيف أن مصدر الخطأ الاضافي تؤثر فى الخطأ المعيارى للتنبوءات لقيم Y الفردية. تعلمنا من جزء (٩-٥-٢) أن تباين الوسط المقدر للمتغير Y ، بمعلومية X ، هو :

$$Var(\hat{Y}) = \sigma_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^2}{SS(X)}\right]$$

نعلم أيضاً أن تباين قيم Y الفردية حول خط إنحدار المجتمع هو :

$$V.r\ (\ \varepsilon\ ) = \sigma_\varepsilon^2$$

يمكن توضيح رياضياً أن تباين أخطاء التنبؤ لقيم Y الفردية هو مجموع هذين التباينين – أى أن :

$$\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^2}{SS(X)}\right]$$

بأخذ σ_ε^2 عامل مشترك ، يمكننا تبسيط هذا إلى :

$$\sigma_\varepsilon^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^2}{SS(X)}\right] \quad \textbf{(9.29)}$$

والخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم Y الفردية ، عندما $(X = x)$ يتم إيجاده بأخذ الجزر التربيعى لمعادلة (9.29) . ولكى نميزه عن الخطأ المعيارى لتقدير المتوسط للمتغير Y بمعلومية $(X = x)$ [الذى يرمز له $(SE\{\hat{Y}\})$] ، هذا الخطأ المعيارى يرمز له $SE_p(\hat{Y})$. الدليل p يدل على التنبؤ بقيم Y الفردية . لذلك فإن :

$$SE_p(\hat{Y}) = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^2}{SS(X)}\right]} \quad \textbf{(9.30)}$$

ولقد سبق أن أوضحنا أن تباين الخطأ σ_ε^2 يتم تقديره عن طريق تباين البواقى S_e^2 ؛ لهذا فإن الخطأ المعيارى المقدر يكون :

$$SE_p(\hat{Y}) = \sqrt{S_e^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{X})^2}{SS(X)}\right]} \quad \textbf{(9.31)}$$

بمقارنة الصيغ (9.26) ، (9.31) ، يجب أن ترى أن الخطأ المعيارى للتنبؤ بقيم Y الفردية أكبر من الخطأ المعيارى لتقدير متوسط قيمة Y ، بمعلومية X . هذا يوضح لنا أننا نتوقع درجة دقة أقل فى التنبؤ بقيم Y الفردية عنه فى تقدير متوسط Y ، بمعلومية أن (X = x) .

لقياس درجة دقة التنبؤات ، نحسب فترة تقدير اعتماداً على $SE_p(\hat{Y})$. نسمى هذه الفترة فترة تنبؤ **prediction interval** لنميزها بوضوح عن فترة الثقة لمتوسط mean (Y) المعطى فى معادلة (9.27)، وتكون فترة التنبؤ بدرجة ثقة (%(1- α)100) لقيمة Y الفردية ، وبمعلومية (X = x) كالتالى :

$$\hat{Y} \pm t_{1-\alpha/2,\, n-2} \sqrt{S_e^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{X})^2}{SS(X)}\right]} \qquad \textbf{(9.32)}$$

ففى مثال تقييم الملكية (تثمين العقارات) ، إفترض أننا نريد التنبؤ بسعر بيع منزل واحد حجمه 2,200 قدم مربع (X = 2.2) . التنبؤ يكون تماماً مثل تقدير متوسط سعر البيع عندما X = 2.2 أي يكون($\hat{Y}$= .8+(6)(2.2)=14.0) أو$140,000 . لكن الخطأ المعيارى لهذا التقدير يكون أكبر. تذكر أن ($\overline{X}$= 2.0) ، (SS(X) = 2.5) , (S_e^2 = 6.2667) , (n=5) نحسب الخطأ المعياري المقدر لهذا التنبؤ كمايلي :

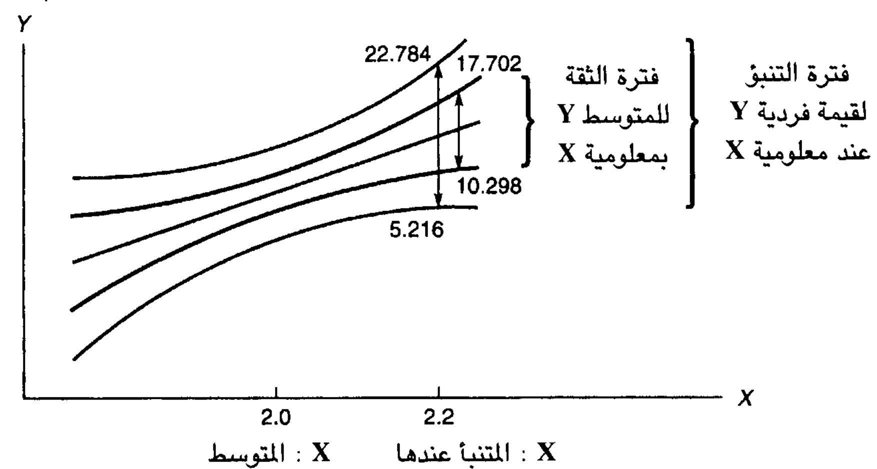
$$SE_p(\hat{Y}) = \sqrt{(6.2667)\left[1+\frac{1}{5}+\frac{(2.2-2.0)^2}{2.5}\right]} = 2.7605$$

وهو بشكل أساسى أكبر من الخطأ المعيارى المقدر من متوسط سعر البيع عندما (X = 2.2) ، {$SE(\hat{Y}$) = 1.1634}. بإستخدام المعادلة (9.32) ، نجد أن فترة تقدير 95% لقيمة Y الفردية، بمعلومية (X = 2.2) هى :

$$14.0 \pm (3.182)\ (2.7605) = 14.0 \pm 8.784$$

أو (5.216 , 22.784) . للمنزل الفردى الذى مساحته 2,200 قدم مربع ، سعر البيع يمكن أن يكون منحفض إلى المقدار $52,160 أو مرتفع إلى المقدار $227,840 بدرجة ثقة 95%. من الواضح أن ، هذا المدى واسع جداً لكى يمكننا من الإعتماد بشكل جاد على التنبؤ $140,000 .

نستخدم التنبؤ الآن في مثال تقييم الملكية لتوضيح العلاقة بين فترات التقدير **prediction intervals** لقيم Y الفردية وفترات الثقة لمتوسط **mean** قيمة Y ، بمعلومية X ؛ انظر شكل (٩-١٩).



شكل (٩-١٩) مقارنة فترات الثقة لمتوسط Y ،
وفترات التقدير لقيمة Y الفردية ، بمعلومية X على مدى قيم X

«حزمة أو نطاق الثقة confidence bands» تمثل الفترات التى تناظر مدى قيم X. هناك فترتين عند X=2.2 حددت سابقا في هذا البند، تم ايضاحهما على الرسم.

لاحظ مايلي (1) فترة التنبؤ تكون أوسع دائماً من فترة الثقة المناظرة لها عند المتوسط، (2) الفترات تصبح أكثر إتساعاً كلما اعتبرنا قيم X أبعد عن المركز والسبب فى ذلك موضح فى جزء (٩-٦).

مثال (٩-٦)

(أ) بالرجوع لمشكلة مطعم عش البلبل Bird's Nest، حددنا أن ($\hat{Y}$= 3.5 + .2X)، (S_e^2 = 1.875)، (SS(X) = 850)، ($\overline{X}$ = 30)، (n = 6) حدد فترة ثقة 95% لمتوسط الإيراد Y وكذلك فترة تنبؤ 95% لإيراد فترة مسائية فردية، بمعلومية أنه فى كلتا الحالتين (X = 30) من الزبائن. فسر نتائجك.

(ب) بالرجوع لمثال الأجر مقابل الخبرة، علمنا من جدول (٩-٤) أن ($\hat{Y}$ = 28.9 + 1.26X)، (S_e^2 = 352.3/14 = 25.1643)، وحددنا سابقاً أن (SS(X) = 1,539.4375)، ($\overline{X}$ = 15.3125)، (n = 16). المطلوب تكوين 95% فترة ثقة لمتوسط الأجر Y وكذلك فترة تنبؤ 95% بأجر معين فردى، اذا علمت أن (X = 15) سنة خبرة.

الحل

(أ) التقدير لمتوسط الإيراد عندما (X = 30) هو ($\hat{Y}$= 3.5 + .2(30) = 9.5) أو $950. الخطأ المعيارى لهذا التقدير هو:

$$SE\ (\hat{Y}) = \sqrt{(1.875)\left[\frac{1}{6} + \frac{(30-30)^2}{850}\right]} = .5590$$

وبالتالى فإن فترة ثقة 95% لمتوسط الإيراد هى ($t_{.975,4}$ = 2.776)

$$9.5 \pm (2.776)\ (.5590) = 9.5 \pm 1.552$$

أو (7.95 , 11.05). نستطيع أن نستنتج بدرجة ثقة 95% أن متوسط الإيراد عندما (X = 30) متردد يمكن أن يكون الإيراد منخفض إلى المقدار $975 أو مرتفع إلى المقدار $1,105.

الإيراد المتنبأ به لفترة مسائية عند (X = 30) متردد هو نفسه متوسط الإيراد المقدر – أى أن ($\hat{Y}$ = 9.5) (أو $950). لكن الخطأ المعيارى لهذا التنبؤ يكون أكبر بكثير.

$$SE_P(\hat{Y}) = \sqrt{(1.875)\left[1 + \frac{1}{6} + \frac{(30-30)^2}{850}\right]} = 1.4790$$

هكذا تكون فترة التنبؤ 95% بالإيراد لفترة مسائية واحدة مع 30 عميل هى:

$$9.5 \pm (2.776)\ (1.4790) = 9.5 \pm 4.11$$

أو (5.39 , 13.61). ومن ثم نستنتج بدرجة ثقة 95% أن إيراد الفترة المسائية الفردية يمكن أن يكون منخفض بمقدار $539 أو مرتفع إلى المقدار $1,361، بمعلومية أن (X = 30) عميل.

(ب) متوسط الأجر المقدر عندما $(X = 15)$ سنة خبرة هو :

$(\hat{Y}= 28.9 + (1.26)(15) = 47.8)$ أو \$47,800 . ويكون الخطأ المعيارى لهذا التقدير هو :

$$SE\ (\hat{Y}) = \sqrt{(25.1643)\left[\frac{1}{16} + \frac{(15-15.3125)^2}{1,539.4375}\right]} = 1.2547$$

وفترة الثقة 95% لمتوسط الأجر هى: $(t_{.975,14} = 2.145)$.

$$47.8 \pm (2.145)(1.2547) = 47.8 \pm 2.69$$

أو (50.49 , 45.11) . ونستنتج بدرجة ثقة 95% وعندما تكون $(X = 15)$ سنة من الخبرة، ان متوسط الأجر يمكن أن يكون منخفض بمقدار \$45,110 أو مرتفع بمقدار \$50,490 .

والتنبؤ بالأجر الفردى مع 15 سنة من الخبرة هو أيضاً $(\hat{Y} = 47.8)$ أو \$47,800 . ويكون الخطأ المعيارى :

$$SE_P(\hat{Y}) = \sqrt{(25.1643)\left[1 + \frac{1}{16} + \frac{(15-15.3125)^2}{1,539.4375}\right]} = 5.1709$$

لذلك تكون فترة التنبؤ بدرجة ثقة 95% للأجر الفردى مع 15 سنة من الخبرة كما يلى :

$$47.8 \pm (2.145)(5.1709) = 47.8 \pm 11.09$$

أو (58.89 , 36.71) . ويمكننا إستنتاج أنه بدرجة ثقة 95% ، أن فرداً مع 15 سنة خبرة يمكن أن يكون الأجر منخفض إلى 36,710 أو مرتفع إلى \$58,890 .

إستخدام الكمبيوتر :

يمكننا إستخدام الكمبيوتر لتحديد تقديرات وتنبؤات بالإضافة إلى فترات الثقة والتنبؤ، الأمر الفرعى PREDICT x فى برنامج Minitab، حيث x هى قيمة X المرغوبة، يلى الأمر REGRESS يعطينا قيمة $\hat{Y}$, SE $(\hat{Y})$ ، فترة ثقة 95% لمتوسط قيمة Y ، وفترة تنبؤ 95% لقيمة Y الفردية .

نستخدم الأمثلة الأربعة التى ناقشناها على مدى هذا الفصل لتوضيح إستخدام Minitab لهذا الغرض. لكل مشكلة، حددنا ثلاثة قيم للمتغير X : واحدة قريبة من مركز مدى X والاثنين الآخرين قريبين من الحدود (الأطراف) لتقييم الملكية ، $(X = 1, 2, 3)$ ؛ (عش البلبل Bird's Nest) ، $(X = 15, 30, 45)$ ؛ للأجر ، $(X = 3, 15, 27)$ للطاقة $(X= -4, 3, 9)$. المخرجات تتكون من قيم $\hat{Y}$، SE $(\hat{Y})$، فترات ثقة 95% ، فترات تنبؤ ، وهى معطاة لكل مثال فى جداول(٩-٦)، (٩-٧)، (٩-٨)، (٩-٩) على الترتيب . ومن هذه النتائج، يمكن ملاحظة أن أفضل تقدير وتنبؤ من حيث الدقة عندما تكون قيمة X المرغوبة هى نفسها القيمة $\overline{X}$. كلما بعدت قيمة X المطلوبة عن $\overline{X}$ فإن مقدار الدقة فى التقدير والتنبؤ تنخفض .

جدول (٩-٦)

فترة الثقة وفترة التنبؤ لمثال تقييم الملكية عندما X = 3,2,1

Fit	Stdev.	95% C.I.	95% P.I.
6.80	1.94	(0.63,12.97)	(-3.28,16.88)
12.80	1.12	(9.24,16.36)	(4.07,21.53)
18.80	1.94	(12.63,24.97)	(8.72,28.88)

جدول (٩-٧)

فترة الثقة وفترة التنبؤ لمثال مطعم عش البلبل عندما X = 15 , 30 , 45

Fit	Stdev.	95% C.I.	95% P.I.
6.500	0.899	(4.002,8.998)	(1.950,11.050)
9.500	0.559	(7.947,11.053)	(5.392,13.608)
12.500	0.899	(10.002,14.998)	(7.950,17.050)

جدول (٩-٨)

فترة الثقة وفترة التنبؤ لمثال الأجر عندما X = 3 , 15 , 27

Fit	Stdev.	95% C.I.	95% P.I.
32.73	2.01	(28.41,37.05)	(21.13,44.32)
47.86	1.25	(45.16,50.55)	(36.76,58.95)
62.98	1.95	(58.80,67.17)	(51.44,74.53)

جدول (٩-٩)

فترة الثقة وفترة التنبؤ لمثال الطاقة عندما X = -4 , 3 , 9

Fit	Stdev.	95% C.I.	95% P.I.
100.852	1.177	(98.356,103.349)	(94.828,106.877)
76.603	0.610	(75.309,77.897)	(70.970,82.236)
55.818	1.010	(53.676,57.960)	(49.923,61.704)

(٩-٥-٤) ملخص الاستدلال حول نموذج الإنحدار الخطى البسيط :

إجراءات الإستنتاج الإحصائى للنموذج الخطى البسيط يمكن تلخيصها كما يلى :

ملخص إستنتاجات عن نموذج الإنحدار الخطى البسيط

- لإختبار ($H_0: \beta_1 = 0$) إستخدم :

(1) الأحصاء T :
$$T = \frac{b_1 - 0}{SE(b_1)}$$

حيث:

$$SE(b_1) = \sqrt{S_e^2 / SS(X)} \quad , \quad SS(X) = \sum X_i^2 - \left[(\sum X_i)^2 / n\right]$$

أو

(2) تحليل التباين: الأحصاء F :
$$F = \frac{MSR}{MSE}$$

- فترة ثقة $(100\{1-\alpha\}\%)$ لميل المجتمع β_1 هى:

$$\hat{Y} \pm t_{1-\alpha/2,\, n-2}\ SE(b_1)$$

حيث :

$$SE(b_1) = \sqrt{\frac{S_e^2}{SS(X)}}$$

- فترة ثقة $(100\{1-\alpha\}\%)$ لمتوسط Y ، بمعلومية $(X = x)$ ، هو :

$$\hat{Y} \pm t_{1-\alpha/2,\, n-2}\ SE\ (\hat{Y})$$

حيث :

$$SE\ (\hat{Y}) = \sqrt{S_e^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{X})^2}{SS(X)}\right]}$$

- فترة تنبؤ $(100\{1-\alpha\}\%)$ لقيمة Y الفردية، بمعلومية $(X = x)$ ، هى :

$$\hat{Y} \pm t_{1-\alpha/2,\, n-2}\ SE_p(\hat{Y})$$

حيث :

$$SE_P(\hat{Y}) = \sqrt{S_e^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{X})^2}{SS(X)}\right]}$$

(٩-٦) العوامل التى تؤثر فى الأخطاء المعيارية للإنحدار : بعض إعتبارات التصميم

Factors that Affect Regression Standard Error : Some Design Considerations

إذا كانت لدينا الفرصة لرسم مجموعة من بيانات العينة، هل هناك أى شئ يمكننا عمله لتأكيد الدقة المقبولة لتقديرات الإنحدار المختلفة؟ للإجابة على هذا السؤال، نكون بحاجة لفحص العوامل التى تؤثر على الأخطاء المعيارية لمقدرات الإنحدار. سيكون هناك اهتمام خاص بالأخطاء المعيارية لكل من: لمقدر الميل b_1 ، قيمة المتوسط المقدر لـ Y ، بمعلومية $(X = x)$ ، القيمة المتنبأ بها لقيمة Y الفردية ، بمعلومية $(X = x)$. المعادلات لهذه الأخطاء المعيارية سنعيد تقديمها مرة أخرى :

$$SE(b_1) = \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{SS(X)}}$$

$$SE\ (\hat{Y}) = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{X})^2}{SS(X)}\right]}$$

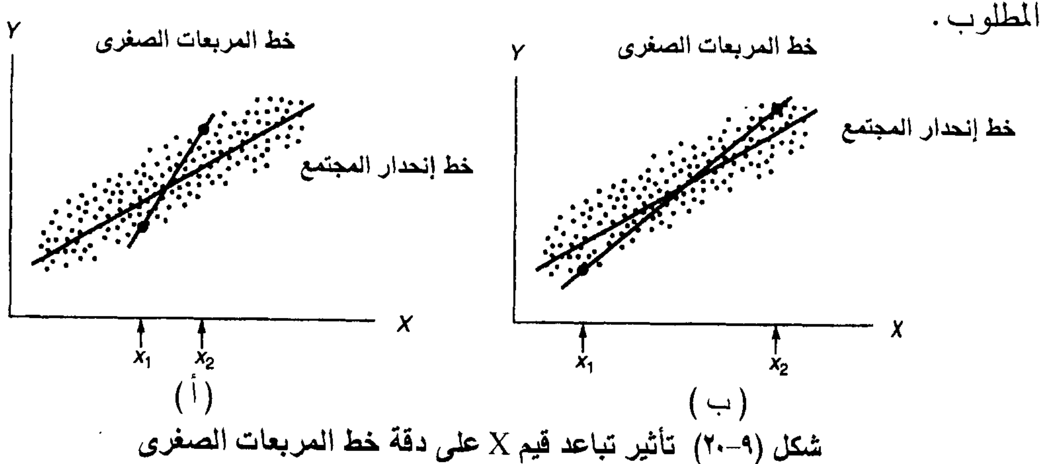
$$SE_P(\hat{Y}) = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{X})^2}{SS(X)}\right]}$$

دقق النظر في هذه المعادلات، هل الأخطاء المعيارية بها شئ مشترك؟ الإجابة، بالطبع نعم، الثلاث معادلات يعتمدون على تباين الخطأ σ_ε^2 . ويعتمدون أيضاً على SS(X) ، وهو الذي يقيس الإختلاف فى قيم X . أخيراً، الخطأين المعياريين الأخيرين يعتمدان بشكل مباشر على حجم العينة n والمقدار $(x-\overline{X})^2$ ، وهو يمثل مربع البعد بين القيمة المعينة x عن قيمة متوسط العينة $\overline{X}$.

دعنا نقوم بفحص هذه العوامل مع الأخذ فى الإعتبار مدى تأثيرها على دقة التقدير أو التنبؤ وبماذا توحى عند إختيار بيانات العينة .

1 . تباين الخطأ . تتذكر أن σ_ε^2 يقيس إلى أى مدى تتجمع فيه القيم Y حول خط إنحدار المجتمع . وهكذا ، كلما كان تباين الخطأ كبير ، كلما قلت درجة الإعتماد على التقديرات والتنبؤات . مع ذلك ، ضع في ذهنك أن تباين الخطأ المثالي لن يكون كبيراً، لأن الأخطاء العشوائية الحقيقية تكون صغيرة نسبياً. حيث أن تباين الخطأ σ_ε^2 تم تقديره عن طريق تباين البواقى S_e^2 ، فإنه دائماً ما يوصى بالتأكيد بأن قيمة S_e^2 لن تكون كبيرة بسبب إهمال باقى الحدود أو المتغيرات التفسيرية أو المتنبأ عندها **Predictor Variables** والتى يكون مطلوب إدخالها فى نموذج الإنحدار لكى يتم تحسينه .

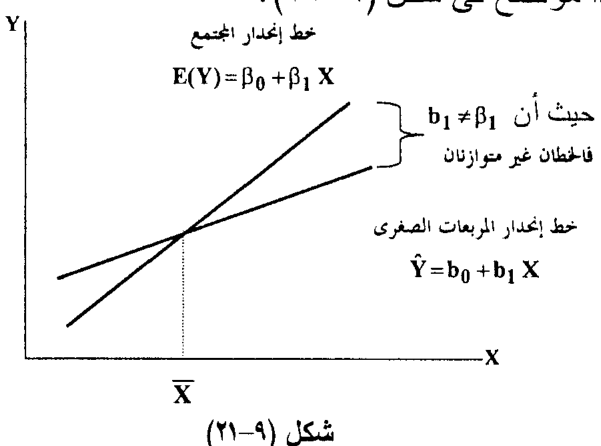
2 . الإختلاف فى قيم عينة المتغير المستقل أوالتفسيري **Predictor Variable** . كلما كان SS(X) كبيراً، كلما إتجهت التقديرات والتنبؤات لأن تكون أكثر دقة. بإسترجاع أن SS(X) يقيس الإختلاف الكلى لقيم X فى العينة. هكذا، كلما كبر مدى القيم فى بيانات العينة للمتغير المفسر X، كلما كان من المتوقع أن تكون تقديراتنا أكثر دقة. وإذا فكرنا لماذا يكون هذا صحيح؟ إفترض أننا نرغب فى تحديد خط إنحدار لعينة بها فقط (n=2) من المشاهدات. نقوم بعمل هذا بطريقتين مختلفتين . الطريقة الأولى، نختار قيمتين لـ X قريبتين جداً من بعضهما. الطريقة الثانية، نختار قيمتين لـ X بعيدتين عن بعضهما (الحالة الأخيرة تتضمن إختلافات Variability أكثر لعينة X). إفترض فى كل حالة أن أول قيمة مشاهدة Y تصادف أن تكون أصغر من المتوقع (بعبارة أخرى، أسفل خط إنحدار المجتمع)، والثانية تصادف أن تكون أكبر من المتوقع. هذا الوضع موضح فى شكل (٩-٢٠). لاحظ ماذا يحدث عندما ننشأ خطوط المربعات الصغرى. نقط البيانات المختارة تم تميزها عن طريق نقط كبيرة سوداء. فى شكل (٩-٢٠ أ)، حيث تكون قيمتى X قريبتين من بعضهما، نلاحظ أن خط المربعات الصغرى يكون أكثر إنحداراً من خط إنحدار المجتمع. فى شكل (٩-٢٠ب)على الجانب الآخر، عندما تكون قيمتي X بعيدتين جداً عن بعضهما، خط المربعات الصغرى يكون قريباً جداً من خط إنحدار المجتمع. هذا المثال البسيط يوضح لماذا تتحسن درجة دقة التقديرات والتنبؤات عندما يكون لإختلاف أكبر بين قيم X . هذه الفائدة الكبيرة تكون ممكنة فقط إذا كان لدينا مرونة فى إختيار قيم X والتي عندها نشاهد أو نسجل قيم عينة Y . وإذا أمكننا فعل هذا ، يجب علينا إختيار قيم X التي ينتج عنها أكبر اختلاف على المدى المطلوب .



شكل (٩-٢٠) تأثير تباعد قيم X على دقة خط المربعات الصغرى

3. حجم العينة . المقدار 1/n في معادلة $SE(\hat{Y})$ ، $SE_p(\hat{Y})$ يدل على أن هذه الأخطاء المعيارية تنخفض كلما زادت قيمة n . ولا يجب أن تكون هذه النتيجة مفاجأة لنا ، حيث أن الزيادة فى حجم العينة يجعل التقديرات اكثر موثوقية ، كما هو متوقع .

4. اقتراب قيمة X المطلوبة من $\overline{X}$. إن المقدار $(X-\overline{X})^2$ فى معادلة $SE(\hat{Y})$ ، $SE_p(\hat{Y})$ يدل على أنه كلما ابتعدت قيمة x المطلوبة عن $\overline{X}$ كثيراً ، كلما زاد الخطأ المعياري . وهكذا فإن قيم العينة X يجب أن يتم اختيارها إلى الحد الذى تكون فيه قيمة X المطلوبة للتقدير أو التنبؤ قريبة من متوسط قيم العينة X . هل تأثير هذا العامل يكون مفهوماً لك بديهياً؟ أعتبر التوضيح التالي: إحصاء المربعات الصغرى b_1 والذى سبق تعريفه بأنه المقدر الوحيد لميل المجتمع β_1 ، لذلك فإن قيمة b_1 والتى تعتمد فى حسابها على بيانات عينة معينة ، سوف يكون من المؤكد وجود خطأ بمقدار ما بها . حيث أن ميل خط المربعات الصغرى سوف يختلف نوعاً ما عن ميل خط إنحدار المجتمع ، فإن الخطان لن يكونا متوازيان . هذا موضح فى شكل (٩-٢١) .



شكل (٩-٢١)

تباعد خط المربعات الصغرى عن خط إنحدار المجتمع

عادة ما يتقاطع هذان الخطان بالقرب من مركز المدى لقيم (X) ، أى قريباً من $(X=\overline{X})$. كلما بعدت قيمة x المعينة عن $\overline{X}$ ، كلما إزداد ابتعاد (إنحراف) الخطان . الفرق بين الخطان يمثل خطأ التقدير الذى يحدث لأى قيمة معينة X . لذلك فإن خطأ التقدير يتجه للتزايد كلما إعتبرنا قيم X بعيدة عن $\overline{X}$.

تمارين

(٩-٤٤) إرجع إلى تمرين (٩-١٥) :

(أ) إستخدم خط المربعات الصغرى فى تحديد الوسط الحسابى لـ Y عندما (X = 7) .

(ب) بناء على فترة ثقة (95%) لمتوسط Y ، هل هذا المتوسط تم تقديره بدقة كبيرة؟ وضح .

(ج) إستخدم خط المربعات الصغرى للتنبؤ بقيمة Y عندما (X = 7). هل تختلف إجابتك عن التى كانت فى جزء (أ) ؟ وضح .

(د) بناء على فترة تنبؤ (95%) لقيمة Y الفردية عندما (X = 7) ، هل هذه القيمة قدرت بدقة معقولة؟ وضح .

(هـ) قارن إجابتك للفترات فى أجزاء (ب) ، (د). أى فترة تكون أوسع ولماذا تكون هذه الفترة أوسع ؟

(٩-٤٥) إرجع إلى تمرين (٩-٢٠) ثم أجب عن كل أجزاء تمرين(٩-٤٤) عندما (X = 4)

(٩-٤٦) إرجع إلى تمرين (٩-٢٢) ثم أجب عن كل أجزاء تمرين (٩-٤٤) عندما (X = 8)

(٩-٤٧) إرجع إلى تمرين (٩-١٢) ثم أجب عن كل أجزاء تمرين (٩-٤٤) عندما (X = 67)

(٩-٤٨) إرجع إلى تمرين (٩-١٠) ، وتمرين (٩-٣٦). وهي تتضمن العلاقة بين مبلغ التأمين على الحياة (Y) والدخل العائلى (X) :

(أ) قدر المبلغ المتوسط للتأمين عندما تكون دخول العائلة هى X حيث X تأخذ 15 ,35 ,60 (بآلاف الدولارات) .

(ب) لكل قيم X فى جزء (أ)، حدد فترات ثقة (95%) لمتوسط مبلغ تأمين الحياة. لأى قيمة لـ X تكون دقة التقدير أفضل ولماذا ؟

(ج) عند قيم X فى جزء (أ) ، حدد فترات تنبؤ (95%) لمبلغ تأمين الحياة الفردى ، وأجب على نفس السؤال كما فى جزء (ب).

(د) مع إعتبار إجابتك على هذا التمرين ، إضافة إلى تمارين (٩-١٠) ، (٩-٣٦)، هل تعتقد الآن أن خط المربعات الصغرى بالفعل ملائم ومناسب للتقدير والتنبؤ؟ فسر إجابتك .

(٩-٤٩) إرجع إلى تمرين (٩-١١) ، (٩-٣٧). وهو يتضمن العلاقة بين بداية الأجر (Y) ومتوسط نقط التقدير (X) . أجب عن أسئلة مماثلة لتلك الموجودة فى تمرين (٩-٤٨) عندما تكون متوسطات نقط التقدير X عبارة عن 2.70 , 3 , X = 3.30.

(٩-٥٠) بالرجوع إلى تمرين (٩-١٣)، (٩-٣٨) والذى يتضمن العلاقة بين الكمية المستهلكة من الكحول (Y) والسعر النسبى للكحول (X) . أجب عن أسئلة مماثلة لتلك الموجودة فى تمرين (٩-٤٨)عندما تكون الأسعار النسبية للمتغير X هى 3.5 , 4.6 , 5.8 سنت .

(٩-٥١) بالرجوع إلى تمرين (٩-١٤) ، (٩-٢٥) ،(٩-٣٩) والذى يتضمن العلاقة بين النسبة المئوية للضرائب المسددة (Y) وإجمالى الدخل (X) . أجب عن أسئلة مماثلة لتلك الموجودة فى تمرين (٩-٤٨)عندما يكون إجمالى الدخل X مساوياً 11 ، 42 ، 98 (بآلاف الدولارات) .

(٩-٥٢) بالرجوع إلى تمرين (٩-٤١) ، الذى يتضمن العلاقة بين مبلغ الفاتورة (Y) ، سعر البيع المحدد (X) لمؤسسة Express Graphic :

(أ) قدر متوسط مبلغ الفاتورة للأعمال التى سعرها المستهدف يساوى $5,000 .

(ب) حدد هامش خطأ المعاينة لتقديرك فى جزء (أ) بناء على مستوى ثقة (95%) .

(ج) بماذا توحى إجاباتك عن الجزء (أ)، (ب) للادارة بخصوص مصداقية سعر البيع المستهدف؟ فسر إجابتك .

(د) إفترض أنه تم سؤالك لتحديد هامش خطأ المعاينة للتنبؤ بالمبلغ الفعلى بالفاتورة لعمل فردى الذى كان سعره المستهدف $5,000 . بدون حساب أى شئ، هل هامش خطأ المعاينة هذا سوف يكون أقل من ، مساوى ، أو أكبر من المحسوب فى جزء (ب) ، ولماذا؟

(٩-٥٣) إرجع إلى تمرين (٩-٤٢) ، الذى يتضمن العلاقة بين سرعة الطباعة (Y) وصعوبات التسجيل (X) لشركة الطباعة Express Graphics :

(أ) تنبأ بسرعة الطبع للنشاط أو العملية المصنفة 1 (صعب) .

(ب) حدد فترة تنبؤ (95%) لسرعة الطباعة عندما X = 1 .

(ج) إذا كنت المدير ، كيف ستصف فائدة التنبؤ فى جزء (أ) بناء على إجابتك لجزء (ب) ؟

(٩-٥٤) بالرجوع إلى تمرين (٩-١٢)، الذى يوضح العلاقة بين الطول (X) والوزن (Y) للموظفين الإناث فى شركة كبيرة . وبإفتراض أنه توجد مرونة لإختيار عدد الموظفين الإناث الذين يكون طولهم فى المدى من 62 إلى 70 بوصة. إذا علم أن العلاقة خطية بشكل قاطع، لأى أطوال يجب أن تختار لمشاهدة الأوزان؟ ولماذا يجب أن يتم إختيار هذه الأطوال؟

(٩-٥٥) بالرجوع إلى تمرين (٩-١٠)، وفيه يرغب محلل التأمين تحديد العلاقة بين الدخل العائلى (X) ومبلغ تأمين الحياة (Y) . إفترض أن المحلل يرغب فى تحديد هذه العلاقة للدخول العائلية فى المدى من $20,000 إلى $100,000 . وبإفتراض أن المحلل لديه مرونة فى إختيار الدخول العائلية (قيم X) لملاحظة مبالغ تأمين الحياة :

(أ) إذا علم أن العلاقة خطية بشكل قاطع، لأى دخول عائلية يجب أن يلاحظ المحلل مبالغ تأمين الحياة ولماذا ؟

(ب) إفترض أن هذه العلاقة تأخذ شكل منحنى . هل سوف تكون إجابتك نفسها كما في جزء (أ)؟ وضح .

(٩-٧) الإرتباط : قياس الإرتباط الخطى بين X , Y :

Correlation: Measuring The Linear Association Between Y and X

فى الأجزاء السابقة ، إفترضنا الإرتباط الخطى بين المتغيرات X , Y . بتحديد خط المربعات الصغرى بناء على العينة التى يمثلها، كنا قادرين على صياغة نموذج لتوضيح طبيعة هذه العلاقة الخطية. فى الواقع، كنا قادرين على تحديد ما اذا كان الإرتباط الخطى بين X , Y يمكن إعتباره مقبول عن طريق إختبار الفرض العدمى $(H_0 : \beta_1 = 0)$ أم لا . إضافة لذلك، عرفنا معامل التحديد r^2، وهو مقياس نسبى لمدى جودة توفيق الخط المستقيم فى قيم العينة Y . قريب من ذلك يوجد مقياس إحصائى وصفى معروف بمعامل الإرتباط مرتبط بتلك الأفكار. فى الواقع، قيمة معامل الإرتباط هى الجذر التربيعى لمعامل التحديد. معامل الإرتباط، يرمز له بالرمز r ، يقيس درجة الإرتباط الخطى بين متغيرين X , Y بناء على عينة من المشاهدات. مثل r^2 فإن r هو مقياس محرر **Free Scale**؛ هكذا ، يكون تفسيره مستقل عن الوحدات التى تقيسهما قيم X , Y . وسوف نقدم الصيغة التى

تحدد معامل الإرتباط ، ثم نركز بصفة خاصة على تفسيره .

تحديد معامل الإرتباط :

صيغة تحديد معامل الإرتباط وطريقة اشتقاقها تكون خارج نطاق هذا الكتاب وهي كالتالى :

$$r = \frac{SP(XY)}{\sqrt{SS(X)SS(Y)}} \qquad \textbf{(9.33)}$$

للتوضيح، دعنا نحسب قيمة r لمثال تقييم الملكية. وجدنا أن (SP(XY) = 15.0) ، (SS(X) = 2.5) ، (SS(Y) = 108.8) ، وهكذا يكون معامل الإرتباط :

$$r = \frac{15.0}{\sqrt{(2.5)(108.8)}} = .9095$$

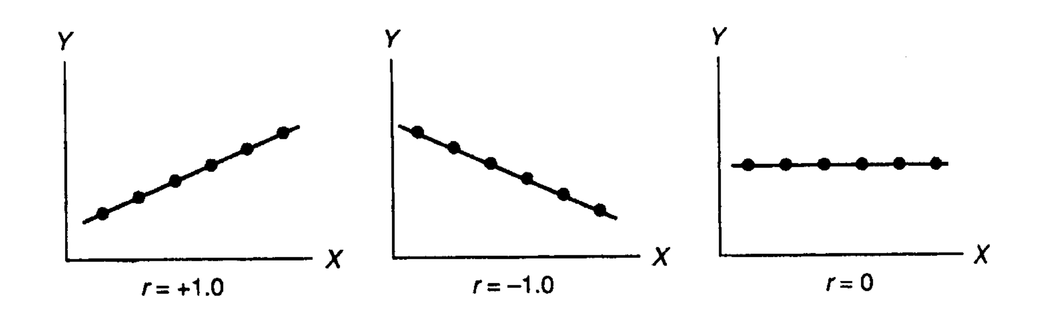
تفسير معامل الإرتباط :

الآن ، ماذا تعنى هذه النتيجة ؟ أولاً r تكون دائماً واقعة بين1- , 1+ . هذا يكون صحيح لأى بيانات ، بغض النظر عن الوحدات الأصلية. لغرض المناقشة، إعتبر القيم r = +1 , r = -1 , r = 0

(1) (r = +1) تدل على العلاقة الخطية التامة بين X , Y مع وجود ميل موجب . أى أن هناك علاقة موجبة تامة بين المتغيرين X , Y .

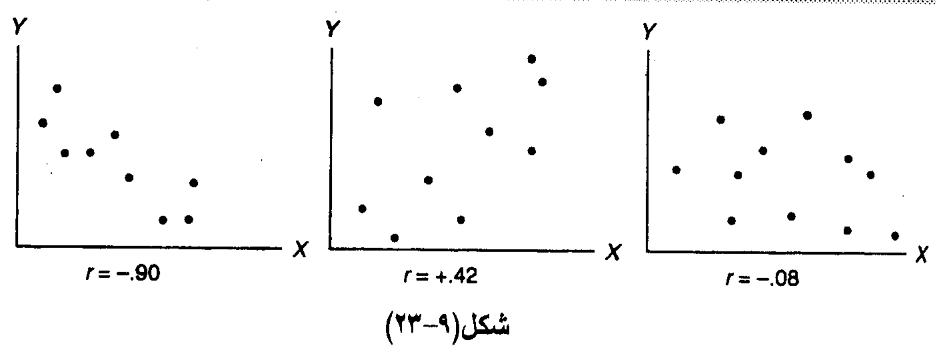
(2) (r = -1) تدل على العلاقة الخطية التامة بين X , Y لكن مع ميل سالب. أى أن هناك علاقة سالبة تامة بين المتغيرين X , Y .

(3) (r = 0) تدل على عدم وجود علاقة خطية بين X , Y. كما نرى ، هذا يعنى أن الميل لخط إنحدار المجتمع يكون 0 ، هذه الحالات الثلاث موضحة فى شكل (٩-٢٢) .



شكل (٩-٢٢)
طبيعة العلاقة الخطية عندما r تساوى 1+ , 1- , 0

الحالات الموضحة فى الشكل نادراً ما تحدث فى الحياة العملية. وهكذا فإن r تكون دائماً قيمة ما غير صفرية بين 1- , 1+ . قيمة r تعتمد على كل من قيمة الميل b_1 وإختلاف بيانات العينة حول خط المربعات الصغرى. بشكل عام ، r تتناسب طردياً مع الميل b_1 ، وتتناسب عكسياً مع الإنحراف المعيارى للبواقى S_e. أمثلة نموذجية موضحة فى شكل (٩-٢٣) .



شكل(٩-٢٣)

أمثلة لمعاملات الإرتباط لبيانات ثلاث عينات

من شكل (٩-٢٣) يمكننا إستنتاج أنه كلما اقتربت قيمة r من 1+ أو 1- على السواء، كلما قوى الإرتباط الخطى بين X , Y . على الجانب الآخر، كلما قربت قيمة r من 0 ، كلما كان الإرتباط الخطى بين X , Y أكثر ضعفاً .

المقارنة بين r^2 , r , b_1 فى وصف الإرتباط الخطى :

تذكر أن إحصاء المربعات الصغرى b_1 تقدم معلومات تفصيلية عن العلاقة الخطية، لأنها تقدر التغير المحدد فى Y المناظر للتغير فى X . معامل التحديد أيضاً يقدم معلومات عن العلاقة الخطية لأنه مقياس حر لمدى جودة توفيق الخط المستقيم لقيم Y . حيث أن معامل الإرتباط r يقيس درجة الإرتباط الخطى بين X , Y ، فلن يكون مفاجأة أن نجد أن هذه الكميات الثلاث تكون مرتبطة عن قرب .

كما ذكرنا ، معامل التحديد هو مربع معامل الإرتباط ، لمثال تقييم الملكية، وجدنا ($r = .9095$) ، لذلك يكون معامل التحديد ($r^2 = .9095^2 = .8272$) ، كما علمناها منذ قليل، اذا كان أحد هذه الكميات يمكن تحديده من الكمية الأخرى، لماذا يكون كل منها شائع الإستخدام؟ الإجابة بسيطة : أن تفسيراتهم مختلفة نوعاً ما ، حيث أن :

$$r = SP(XY) / \sqrt{SS(Y)SS(X)} \quad , \quad b_1 = SP(XY) / SS(X)$$

ويمكن توضيح أن إحصاء المربعات الصغرى b_1 ومعامل الإرتباط r مرتبطين رياضياً عن طريق :

$$b_1 = r\sqrt{\frac{SS(Y)}{SS(X)}} \tag{9.34}$$

لاحظ أنه إذا كانت ($r = 0$) فإن ($b_1 = 0$) والعكس بالعكس. أكثر من ذلك، فإن إشارة b_1 هى نفسها إشارة r دائماً - بعبارة أخرى، إذا كانت قيم r^2 ، b_1 معلومة فإن r وإشارتها تكون معلومة، حيث أن $r = \sqrt{r^2}$ وإشارة r هى نفسها إشارة b_1 .

مثال (٩-٧)

بالنسبة لمثال الطاقة مقابل درجة الحرارة، حدد وفسر الإرتباط بإستخدام مخرجات الكمبيوتر المعطاة فى جدول (٩-٣).

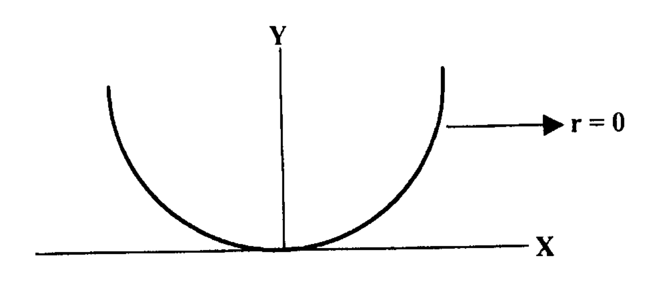
الحل

من مخرجات الكمبيوتر ، رأينا أن ($b_1 = -3.464$) ، ($r^2 = .975$) . لذلك ، قيمة r تساوى $\sqrt{.975}$-،

حيث أن قيمة b_1 سالبة فإن ($r= -\sqrt{.975} = -.98746$). وحيث أن قيمة معامل الإرتباط (.987-) قريبة من (-1) فإن هذا يدل على الإرتباط الخطى القوى بين الطاقة ودرجة الحرارة وحيث أن r سالبة، فإن العلاقة تكون عكسية. أى إذا ارتفعت درجة الحرارة فى الشتاء فإن مقدار الطاقة المستخدمة فى التدفئة تقل .

معامل الإرتباط عندما تكون العلاقة بين Y ، X غير خطية :

وأخيراً، فإنه من الأهمية بمكان أن نؤكد مرة أخرى على أن r تقيس فقط درجة الإرتباط الخطى بين X, Y . ومن الممكن أن تكون X , Y مرتبطين بطريقة غير خطية. للتوضيح، إعتبر الرسم فى شكل (٩-٢٤)، حيث تكون Y مرتبطة بشكل تام مع X ، لكن بشكل غير خطى على الإطلاق . فى مثل هذه الحالة فإن معامل الإرتباط يكون 0 . لهذا السبب عندما كنا نفسر ماذا تقيس r^2 فى جزء (٩-٣-٤) ، ذكرنا أن r^2 لا يمكن أن تقيس صحة الإنحدار المفترض .



شكل (٩-٢٤)

الإرتباط التام غير الخطى بين X , Y عندما يكون معامل الإرتباط يساوى الصفر

تمـاريـن

(٩-٥٦) وضح المقصود بمعاملات الإرتباط الافتراضية التالية :

(أ) $(r = -1)$ (ب) $(r = 0)$ (ج) $(r = +1)$

(٩-٥٧) عند إنشاء نموذج الإنحدار الخطى ، وجد أن
$(SS(Y) = 129)$ ، $(SS(X) = 9.5)$ ، $(SP(XY) = 21.4)$. حدد معامل الإرتباط .

(٩-٥٨) عند إنشاء نموذج إنحدار خطى، وجد أن $(b_1= -2.58)$ ، $(r^2 = .8238)$ ، حدد معامل الإرتباط .

(٩-٥٩) عند إنشاء نموذج إنحدار خطى ، وجد أن $(SS(Y) = 98)$ ، $(SS(X) = 38.6)$ ، $(r = .6525)$ حدد تقدير المربعات الصغرى للميل .

(٩-٦٠) إذا عوضنا عن قيم X : (4 , 3 , 2 , 1 , 0 , 1- , 2- , 3- , 4-) فى العلاقة الرياضية $(Y = X^2)$ ، نحصل على قيم Y المناظرة : (16 , 9 , 4 , 1 , 0 , 1 , 4 , 9 , 16) .

(أ) ارسم علاقة X , Y .

(ب) حدد معامل الإرتباط بإستخدام قيم X , Y . هل أنت مندهش من إجابتك ؟ وضح .

(٩-٦١) إستخدم المعلومات المتاحة لك، وحدد معامل الإرتباط للتمارين التالية :

(أ) تمرين (٩-١٥) . (ب) تمرين (٩-٤٠). (ج) تمرين (٩-٤١) .

(٩-٦٢) أظهرت إحدى الدراسات أن معامل الإرتباط بين مكاسب ممثلى المبيعات (Y) وعدد المكالمات التى يقومون بها لمحاولة البيع (X_1) هو 44. وأوضحت نفس الدراسة أن معامل الإرتباط بين المكاسب (Y) وعدد الساعات المنقضية فى المهام الإدارية (X_2) هو 55.- . أى عامل ، X_1 أو X_2 يظهر إرتباط خطى أكثر قوة بالمكاسب ؟ برر إجابتك .

(٩-٦٣) يقوم مكتب القبول بأحد الجامعات بدراسة مؤشرات الطلاب بالمرحلة الثانوية وأدائهم فى الكليات ، حيث يقاس ذلك عن طريق متوسط تقديراتهم فإذا توافرت بيانات عن الإنتهاء من مرحلة الثانوية وكذا مستوى الأداء بالكلية لعينة مكونة من 498 طالب حديث. وكان معامل الإرتباط بين تقدير الكلية (GPA) وتقدير المدرسة الثانوية (GPA) ووجد أنه يساوى 42. ووجد أن معامل الإرتباط بين تقدير الكلية (GPA) وترتيب المدرسة الثانوية يساوى 36 .

(أ) بناءً على العلاقة الخطية ، أيهما يبدو المؤشر الأقوى لأداء الكلية ؟ وضح .

(ب) فى التنبؤ بأداء الكلية، إلى أى مدى يساعد هذا فى معرفة تقديرات طلبة المدارس الثانوية GPAs (في مقابل عدم وجود معلومات عن المدرسة الثانوية على الإطلاق)؟

(ج) أى جزء للاختلافات Variability بين تقديرات طلبة الكليات (GPAs) تم تفسيره عن طريق الإختلافات بين تقديرات مدارسهم الثانوية (GPAs) ؟

(٩-٨) الإنحدار الخطى البسيط : مثال شامل : A Comprehensive Example

هذا المثال مبنى على تطبيق فعلى فى شركة Xerox . البعد الوحيد عن الواقعية هو التغيير فى البيانات . البيانات الأصلية مسجلة، وتم تبسيط المثال عن طريق تقديم عينة صغيرة لبيانات مصطنعة. ظروف العمل ، الإصدارات، والقواعد الإحصائية المتضمنة مطابقة للحالة الفعلية. الحسابات تم تنفيذها بإستخدام الكمبيوتر .

فى شركة Xerox . تم إجراء بحث موسع لدراسة السوق . تم أخذ عينة من 500 مؤسسة من قائمة 900,000 مؤسسة صغيرة فى الولايات المتحدة، تم الحصول عليها من خلال شركة Dun & Bradstreet . المجتمع محل الاهتمام يتكون من كل المؤسسات الصغيرة فى الولايات المتحدة. إطار إختيار العينة يتكون من قائمة Dun & Bradstreet . «المؤسسة الصغيرة» تم تعريفها على أنها المؤسسة التى تضم 50 موظف أو أقل . بعض المعلومات الوصفية تم تقديمها عن طريق Dun & Bradstreet لكل مؤسسة فى المجتمع . المتغير المستقل (المفسر) الأساسي للدراسة كان عدد الموظفين فى كل مؤسسة.

تم زيارة كل مؤسسة فى العينة ، وتم الحصول على معلومات تفصيلية بخصوص طريقة النسخ أو التصوير. البند الأساسى لمعلومات هذه الدراسة كان متوسط عدد النسخ التى تقوم بها المؤسسة بتصويرها فى اليوم . هذا المتغير يسمى «حجم النسخ» . الإدارة فى Xerox تعتقد أن حجم أو عدد النسخ التي يتم تصويرها للمؤسسات يتجه للزيادة كلما تزايد عدد الموظفين – موظفين أكثر، يعني تصوير نسخ أكثر فى المتوسط. ويعتقدون أيضاً أن طرق التصوير (النسخ) فى المؤسسات تعتمد نوعاً ما على نوع المؤسسة – أى ، الصناعة التى تنتمى إليها ، يتم تعيين هذا عن طريق كود التصنيف الصناعى المعيارى (SIC) للمؤسسة، أيضاً تم تقديمه عن طريق Dun & Bradstreet . الأمثلة

للمؤسسات هى «الكليات والجامعات» ، «البنوك» ، «المصانع» فى هذا المثال، نختبر البيانات التى تخص المؤسسات المصرفية .

ومن البنوك التي تم إختيارها في هذه الدراسة، كان الاهتمام بعدد من 8 إلى 50 من العاملين بهذه البنوك للتأكيد على درجة الدقة المقبولة فى التنبؤات والتقديرات، أراد فريق الإستقصاء أن ينشأ إختلاف كبير بين قيم X (عدد الموظفين) ضمن المدى المهتم به. بشكل أولى، أراد الفريق أخذ عينة لعدد نسخ التصوير (قيم Y) لخمس بنوك بعدد موظفين (8-10) لكل بنك وخمس بنوك بعدد موظفين (48-50) لكل بنك (القيم المتطرفة فى مدى X) . لكن أحد الأشخاص فى فريق الإستقصاء ذكر أن قسم التخطيط يرغب فى تقدير حجم الأوراق التي تم تصويرها (نسخها) للبنوك بعدد موظفين 30 . إضافة لذلك ، تم إدراك أنه إذا كان هناك شكل منحنى فى العلاقة بين حجم النسخ وعدد الموظفين ، فلا يمكن إكتشافها بإستخدام القيم المتطرفة فقط فى مدى X . لذلك، تم إختيار 5 بنوك فى المدى المتوسط (28-30) موظف لكل بنك. إضافة إلى أطراف المدى X. كنتيجة لذلك، تم الحصول على بيانات العينة التالية :

عدد الموظفين (X)	8	9	9	10	10	28	29	29
حجم النسخ اليومى(Y)	8	13	17	15	23	56	46	60
عدد الموظفين (X)	30	30	48	48	49	50	50	
حجم النسخ اليومى(Y)	52	65	86	90	95	99	88	

فإذا رغبت إدارتان في شركة Xerox فى إستخدام هذه الدراسة :

(1) قسم التخطيط يرغب فى تقدر حجم الأوراق المصورة (النسخ) للبنوك التي بها عدد 30 موظف (30 كان رقم من أرقام benchmark العديدة فى عمليتهم التخطيطية) . وقد استخدموا معلومات Dun & Bradstreet حيث يوجد 800 مؤسسة بنكية بها 30 موظف تقريباً، لذلك كانوا بحاجة إلى تقدير متوسط حجم النسخ لهذه المؤسسات .

(2) إدارة المبيعات ترغب فى عمل نموذج للتنبؤ بحجم النسخ للبنوك الفردية (المفردة) ، بمعلومية عدد الموظفين. ممثلى المبيعات يمكنهم إستخدام هذا التنبؤ فى إعداد عروضهم لعملائهم فيما يتعلق بالحجم الملائم للناسخين للعميل . الغرض من تحليل الإنحدار فى هذا المثال هو تقديم نموذج يشبع حاجات كل من قسم التخطيط وإدارة المبيعات .

أسئلة مناسبة لهذه الدراسة :

١- كيف يظهر حجم النسخ (Y) ليكون معتمد على عدد الموظفين (X) ؟ هنا يجب علينا تقدير علاقة X , Y ببيانات العينة .

٢- هل علاقة Y تجاه X فى العينة تقدم دليل قوى على الإرتباط بين X , Y فى المجتمع؟ أو بمعنى اخر، هل العلاقة بينهما ترجع إلى المعاينة العشوائية التي تمت بين مجتمع لايوجد فيه إرتباط بين X، Y ؟

٣- إفترض أن العينة تدل بشكل مقنع على أن حجم النسخ مرتبط بعدد الموظفين. ما مدى دقة نموذج إنحدار المربعات الصغرى فى تصوير العلاقة Y تجاه X ؟ هل هذا المستوى من الدقة يجعل معادلة الإنحدار المقدرة صالحة للإستخدام عن طريق كل من التخطيط للمبيعات أو التخطيط السوقى؟ هل هناك أى إخلال ملحوظ لإفتراضات الإنحدار الضرورية ؟

٤- إفترض أن قسم التخطيط أو دراسة السوق كان يستخدم معادلة إنحدار المربعات الصغرى لتقدير متوسط حجم النسخ للمؤسسات فى المجتمع بعدد 30 موظف .

(أ) ما هو تقديرهم .

(ب) ما هى الدقة التى يتوقع أن يكون عليها هذا التقدير ؟.

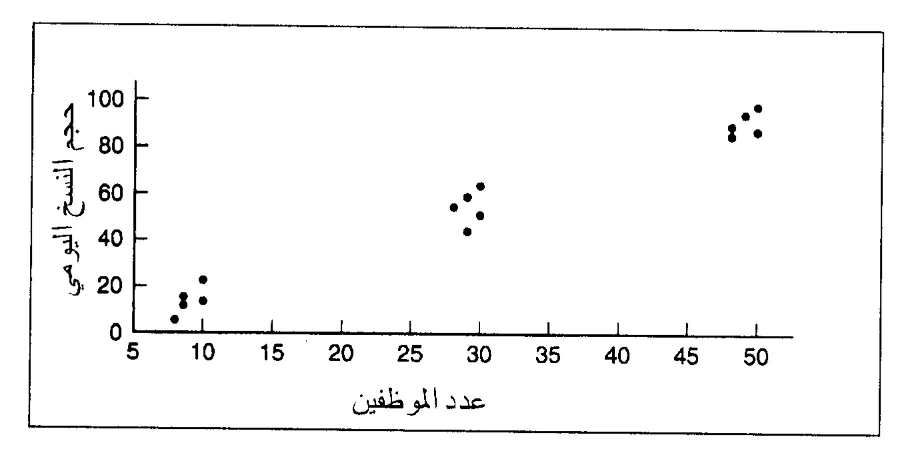
٥- إفترض أن إدارة المبيعات استخدمت معادلة إنحدار المربعات الصغرى فى التنبؤ بحجم النسخ لمؤسسة بنكية جديدة (ليست فى العينة) بعدد 30 موظف :

(أ) ما هو العدد الذى يمكنهم التنبؤ به ؟

(ب) ما مدى الدقة التى يتوقعونها لتنبؤهم ؟

إجابة الأسئلة ١ ، ٢ :

شكل الإنتشار يقدم دليل أولى واضح للعلاقة Y تجاه X . شكل الإنتشار (٩-٢٥) يظهر وجود إرتباط خطى قوى بين حجم النسخ وعدد الموظفين .



شكل(٩-٢٥)

الشكل الإنتشارى لحجم النسخ مقابل لعدد الموظفين

إضافة لذلك ، لا يوجد شكل إنحنائي يمكن تمييزه فى هذه العلاقة ، لذلك فإن توفيق الخط المستقيم يكون كافياً تماماً. ولقد تم الحصول على خط المربعات الصغرى والمعلومات الهامة الأخرى عن طريق البرنامج الإحصائى Minitab . ومخرجات الكمبيوتر معطاة فى جدول (٩-١٠).

بناء على هذا المثال ، فإن تقدير متوسط حجم النسخ Y بمعلومية عدد الموظفين X ، وعن طريق خط المربعات الصغرى .

$$\hat{Y} = -1.82 + 1.92X$$

وحيث أن مدى X لا يتضمن 0 ، فإن تقدير الجزء المقطوع ليس له معنى حقيقى فى هذه المشكلة. لكن تقدير الميل ($b_1 = 1.92$) له بالفعل معنى معين. فهو يعنى أن موظف واحد إضافى يؤدى إلى وجود زيادة إضافية مقدارها 1.92 نسخ كل يوم ، فى المتوسط .

إجابة السؤال ٣ :

بناء على مخرجات الكمبيوتر ، يجب أن يكون واضحاً لك من خلال قيم T أو F (F = 503,02 أو T = 22.43) أن الفرض العدمى بعدم وجود إرتباط خطي بين Y ، X ($H_0 : b_1 = 0$) يتعارض بشدة مع بيانات العينة (قيمة P تكون فعلياً 0). الأكثر أهمية أن ميل خط إنحدار المجتمع تم تقديره بدقة كبيرة. الدليل الواضح على هذا، هى حقيقة أن الخطأ المعيارى للاحصاء b_1 صغير جداً ($SE(b_1) = .08574$) بالنسبة لميل المربعات الصغرى $b_1 = 1.92295$. بعبارة أخرى، قيمة T ($T = 22.43$) كبيرة تماماً. كنتيجة لذلك، فترة الثقة للميل β_1 يتوقع أن تكون ضيقة. على سبيل المثال فترة الثقة (95%) للمؤشر β_1 هى : ($t_{.975,13} = 2.160$):

$$1.92295 \pm (2.160)\,(.08574) = 1.92295 \pm .185$$

أو (1.738 , 2.108) بدرجة ثقة (95%) ، هذه الفترة تعنى أن موظف إضافى يمكن أن يساهم بمقدار صغير من النسخ مثل 1.738 لكل يوم أو مقدار كبير إضافى من النسخ مثل 2.108 لكل يوم ، فى المتوسط، وضيق هذه الفترة يوضح أن الميل β_1 تم تقديره بدرجة دقة كبيرة .

لاحظ أيضاً أن قيمة معامل التحديد قريبة جداً من واحد ($r^2 = .975$) هذا يعنى أن 97.5% من الإختلاف الكلى فى عينة حجم النسخ تم تفسيره عن طريق خط المربعات الصغرى ($\hat{Y} = -1.82 + 1.92X$) .

أخيراً، عندما رسمنا البواقى فى شكل (٩-٢٦) لاحظنا عدم وجود نمط يمكن تميزه. هذا يعنى أننا لم نكتشف أى اختلال ملحوظ للفروض. لذلك فإن توفيق الخط المستقيم يظهر أنه كاف تماماً ويجب إستخدامه للتقدير والتنبؤ من خلال المدى محل الاهتمام في الدراسة .

جدول (٩-١٠)

نتائج مخرجات المثال الشامل بإستخدام Minitab

```
The regression equation is volume = -1.82 + 1.92 number

Predictor        Coef        Stdev       t-ratio        p
Constant       -1.822        2.861         -0.64    0.535
number        1.92295      0.08574         22.43    0.000

s = 5.402    R - sq = 97.5%    R - sq(adj) = 97.3%

Analysis of Variance

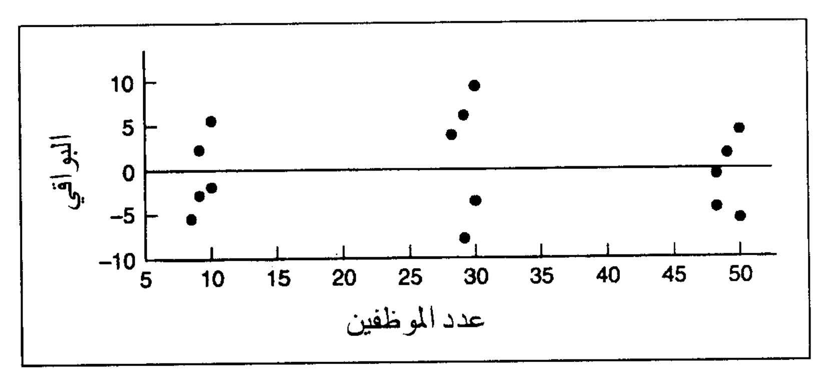
SOURCE         DF          SS           MS          F        p
Regression      1       14679        14679     503.02    0.000
Error          13         379           29
Total          14       15058
```

Fit	STdev.Fit	95% C.I.	95% P.I.
55.87	1.40	(52.85, 58.88)	(43.81, 67.92)

ROW	number	volume	yhat	residual
1	8	8	13.5617	-5.56165
2	9	13	15.4846	-2.48460
3	9	17	15.4846	1.51540
4	10	15	17.4076	-2.40755
5	10	23	17.4076	5.59245
6	28	56	52.0207	3.97934
7	29	46	53.9436	-7.94361
8	29	60	53.9436	6.05639
9	30	52	55.8666	-3.86656
10	30	65	55.8666	9.13344
11	48	86	90.4797	-4.47966
12	48	90	90.4797	-0.47966
13	49	95	92.4026	2.59739
14	50	99	94.3256	4.67444
15	50	88	94.3256	-6.32556

إجابات الأسئلة ٤ ، ٥

من جدول (٩-١٠) لاحظنا أنه إذا إستخدمت إدارة التخطيط السوقى النموذج عندما $(X = 30)$، فإن متوسط حجم النسخ المقدر يكون $(\hat{Y}) = 55.87$ ، فترة ثقة 95% تكون (52,85 , 58.88). لذلك فإنه عندما تكون $(X = 30)$ موظف، فإن متوسط عدد النسخ يمكن أن يكون صغير بمقدار 52.85 أو كبيراً بمقدار 58.88 بدرجة ثقة (95%) .



شكل (٩-٢٦)

الشكل الإنتشارى للبواقى لحجم النسخ مقابل عدد الموظفين

إذ إستخدمت إدارة المبيعات النموذج عندما $(X = 30)$ ، حجم النسخ المتنبأ به للمؤسسة البنكية بعدد 30 موظف هو أيضاً $(\hat{Y}) = 55.87$. لكن ، كما نتوقع فترة تنبؤ (95%) تكون (43.81 , 67.92) وتكون أوسع من فترة الثقة المناظرة لمتوسط حجم النسخ، بمعلومية $(X = 30)$ موظف. فترة التنبؤ (43.81 , 67.92) تعنى أن بنك جديد بعدد $(X = 30)$ موظف يمكنه إضافة عدد نسخ قليلة بمقدار 43.81 لكل يوم أو كبيرة بمقدار 67.92 بدرجة 95% . كل من فترات الثقة والتنبؤ يجب أن يكون مفيداً تماماً لتخطيط السوق والمبيعات، على التوالى ، لأنها تكون فترات ضيقة نسبياً .

(٩-٩) ملخص : Summary

في هذا الفصل ، عرضنا الأشكال المختلفة لتحليل الإنحدار الخطي البسيط لبناء الإرتباط بين المتغير التابع response variable والمتغير المفسر predictor variables المحتمل. وافترضنا أن العلاقة بين هذه المتغيرات هي الخط المستقيم واستخدمنا تحليل الإنحدار لتقدير وتقييم حدود هذه العلاقة الخطية المفترضة .

الغرض الأساسي لنموذج الإنحدار هو تمثيل النظم المعقدة ببساطة وبشكل سهل وتقديم فهم أفضل لخصائص النظام . إضافة لذلك ، نموذج الإنحدار يستخدم للتقدير والتنبؤ بقيم المتغير التابع . بالتالي، يكون من المهم التأكيد على ما إذا كان نموذج الإنحدار يؤدي بشكل كاف للإستخدام المطلوب أم لا . في هذا السياق ، تظهر ثلاث أسئلة هامة : (1) هل بيانات العينة تدل على وجود إرتباط خطي بين المتغيرين؟ (2) ما مدى دقة التقديرات و / أو التنبوءات ؟ (3) هل يمكن تحسين نموذج الإنحدار المفترض عن طريق إعتبار متغيرات مفسرة أخرى محتملة؟ هذه الأسئلة يمكن الاجابة عليها عن طريق مزيج من أساليب الرسم البياني والإستنتاجات الإحصائية على المعالم الهامة للنموذج المفترض .

المراجع : References

1. N. Draper and H. Smith . *Applied Regression Analysis*, 2nd ed. New York: Wiley, 1981.
2. W. Mendenhall and T. Sincich. *A Second Course in Business Statistics: Regression Analysis*, 4th ed. San Francisco: Dellen, 1993 .
3. R. B. Miller and D. W. Wichern. *Intermediate Business Statistic: Analysis of Variance, Regression, and Time Series.* New York: Holt, Rinehart & Winston, 1977 .
4. J. Neter W. Wasserman, and M. Kutner. *Applied Linear Statistical Models,* 2nd ed. Homewood, Il: Richard D. Irwin, 1985 .
5. M. Younger. *A Handbook for Linear Regression,* 2nd ed. Boston : Duxbury Press, 1985 .

تمارين إضافية :

بالنسبة للتمارين الإضافية التالية ، يكون الهدف النهائي هو تحديد إذا كان خط المربعات الصغرى له معنى وكاف للتقدير والتنبؤ أم لا عن طريق تحديد قوة العلاقة الخطية بين المتغيرات المفسرة والتابعة. ويجب أن يشتمل التحليل على الآتي : شكل إنتشار ، تحديد وتفسير خط المربعات الصغرى ، تطبيق وتفسير الإحصاء F , T ، تحديد وتفسير فترة ثقة (95%) لميل المجتمع β_1 ، تحديد وتفسير r^2 ثم تحليل للبواقي .

(٩-٦٤) يرغب محلل إحصائي في مستشفى ما أن يختبر الدرجة التي يتم بها تحديد فترة الإقامة بالمستشفى للعناية الطبية لمريض ما ، يتم تحديدها عن طريق عمر المريض . ولدينا عينة من 42 مريض كانت كما يلي :

العمر	63	66	67	68	68	69	69	69
مدة الإقامة (بالأيام)	3	16	6	9	3	4	8	19
العمر	70	70	72	73	74	83	84	85
مدة الإقامة (بالأيام)	9	6	7	10	7	16	21	8
العمر	88	66	70	72	77	77	78	78
مدة الإقامة (بالأيام)	10	9	8	10	17	18	12	9

(٩-٦٥) يرغب محلل لنظم المدارس الحكومية بأحد مدن الولايات المتحدة أن يختبر كيف ستعكس درجات أحد إختبارات SAT لمتوسط التقديرات (GPA) لخريجي مدرسة المدينة الثانوية. وبأخذ بيانات عينة من 30 من الخريجين من هذه المدارس كانت كما يلي :

GPA	4.9	4.7	4.0	3.7	4.3	3.5
SAT	1235	1105	1020	1000	1190	1010
GPA	3.4	3.8	3.2	5.0	4.4	4.5
SAT	1125	1020	975	1390	1050	1205
GPA	4.8	4.6	3.6	3.7	4.5	4.6
SAT	1300	1100	970	1110	1290	1250
GPA	3.8	3.7	3.5	4.0	4.5	4.1
SAT	1010	1310	1000	950	1275	950
GPA	3.4	3.0	2.8	2.9	3.4	3.4
SAT	990	895	890	920	1270	1210

(٩-٦٦) يهتم مدير الأفراد فى بنك ما بتقييم التعليم الذى يحدث فى القسم الأكاديمى لبرنامج التدريب الإدارى. التعليم تم تقييمه لعينة من 28 متدرب بناء على درجاتهم فى إختبارات تتم قبل وبعد المشاركة فى برنامج التدريب. الإهتمام كان منصباً على التنبؤ بالدرجة بعد البرنامج بناء على الدرجة المناظرة قبل البرنامج ويتم الحصول على بيانات العينة التالية :

المتدرب	1	2	3	4	5	6
قبل	35	39	38	41	45	51
بعد	44	66	51	63	62	66
المتدرب	7	8	9	10	11	12
قبل	36	41	41	43	38	43
بعد	57	63	60	63	60	58
المتدرب	13	14	15	16	17	18
قبل	31	33	46	33	44	33
بعد	55	52	75	50	55	54
المتدرب	19	20	21	22	23	24
قبل	44	42	38	47	41	38
بعد	58	63	58	65	63	67

المتدرب	25	26	27	28		
قبل	41	42	34	34		
بعد	64	57	62	52		

(٩-٦٧) إستجابة للضغط لتقليل الإنبعاثات من المركبات المتطايرة التى يسببها إستخدام حبر الطباعة لمصنع ما على أساس مواد مذيبة، قام مدير مؤسسة بالتبديل إلى الحبر المُصنع على أساس الماء. كنتيجة للتغير، أصبح كل من الإنتاجية ومقدار النفايات موضع إهتمام. السؤال التالى إذا كان مقدار النفايات لكل 1,000 ياردة مرتبطة بالإنتاجية التى تقاس بعدد الياردات المطبوعة لكل وردية عمل. فإذا كانت بيانات الإنتاجية والنفايات لعينة مكونة من 23 من المطبوعات بإستخدام الحبر المصنع على أساس الماء كما يلى :

الياردات لكل وردية عمل	20,000	21,882	20,800	23,273	44,387
النفايات لكل 1,000 ياردة	35.76	31.15	45.09	14.31	14.65
الياردات لكل وردية عمل	37,576	48,000	20,500	21,714	18,759
النفايات لكل 1,000 ياردة	15.31	24.60	45.63	29.81	21.38
الياردات لكل وردية عمل	18,000	18,065	19,429	9,143	24,000
النفايات لكل 1,000 ياردة	27.71	24.40	50.62	63.54	51.11
الياردات لكل وردية عمل	38,316	21,429	38,261	33,333	33,500
النفايات لكل 1,000 ياردة	12.31	19.05	10.40	22.44	44.36
الياردات لكل وردية عمل	40,000	23,273	17,524		
النفايات لكل 1,000 ياردة	17.31	35.94	41.04		

(٩-٦٨) يرغب محلل إحصائي فى دراسة تغيب الموظفين الطويل عن العمل فى كل من مؤسستى Louisville , Richmond . لعينة من 30 موظف فى كل مؤسسة تم تسجيل عدد الغائبين على مدى فترة 3 سنوات وتم تسجيل سنوات الخدمة. يعتقد أن عدد الغائبين يتأثر بسنوات الخدمة. حلل كل مؤسسة على حدة ثم قارن نتائجك. إذا أتيحت لنا عينة من بيانات كل مؤسسة كالتالى :

Richmond:

الغائبين	18	14	24	5	7	0	8
سنوات الخدمة	9	9	21	15	15	15	17
الغائبين	13	2	0	5	11	10	1
سنوات الخدمة	21	18	16	15	9	14	8
الغائبين	7	2	21	18	2	12	9
سنوات الخدمة	10	15	9	12	15	16	14
الغائبين	5	9	13	16	11	9	23
سنوات الخدمة	14	14	8	8	15	13	10
الغائبين	5	13					
سنوات الخدمة	8	14					

Louisville:

الغائبين	24	0	18	28	30	51	48
سنوات الخدمة	9	31	17	19	19	16	24
الغائبين	3	14	19	50	9	13	9
سنوات الخدمة	30	17	19	7	13	7	7
الغائبين	4	50	49	15	11	15	9
سنوات الخدمة	20	16	9	12	11	18	7
الغائبين	13	5	6	33	64	12	8
سنوات الخدمة	24	18	12	7	7	16	14
الغائبين	0	3					
سنوات الخدمة	15	17					

(٩-٦٩) يرغب محلل استثمار أن يختبر ما إذا كانت الأسعار المنخفضة لمدة 52 أسبوع تؤثر على الأسعار المرتفعة لمدة 52 أسبوع أم لا للمركز الرئيسي لمؤسسات فى فرجينيا. بيانات العينة لعدد 15 من شركات فرجينيا كانت كما يلي :

Sock (المخازن)	52 - week High (52 اسبوع مرتفع)	52 - week Low (52 اسبوع منخفض)
Best Products	$ 16.38	$ 9.00
CFB	36.50	24.25
Circuit City	33.38	11.75
CSX	37.50	25.63
Dominion Resources	25.19	17.38
Du Pont	90.88	59.50
Ethyl	22.75	13.31
James River	35.00	22.00
MCI	13.13	6.13
Robins	15.63	7.75
Philip Morris	78.00	39.25
Jefferson Bank	39.50	29.00
United Virginia Bank	35.38	22.63
Basset Furniture	50.25	33.50
Sovran	44.25	29.38

(٩-٧٠) يهتم أستاذ جامعى بتحديد إمكانية إستخدام درجات الطالب فى إختبار ما فى التنبؤ بدرجاته فى الإختبار التالى. البيانات التالية تمثل الدرجات فى أول اختبارين فى نظم المعلومات مصنفة لـ 25 طالب فى السنة الثانية، 25 طالب فى السنة الثالثة : حلل كل سنة جامعية على حدة وقارن بين النتائج التى حصلت عليها .

طلبة السنة الثانية Sophomores				طلبة السنة الثانية Sophomores			
اختبار 1	اختبار 2	اختبار 1	اختبار 2	اختبار 1	اختبار 2	اختبار 1	اختبار 2
62	75	80	93	60	53	76	53
68	70	82	82	62	52	76	60
68	82	82	70	62	68	76	68
70	63	84	67	64	63	78	58
70	72	84	77	64	73	78	68
72	75	84	75	66	62	78	62
72	78	86	82	68	58	80	68
76	65	88	82	70	53	80	75
76	78	90	78	70	52	84	80
76	65	92	87	72	58	86	88
78	67	94	78	72	60	86	80
78	53	94	85	74	72	88	70
78	85			76	73		

حالة دراسية (٩-١): تحليل الخصائص البيئية للمياه فى نومنى كريك : NOMINI CREEK

قام مجموعة من المواطنين بالخدمة كمراقبى ومحللي جودة المياه لمنبع نهر Potomac فى جهد مشترك مع Alliance . الغرض من عملهم هو تقديم قاعدة من البيانات بخصوص جودة المياه يمكن إستخدامها فى المستقبل لتحديد كيف أن استخدام الأرض يؤثر في جودة المياه.

الهدف من دراسة هذه الحالة هو توضيح وعرض نموذج للعلاقة بين درجة حرارة المياه ومتغيرين بيئيين هامين ، مستوى الأكسجين المنحل Dissolved Oxygen (DO) ، عمق وضوح الماء Secchi depth (SD) كل من (DO) ، (SD) يعتبران خصائص لجودة المياه فيما يتعلق بالأوضاع البيئية . درجة الحرارة هى العامل المشتبه فيه الذى يجب إستخدامه فى تحليلات مستقبلية لتأثيرات إستخدام الأرض . البيانات تم تقديمها عن طريق أحد المواطنين المحلين وتتكون من 151 مشاهدة أسبوعية لدرجة حرارة المياه و(DO) ، (SD) لمنطقة Nomini Creek (الذى يغذى نهر Potomac) على مدى 3 سنوات . درجة حرارة الماء تم قياسها بالدرجات السيليزية بالترمومتر . الأكسجين المنحل يعين بجزء لكل مليون وتم تحديده عن طريق إجراء تجارب تفصيلية كل أسبوع . عمق وضوح الماء تم قياسه بالمتر بإستخدام أسطوانة القياس ، التى تكون مستديرة ومقسمة إلى دوائر ملونة تبادلياً أسود وأبيض .

فى دراسة هذه الحالة ، عليك إختبار إختلاف مستوى الأكسجين المنحل وعمق وضوح المياه على مر الزمن ، والعلاقة بين مستوى الأكسجين المنحل ودرجة حرارة المياه وبين عمق وضوح الماء ودرجة حرارة الماء . إستخدم التفكير الإحصائى وطرق ومفاهيم هذا الفصل ، بالإضافة إلى الفصول السابقة. يجب أن يشتمل تقريرك على مناقشة كاملة لطبيعة هذه العلاقات ، تقرير عن درجة الثقة المناسبة لكل نموذج ، مدى الإختلاف للأكسجين المنحل والعمق لتوقعه فى المستقبل ، إذا لم يكن هناك تأثيرات عكسية لإستخدام الأرض ، وأى تحفظات لك عن ملاءمة الطرق التى استخدمتها .

البيانـات محفـوظة في القرص المرن المرفق في ملف يسمى CASE 0901 . دليل الأعمدة هي الأسبوع = C1 ؛ مستوى الأكسجين (D0) = C2 ؛ العمق (SD) = C3 ؛ درجة حرارة الماء = C4 .

ملحق ٩ : Appendix - 9

تعليمات الحاسب الآلى عند إستخدام البرامج الإحصائية SAS , Minitab

سوف يستخدم المثال (٩-١) كنموذج لتوضيح تعليمات SAS , Minitab والتى تستخدم للحصول على نتائج حل تلك المشكلة .

(١) إستخدام البرنامج الإحصائى Minitab :

يمكن إستخدام الأوامر SET , NAME لإدخال البيانات كما سبق أن ذكرنا - ثم يتم إستخدام الأمر PLOT لعمل الرسم البياني للبيانات . أما الأمر REGRESS فيستخدم للحصول على (بين أشياء كثيرة أخرى) معادلة المربعات الصغرى والأخطاء المعيارية وكذلك جدول تحليل التباين ANOVA ويتم إستخدام الأمر الفرعى PREDICT لتقدير والتنبؤ بقيم Y .

والتعليمات التالية تولد الشكل (٩-٦) والجدول (٩-٣) وكذلك الجدول (٩-٩) . لاحظ أننا في الأمر NAME قمنا بوضع عنوان العمود C4 العنوان YHAT (لتوضيح القيمة المقدرة للمتغير Y) ، العمود C5 بالعنوان RESIDUAL (البواقي). في الأمر REGRESS فإننا نعرف العمود الخاص بقيم Y للعينة (C2) وعدد المتغيرات المفسرة (1)، حيث أن قيم المتغير المفسر تظهر في العمود الأول (C1) والعمود الذى يتم فيه تخزين العينة المتنبأ بها للمتغير التابع Y (C4) . ونعرف عمود آخر في جملة REGRESS (C3) حيث يقوم Minitab بتخزين معلومات أخرى إضافية عن البواقي والتى لم يتم تغطيتها في هذا الكتاب ، الأمر الفرعي RESIDUAL (C5) يقوم بتخزين البواقي في العمود المذكور. وأخيراً فإن الأوامر الفرعية الثلاثة للتنبؤ PREDICT حيث أن الجملة الأخيرة PREDICT تم إنهائها بنقطة. هذه الأوامر الفرعية الثلاثة تقوم بإعطائنا المخرجات أو النتائج والتى توجد في جدول (٩-٩).

```
MTB> name c1 = 'temp' c2 = 'energy'   c4 = 'ymat'  c5 = 'residual'
MTB> 1 1.5 3. -3 0.5 2.5  4  5  -5 -0.5  9  9.5  7  3 -2  6  8  10
DATA> end
MTB> set c2
DATA>   94 81 79 97 88 75 74 67 107 86 58 55 65 74 91 65 58 52
DATA> end
MTB> plot c2 c1
MTB> regress y c2 1 c1 c3 c4;
SUBC> residual c5;
SUBc> predict -4;
SUBC> predict 3;
SUBC> predict 9.
MTB> print c1 c2 c4 c5
```

ولعمل الشكل البيـانى للبواقى كما فى شكل (٩-١٦) ، فإننا نستخدم الأمر plot كالآتى - حيث أن C5 عبارة عن العمود الذى يحتوى على البواقى ، C1 عبارة عن العمود الذى يحتوى على قيم X .

```
MTB  >   Plot c5 c1
```

للحصول فقط على المعلومات الموجودة بجدول (٩-٣) (معادلة المربعات الصغرى ، جدول تحليل التباين ، . . . إلخ) فإننا نستخدم الأمر REGRESS بدون أى أوامر فرعية أخرى (أى لا تضع

علامة ؛ فى نهاية تلك الجملة) .

(٢) البرنامج الإحصائى SAS :

التعليمات التالية تولد أشكالاً وجداول مكافئة للشكل (٩-٦)، (٩-١٦)، الجداول (٩-٣)، (٩-٩). وهذه المخرجات أو النتائج الخاصة ببرنامج SAS تم وصفها بعد التعليمات التالية. وكما سبق أن قدمنا قبل ذلك يتم إستخدام الجملة INPUT لوضع عناوين لعينة للمتغيرات X ، Y وتم بإستخدام TEMP ، ENERGY على التوالى .

لاحظ أن الثلاثة سطور الأخيرة من البيانات توضح قيم X التى ترغب فى إيجاد التنبؤ لقيمة Y المقابلة وقيم X تكون متبوعة بنقط. وهذه هى الطريقة المستخدمة فى البرنامج الإحصائى SAS أما جملة PROC PLOT , ENERGY*TEMP PLOT فإنه تقوم بإنتاج بيانات مكافئة لتلك الموجودة بجدول (٩-٣) ، (٩-٩) أما الجمل الأربعة الأخيرة فإنها يمكننا من الحصول على شكل بيانى للبواقى مثل ذلك الشكل الموضح فى شكل (٩-١٦). لاحظ أنه فى جملة MODEL قمنا بتعريف المتغير التابع ENERGY وكذلك المتغير المفسر TEMP وتم وضع جميع الخيارات R , P فإن البرنامج الإحصائي SAS يمدنا بقيم Y المقدرة ($\hat{Y}$) والبواقى بفترة ثقة (95%) لمتوسط قيم Y ، وفترات تنبؤ بمقدار (95%) بقيم Y الفردية ، على التوالى .

أما المعلومات المكافئة لمخرجات أو نتائج Minitab والموجودة بجدول (٩-٩) فإنها توجد فى الصفوف الثلاثة الأخيرة فى الأعمدة من 2 إلى 6 من نتائج SAS بعد جدول تحليل التباين ANOVA وتقديرات المؤشر. أما الأعمدة الأربعة الأخيرة فى هذه النتائج فإنها تزودنا بمعلومات إضافية والتى نغطيها فى هذا الكتاب. ولإيجاد جدول تحليل التباين فقط ومقدرات المؤشر فإننا نستخدم الجملة PROG REG والجملة MODGL بدون عمل أى خيارات إضافية .

```
DATA;
INPUT TEMP ENERGY;
CARDS;
-1 94
1.5 81
3.5 79
-3 97
0.5 88
2.5 75
4 74
5 67
-5 107
-0.5 86
9 58
9.5 55
7 65
3 73
-2 91
6 65
8 58
10 52
-4 .
3 .
9 .
PROC PLOT;
PLOT ENERGY * TEMP;
PROC REG;
MODEL ENERGY = TEMP/ P R CLM CLI;
OUTPUT OUT = A
RESIDUAL = RESID;
PROC PLOT DATA = A;
PLOT RESID * TEMP;
```

```
Model: MODEL1
Dependent Variable: ENERGY

                         Analysis of Variance

                           Sum of          Mean
Source          DF        Squares        Square     F Value      Prob>F

Model            1     4123.53791     4123.53791    616.822      0.0001
Error           16      106.96209        6.68513
C Total         17     4230.50000

          Root MSE        2.58556       R-square     0.9747
          Dep Mean       75.83333       Adj R-sq     0.9731
              C.V.        3.40953

                         Parameter Estimates

                  Parameter       Standard       T for H0:
Variable    DF     Estimate          Error     Parameter=0     Prob > ?T?

INTERCEP     1    86.995715     0.75722995         114.887         0.0001
TEMP         1    -3.464188     0.13948302         -24.836         0.0001
```

Obs	Dep Var ENERGY	Predict Value	Std Err Predict	Lower95% Mean	Upper95% Mean	Lower95% Predict	Upper95% Predict	Residual	Std Err Residual	Student Residual	-2-1-0 1 2	Cook's D
1	94.0000	90.4599	0.847	88.6633	92.2565	84.6919	96.2280	3.5401	2.443	1.449	? ?** ?	0.126
2	81.0000	81.7994	0.655	80.4108	83.1881	76.1451	87.4537	-0.7994	2.501	-0.320	? ? ?	0.004
3	79.0000	74.8711	0.611	73.5765	76.1656	69.2391	80.5030	4.1289	2.512	1.643	? ?*** ?	0.080
4	97.0000	97.3883	1.060	95.1402	99.6364	91.4640	103.3	-0.3883	2.358	-0.165	? ? ?	0.003
5	88.0000	85.2636	0.718	83.7415	86.7858	79.5751	90.9522	2.7364	2.484	1.102	? ?** ?	0.051
6	75.0000	78.3352	0.618	77.0258	79.6447	72.6999	83.9706	-3.3352	2.511	-1.328	? **? ?	0.053
7	74.0000	73.1390	0.619	71.8267	74.4512	67.5030	78.7750	0.8610	2.510	0.343	? ? ?	0.004
8	67.0000	69.6748	0.658	68.2800	71.0695	64.0190	75.3306	-2.6748	2.500	-1.070	? **? ?	0.040
9	107.0	104.3	1.299	101.6	107.1	98.1829	110.5	2.6833	2.236	1.200	? ?** ?	0.243
10	86.0000	88.7278	0.801	87.0306	90.4250	81.9899	94.4657	-2.7278	2.458	-1.110	? **? ?	0.065
11	58.0000	55.8180	1.010	53.6761	57.9599	49.9333	61.7028	2.1820	2.380	0.917	? ?* ?	0.076
12	55.0000	54.0859	1.067	51.8243	56.3475	48.1566	60.0153	0.9141	2.355	0.388	? ? ?	0.015
13	65.0000	62.7464	0.806	61.0385	64.4543	57.0054	68.4874	2.2536	2.457	0.917	? ?* ?	0.045
14	73.0000	76.6032	0.610	75.3096	77.8967	70.9715	82.2349	-3.6032	2.513	-1.434	? **? ?	0.061
15	91.0000	93.9241	0.950	91.9108	95.9374	88.0849	99.7633	-2.9241	2.405	-1.216	? **? ?	0.115
16	65.0000	66.2106	0.722	64.6797	67.7415	60.5197	71.9015	-1.2106	2.483	-0.488	? ? ?	0.010
17	58.0000	59.2822	0.903	57.3678	61.1966	53.4764	65.0880	-1.2822	2.423	-0.529	? *? ?	0.019
18	52.0000	52.3538	1.125	49.9694	54.7383	46.3765	58.3311	-0.3538	2.328	-0.152	? ? ?	0.003
19	.	100.9	1.177	98.3566	103.3	94.8298	106.9	.	.	.		.
20	.	76.6032	0.610	75.3096	77.8967	70.9715	82.2349	.	.	.		.
21	.	55.8180	1.010	53.6761	57.9599	49.9333	61.7028	.	.	.		.

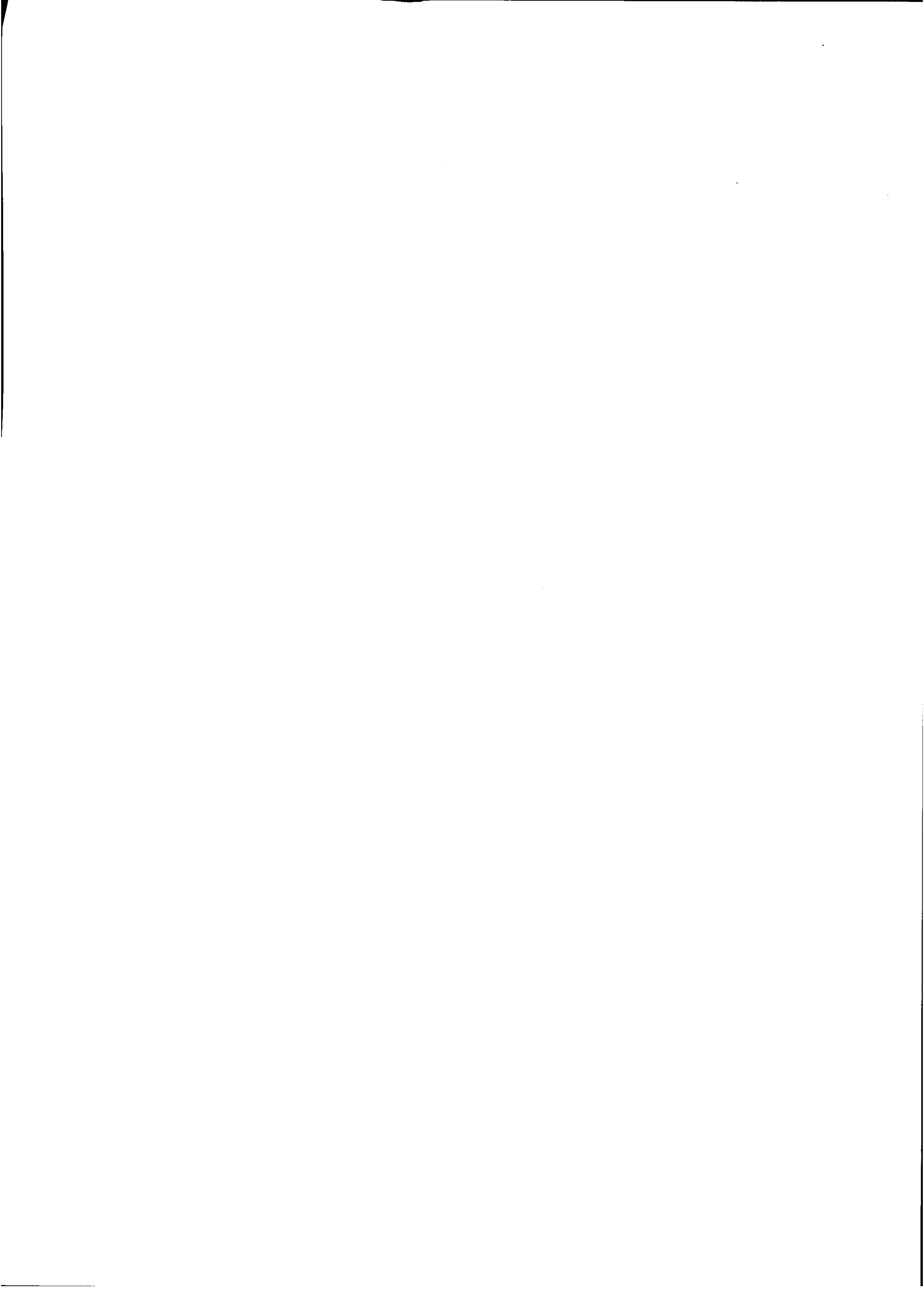
Sum of Residuals 0
Sum of Squared Residuals 106.9621
Predicted Resid SS (Press) 132.2064

الفصل العاشر

الإنحـــدار الخطـــي المتعـــدد

MULTIPLE LINEAR REGRESSION

محتويات الفصل :



الفصل العاشر

الإنحـــدار الخطـــي المتعــــدد

MULTIPLE LINEAR REGRESSION

(١٠-١) نظرة عامة على محتويات الفصل : Bridging To New Topics

فى هذا الفصل ، نوسع فى مفاهيم الإنحدار الخطى البسيط . حيث أننا سنتعامل مع :

١- أكثر من متغير مفسر فى نموذج الإنحدار .

٢- إستخدام معلومات وصفية فى نموذج الإنحدار .

٣- إستخدام تحليل الإنحدار لنموذج العلاقات غير الخطية .

٤- تجنب المشاكل الشائعة فى تطبيق تحليل الإنحدار .

ويظل الهدف الأساسى وهو تحديد النموذج الأمثل الذى يجعل توفيق البيانات الممثلة ذو معنى ، حتى نصل إلى أصغر خطأ عشوائى ممكن . وحيث أن التقدير والتنبؤ يظلان الأسباب الرئيسية لإستخدام نماذج الإنحدار ، فإن النموذج الملائم يكون النموذج الذى يزودنا بالدقة الكافية عندما يستخدم للتقدير أو التنبؤ . ويسمى نموذج الإنحدار الذى يحتوى على أكثر من متغير مفسر بنموذج الإنحدار الخطى المتعدد . والإنحدار الخطى المتعدد ومفاهيمه يعتبر إمتداداً للإنحدار الخطى البسيط . ومع ذلك تكون التعبيرات الحسابية أكثر تعقيداً وتشتمل على جبر المصفوفات والتى تكون خارج نطاق هذا الكتاب . والإنحدار الخطى المتعدد وحساباته تكون مجهدة جداً بإنجازها باليد . بالتالى ، فإن معظم الحسابات فى هذا الفصل ستكون معتمدة على إستخدام الحاسب الآلى . وكنتيجة لذلك يتحول مجهودك إلى تفسير مخرجات الحاسب الآلى . مع ذلك نؤخر تفسيرات الحاسب الآلى حتى يتم كشف بعض النقاط الأساسية الضرورية لك لفهم ذلك .

تحليل الإنحدار يمكن أن يكون أداة قوية لتحديد أسباب الإختلاف لعملية المخرجات والأكثر عمومية لفهم أفضل لصنع وإتخاذ القرار . وهو بصفة خاصة ، مفيد عندما لا تستطيع التحكم فى مستويات المتغيرات الأساسية لكى ندير التجربة المصممة . لهذا نطبق عادة تحليل الإنحدار عندما تستخدم البيانات الملائمة . ومن الأهمية أن نتحكم فى إستخدامه لفهم قيوده وإدراك نتائج سوء إستخدامه . بالإضافة لفهم أسس تحليل الإنحدار المقدمة فى الفصل التاسع . فإن موضوعات هذا الفصل تتمثل فى التعلم الصحيح لإجراء نموذج إنحدار محسن وتعلم أسلوب تحديد أخطاء تطبيقات الإنحدار .

(١٠-٢) نموذج الإنحدار الخطى المتعدد : The Multiple Linear Regression Model

وسوف نقدم بناء نموذج يوضح العلاقة بين متغير تابع Y وأكثر من متغير مفسر . وبفرض أن K تمثل عدد المتغيرات المفسرة ، فإن نموذج الإنحدار الخطى المتعدد يمكن التعبير عنه كإمتداد لنموذج الإنحدار الخطى البسيط كما يلي حيث :

$X_1 , X_2 , ... , X_k$ تكون عبارة عن K من المتغيرات المفسرة

$$Y= \beta_0 + \beta_1 X_1+ \beta_2X_2 + ... + \beta_K X_K + \varepsilon \qquad (10.1)$$

متوسط Y عند وجود قيم معينة للمتغيرات X_1 ، X_2 ، . . . . ، K_K (العنصر المحدد)

الخطأ العشوائي والإنحراف غير المتوقع للمقدار Y عن نموذج الإنحدار للمجتمع (العنصر العشوائي)

وكما فى الإنحدار الخطى البسيط ، يحتوى نموذج الإنحدار الخطى المتعدد على مكونين: مكون العنصر المحدد $(\beta_0 + \beta_1 X_1+ .... + \beta_K X_K)$ ، ومكون العنصر العشوائي (ε). يعرف المكون $(\beta_0 + \beta_1 X_1+ .... + \beta_K X_K)$ بنموذج انحدار المجتمع **population regression model** ، ويفترض بأنه متوسط Y بشرط معرفة قيم محددة للمتغيرات $X_1 , X_2 , ... , X_K$. أما (ε) فهو يمثل الخطأ العشوائى المرتبط بأى عنصر أو متغير فى مجتمع الدراسة ، وهو يمثل الإختلاف غير المفسر بين قيم Y عند مجموعة قيم $X_1 , X_2 , ... , Xk$. كما فى الفصل التاسع ، فإن الخطأ العشوائى يمكن قياسه بواسطة تباين الخطأ σ_ε^2 وهو مثل المعالم β_0 ، β_1 ، . . . . . ، β_K ، تكون غير معروفة (مجهولة) والتى يجب تقديرها اعتماداً على عينة الدراسة. وتظهر الأهمية القصوى للمقدار σ_ε^2 بقياسه دقة توفيق المنحنى. وبالطبع فإن التقدير الأقل لقيمة σ_ε^2 يعنى توفيق أفضل للبيانات .

نتذكر من الفصل التاسع ، أن شكل الإنتشار يزودنا بالمعانى الأساسية لنوعية العلاقة المحددة التى توجد بين المتغير التابع Y والمتغير المفسر X . ولسوء الحظ عندما يكون هناك أكثر من متغير مفسر. فإن الشكل البياني لا يساعدنا في رسم قيم Y مقابل عدة متغيرات لـ X، حتى يمكن معرفة وتحديد نوعية العلاقة بينهما. ومع ذلك، هناك إجراءات أخرى سوف تساعدنا على ذلك وسوف نستعرضها فى الاجزاء التالية :

ويكون من الأهمية فهم أنه عندما نصف نموذج إنحدار المجتمع المعطى فى المعادلة (10.1) كعلاقة خطية فهذا يعنى «خطية تتعلق بالمعالم» $(\beta_1 ,\beta_2 , ... \beta_K)$ هذه الجملة تعنى أن كل المعالم تظهر بأس واحد. ليس هناك معالم تكون هى نفسها أس، أو مضروبة فى، أو مقسومة على معلمة أخرى. فعلى سبيل المثال يكون النموذج :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1^2 + \beta_4 X_2^2 + \varepsilon \qquad (10.2)$$

نموذج خطى فيما يتعلق بالمعالم β_0 , β_1 , β_2 , β_3, β_4 على الرغم من أن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة X_1 , X_2 غير خطية . لهذا عندما نقول نموذج إنحدار خطى متعدد، نعنى بالخطية هنا معالم النموذج وليس للمتغيرات المفسرة للنموذج.

ولتوضيح نموذج الإنحدار المتعدد، نعتبر المثال التالى للمتغير التابع Y (المبيعات اليومية من الأيس كريم) ، والمتغيرات المفسرة X_1 = السعر للوحدة ، X_2 = درجة الحرارة اليومية . فى هذه العلاقة نتوقع زيادة المبيعات إذا إنخفض السعر أو اذا إرتفعت درجة الحرارة. لهذا نتوقع أن تكون العلاقة السالبة مع السعر والعلاقة الموجبة مع درجة الحرارة.

تفسير معادلة إنحدار المجتمع : Interpreting the population Regression Equation

إفترض أن نموذج إنحدار المجتمع لمثال الأيس كريم السابق :

$$Y = 0 - 1.6 X_1 + 4X_2$$

بالطبع فى التطبيقات الفعلية. هذا النموذج لا يكون معروف ، إنما يقدر بإستخدام بيانات عينة ممثلة للمجتمع ، لكن دعنا نفسر قيم المعالم كما حددناها :

١- $(\beta_0 = 0)$ تمثل متوسط المبيعات اليومية إذا كان X_1 ، X_2 مساوى للصفر . ومن المستبعد أن يكون السعر مساوى للصفر (الايس كريم يعطي مجانا) أو أن درجة الحرارة تكون مساوية للصفر ، هنا يقول النموذج أن متوسط المبيعات اليومى صفر .

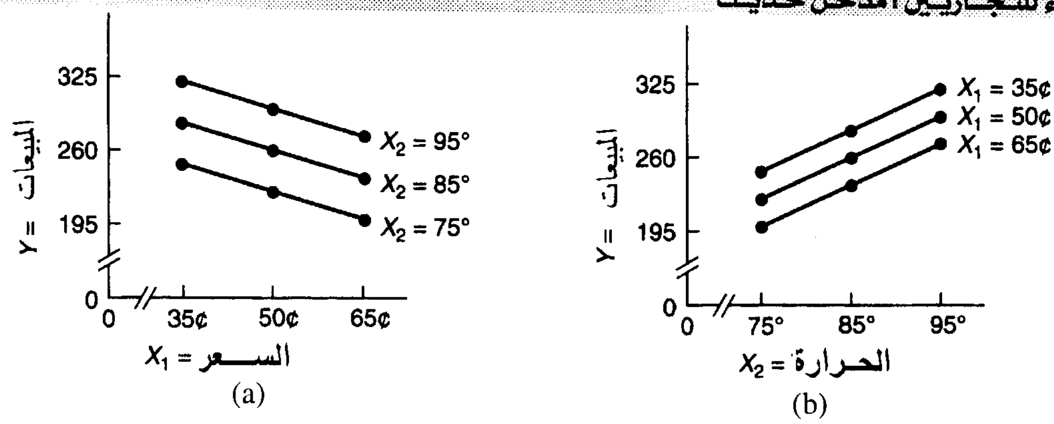
٢- المعامل الخاص بالسعر $(\beta_1 = -1.6)$ يعنى أن المتوسط اليومى للمبيعات يقل بواسطة 1.6 أوقية لكل سنت يرفع به السعر ، وذلك مع ثبات درجة الحرارة. وكتوضيح إعتبر أنه فى يوم معين $(X_1 = 50)$ ، $(X_2 = 85°)$. القيمة المتوقعة للمبيعات $\{Y = 0-1.6(50) + 4(85)= 260\}$ أوقية. لكن إذا زادت X_1 إلى 60 ، وظلت X_2 85° ، تكون القيمة المتوقعة 244 أوقية. أى أن القيمة المتوقعة للمبيعات إنخفضت بمقدار $(260 - 244 = 16)$ أوقية أو 1.6 أوقية لكل سنت يزيد به السعر.

٣- بالمثل معلمة درجة الحرارة $(\beta_2 = 4)$ تشير إلى أن متوسط المبيعات اليومية تزيد بمقدار 4 أوقية لكل زيادة درجة واحدة فى درجة الحرارة اليومية مع ثبات السعر .

وكتوضيح إضافى للنموذج المفسر فإن الجدول التالى يعطى قيم متوسط المبيعات الخاصة بتسع توليفات سعرية حرارية :

	PRICE X_1		
Temperature X_2	65	50	35
75	196	220	244
85	236	260	484
95	276	300	324

يوضح شكل(١٠-١ أ) العلاقة بين متوسط المبيعات اليومية مع السعر عندما تكون درجة الحرارة ثابتة. ويوضح شكل (١٠-١ ب) العلاقة بين متوسط المبيعات مع درجة الحرارة عندما يكون السعر ثابت.



شكل رقم (١٠): متوسط المبيعات مقابل ثلاث مستويات للسعر (أ)، ومقابل ثلاث مستويات للحرارة (ب)

ومن الشكل السابق نلاحظ الآتي :

١- العلاقة الخطية بين متوسط Y , X_1 لها نفس ميل الإنحدار لأى قيمة X_1 طالما X_2 ثابتة. ونفس الجملة صحيحة للعلاقة الخطية بين Y , X_2 لأى قيمة X_2 طالما X_1 ثابتة. لهذا فإن الخطوط تكون متوازية .

٢-عند درجة حرارة معينة X_2، الفرق بين أى خطين يشتملا على السعر X_1 يكون ثابتا. فمثلاً، عند $X_1 = 35$، $X_1 = 50$، نجد أن المسافة بين الخطوط تكون 24 وحدة دائماً. وهكذا فإن متوسط Y يتناقص بمقدار 24 وحدة، كلما زادت X_1 بمقدار 15 سنت، بشرط أن تظل X_2 ثابتة. هذا التناقص في Y هو 1.6 أوقية لكل زيادة واحد سنت في السعر.

٣-عند قيمة معينة للسعر X_1، الفرق بين أى خطين يشتملا على درجة الحرارة X_2 يكون ثابتا. فمثلاً، عند $X_2=85°$ ، $X_2=95°$ نجد أن المسافة بين الخطوط تكون ثابتة 40 وحدة. وهكذا فإن متوسط Y يتزايد بمقدار 40 وحدة، كلما زادت درجة الحرارة 10°، بشرط أن تظل X_1 ثابتة. هذه الزيادة في متوسط Y وهي 4 أوقيات لكل زيادة درجة واحدة في الحرارة.

(١٠-٣) تقدير معالم نموذج الإنحدار الخطى المتعدد :

Estimating the Parameters of the Multiple Linear Regression Model :

لتقدير نموذج إنحدار المجتمع ، تستخدم بيانات عينة لتقدير معالم النموذج β_0 ، β_1، . . . . ، β_n وكذلك تباين الخطأ σ_ε^2. وطرق الحصول على بيانات عينة هى نفسها كما فى جزء (٩-٣) . من هذه الطرق ، تسجيل قيم Y عند القيم التي سبق تحديدها للمتغيرات التفسيرية $X_1, X_2, \dots, X_K$. أو استخدام البيانات الملائمة. ومن المهم أن تكون هناك عناية فائقة في إختيار قيم المتغيرات المستقلة، ولكن في كثير من الحالات لايكون أمامنا فرصة لاختيار البيانات. يجب أن تضع في ذهنك أن بيانات العينة التي تستخدم لتقدير معالم النموذج، يجب أن تكون ممثلة ومعبرة للبيئة التي نرغب في دراستها.

(١٠-٣-١) طريقة المربعات الصغرى The Method of least Squares

كما فى الفصل التاسع ، تستخدم طريقة المربعات الصغرى لتحديد أفضل الإحصاءات لتقدير المعالم β_0 ، β_1، . . . . ، β_k وتستخدم كتقديرات القيم التى تكون مجموع مربعات البواقى أصغر

لبيانات العينة. وتقديرات المربعات الصغرى للمعالم β_0 ، β_1 ، . . . . ، β_K يرمز لها بالرموز b_0 , ... b_K على التوالى. وكما فى الإنحدار البسيط فإننا نحدد قيم b_0 .... , b_K التى تجعل مجموع مربعات الخطأ أقل ما يمكن. بمعلومية هذه القيم تكون معادلة إنحدار المربعات الصغرى كما يلى :

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + \dots\dots\dots\dots + b_KX_K \qquad (10.3)$$

وصيغ المربعات الصغرى لـ b_0 ، ...... ، b_K لن تعرض هنا لأنها تشمل جبر المصفوفات. بالتالى نعتمد كلياً على إستخدام الحاسب الآلى فى تحديد تقديرات المربعات الصغرى لمعالم النموذج. ففى نموذج الآيس كريم. إفترض أننا حصلنا على البيانات الممثلة لعينة 10 أيام:

Y (daily sales)	374	386	471	429	391	475	428	412	405	341
X_1 (Price)	35	35	35	50	50	50	50	65	65	65
X_2 (high temperature)	74	82	94	93	82	96	91	93	88	78

وكما سنرى فيما بعد عندما نفسر نتائج الحاسب الآلى لهذا المثال. فإن تقدير المربعات الصغرى هي: $(b_0 = 25.8777)$, $(b_1 = -1.3418)$, $(b_2 = 5.1953)$ للنموذج $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon$ ، ولهذا فإن معادلة الإنحدار لأصغر المربعات تكون :

$$\hat{Y} = 25.8777 - 1.3418X_1 + 5.1953X_2$$

(١٠-٣-٢) تقدير تباين الخطأ σ_ε^2 Estimating the Error. Variance σ_ε^2

إن إجراء تقدير تباين الخطأ σ_ε^2 يتشابه مع ما قدم في الفصل التاسع. وهذا يعنى أن المقدر S_e^2 يجب أن يعتمد على مدى انحراف القيم الفعلية Y عن القيم المتنبأ بها $(\hat{Y})$ والمحددة من معادلة المربعات الصغرى. هذه الانحرافات هي البواقي. لهذا فإن بسط التباين S_e^2 يظل مجموع مربعات البواقي، كما كان فى الإنحدار الخطى البسيط والمقام للتباين S_e^2 في الأنحدار الخطى البسيط $(n-2)$. والآن ماذا نتوقع أن يكون مقام S_e^2 فى الإنحدار الخطى المتعدد؟ نذكر أنه فى تحديد قيم $\hat{Y}$ ، يجب تقدير $(K + 1)$ معلمة أو مؤشر $(\beta_0 , \beta_1 , .. \beta_K)$ للنموذج $(Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2X_2 + ... + ... + \beta_KX_K + \varepsilon)$ لذا ولكى نجعل تباين البواقى S_e^2 مقدر غير متحيز للبواقى σ_ε^2 ، يجب طرح $(K+1)$ وحدة من n فى مقام S_e^2 . طبقا لذلك، يعرف تباين البواقى S_e^2 كما يلى :

$$S_e^2 = \frac{\text{SSE}}{n-(k+1)} \qquad (10.4)$$

حيث أن :

$$\text{SSE} = \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad (10.5)$$

وهو يعبر عن مجموع مربعات البواقي. وكما سبق يمكن تقدير σ_ε بواسطة الإنحراف المعيارى للبواقى.

$$S_e = \sqrt{S_e^2} \qquad (10.6)$$

ويظل تباين البواقى S_e^2 مقياساً لكيفية توفيق معادلة المربعات الصغرى لقيم Y من العينة. إذا كان التوفيق تام، كل البواقى تساوى الصفر، وبالتالى S_e^2 تساوى الصفر. عندما يشتمل النموذج على العديد من المتغيرات المفسرة (بعضاً منها قد لا يكون مساعد فى تفسير الإختلاف فى قيم Y)، يكون تباين البواقى S_e^2 ذو أهمية كبيرة كمعيار لجودة التوفيق وسيكتشف ذلك لاحقاً. مرة أخرى، يعرف S_e^2 بمتوسط مربعات الخطأ (MSE)، أما S_e يشير إلى جذر متوسط مربعات الخطأ (RMSE).

على الرغم من إستخدام الحاسب الآلى بشكل كبير . إلا أنه يمكننا حساب تباين البواقى S_e^2 بالحسابات اليدوية إذا أعطينا معادلة المربعات الصغرى المنسجمة مع بيانات العينة. للتوضيح، بالرجوع لمعادلة المربعات الصغرى لمثال الأيس كريم وهي : $(\hat{Y} = 25.8777 - 1.3418X_1 + 5.1953X_2)$ حيث X_1 تمثل السعر، X_2 درجة الحرارة. فى اليوم الأول من العينة، السعر $(X_1 = 35 \text{ cents})$ ودرجة الحرارة $(X_2 = 74° F)$. بهذه القيم المفسرة فإن $\hat{Y} = 25.8777 - 1.3418(35) + 5.1953(74) = 363.368$ لذلك ، البواقى $(Y_1 - \hat{Y}_1 = 374 - 363.368 = 10.632)$. فى اليوم الثانى عندما $(X_1 = 35)$, $(X_2 = 82)$ ، فإن المبيعات المتنبأ بها $(\hat{Y} = 404.930)$. وتكون البواقى $(Y_2 - \hat{Y}_2 = 386 - 404.930 = -18.93)$. وبإستمرار هذا الأسلوب نجد أن قيم $\hat{Y}$ وبواقيها لمثال للأيس كريم كما يلى :

Price (X_1)	Temperature (X_2)	Sales (Y)	Predicted ($\hat{Y}$)	Residual $e = y - \hat{Y}$
35	74	374	363.368	10.631
35	82	386	404.93	-18.93
35	94	472	467.274	4.726
50	93	429	44.952	-12.852
50	82	391	384.804	6.196
50	96	475	457.534	17.462
50	91	428	431.562	-3.562
65	93	412	421.826	-9.826
65	88	405	395.849	9.151
65	78	341	343.897	-2.897

وكنتيجة لهذا ، فإن مجموع مربعات البواقى :

$$SSE = \Sigma e_i^2 = \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (10.632)^2 + (-18.93)^2 + ... + (-2.897)^2 = 1,206.158$$

ولهذا ، فإن تباين البواقى يكون :

$$S_e^2 = \frac{1,206.158}{10-3} = 172.308$$

والإنحراف المعيارى للبواقى يكون :

$$S_e = \sqrt{172.308} = 13.127$$

(١٠-٣-٣) معامل التحديد The Coefficient of Determination

معامل التحديد فى الإنحدار الخطى المتعدد له نفس التفسير كما فى الإنحدار الخطى البسيط. فهو يمثل نسبة إجمالى الإختلاف فى قيم العينة Y التى تفسر بواسطة المتغيرات التفسيرية فى معادلة إنحدار المربعات الصغرى .

إفترض أن لدينا عينة والتى تحدد لها معادلة المربعات الصغرى. نسأل نفس السؤال البسيط كما فى الفصل التاسع: لماذا تختلف قيم Y فى العينة ؟ مرة أخرى، هناك إجابتان محتملتان :

١-تختلف قيم Y فى العينة ، لأن المتغير التابع يكون مرتبطاً بالمتغيرت المفسرة X_1 , ... , X_k . فكلما تغيرت قيم المتغيرات المفسرة، تميل قيم Y للتغير. فى مثال الأيس كريم، إذا تغير السعر (و / أو) درجة الحرارة فإن مستوى المبيعات اليومية تميل للتغير .

٢- تختلف قيم Y فى العينة ، بسبب عوامل أخرى غير المتغيرات التفسيرية فى النموذج. على سبيل المثال، إذا لم يتغير السعر ودرجة الحرارة لعدة أيام ، فإن مستوى المبيعات اليومى سوف يختلف لأسباب أخرى. والأسباب الإضافية للإختلاف تفترض أنها تؤثر في المتغير التابع في نمط عشوائي.

وكما فى الفصل التاسع ، فإن الإختلاف الكلى فى العينة لقيم Y يقاس بواسطة SST ، مجموع المربعات الكلى [انظر للصيغة (9.10)]. بالإضافة إلى الإختلاف غير المفسر فى قيم Y والذي يقاس أيضاً بواسطة SSE ، مجموع مربعات البواقى. الفرق بين SST , SSE يعطى مجموع مربعات الإنحدار SSR والتى تقيس الإختلاف فى Y، والتى تكون راجعة إلى التغيرات بين قيم المتغيرات التفسيرية فى النموذج ، وبهذا فإن:

$$SST = SSR + SSE \qquad \textbf{(10.7)}$$

ومعامل التحديد يكون عبارة عن النسبة بين مجموع مربعات الإنحدار إلى مجموع المربعات الكلى.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \qquad \textbf{(10.8)}$$

نلاحظ أن حرف R الكبير يستخدم عادة ليشير إلى معامل التحديد فى الإنحدار الخطى المتعدد، بينما r الصغيرة تشير إلى معامل التحديد فى الإنحدار الخطى البسيط .

فى مثال الأيس كريم حددنا (SSE = 1,206.158) ولحساب مجموع المربعات الكلى فإن :

$$SST = (374)^2 + (386)^2 + ... + (341)^2 - \frac{(374 + 386 + ... + 341)^2}{10}$$

$$= 15,760.1$$

إذن :

$$SSR = 15,760,1 - 1,206.158 = 14,553.942$$

$$R^2 = \frac{14,553.942}{15,760.1} = .9235$$

وهذا يعنى أن 92.35% من إجمالى الإختلاف فى قيم Y يرجع إلي الأختلافات في قيم العينة: قيم X_1 (السعر)، X_2 (درجة الحرارة) .

الاستخدام المعيب لـ R^2 : Misapplication of R^2

فى سياق الحديث عن تحليل الإنحدار الخطى المتعدد عادة ما يساء فهم R^2 أو يساء استخدامه. ومن الأهمية أن تعلم أن R^2 لا يمكن أن تقل عندما تضاف متغيرات مفسرة إلى نموذج الإنحدار، حتى ولو كانت هذه المتغيرات لا تساهم بمعلومات إضافية للتنبؤ بقيمة Y . وهذا صحيح لأن الإختلاف غير المفسر فى العينة لقيم Y ، كما قيست بواسطة SSE تتناقص بوضوح عندما يكون هناك حد اضافي، قد أضيف لنموذج الإنحدار بينما يظل مجموع المربعات الكلى SST ثابتا بصرف النظر عن عدد المكونات فى النموذج (لأن SST تكون محددة كلياً بواسطة قيم X) . لهذا، فإن مجموع مربعات الإنحدار SSR (الإختلاف المفسر) يجب أن يزيد على الأقل عندما تضاف حدود جديدة إلى النموذج.

فإذا استخدمت R^2 ، لتحديد ما إذا كان يجب إضافة عناصر جديدة للنموذج أم لا . إذن السؤال لا يكون ما اذا كانت هناك زيادة في قيمة R^2 عند إضافة متغيرات جديدة ولكن بكم تزيد R^2 . R^2 الكبيرة لا تعنى بالضرورة نموذج أفضل . فى الحقيقة R^2 الكبيرة بدرجة كافية يمكن تحقيقها ببساطة باضافة متغيرات تفسيرية ، البعض منها ربما يساهم في تفسير القليل من التغيرات في قيم Y بالعينة . فى مثال الأيس كريم ، نجد أن إضافة درجة الحرارة للنموذج المحتوى على السعر فقط يعتبر مفيد إذا كانت الإضافة تزيد مجموع مربعات الإنحدار و بالتالى تزيد R^2 . بعض المحللين يخطئون بضم عدد كبير من المتغيرات المفسرة فى النموذج كأساس للحصول على قيمة عالية لقيمة R^2 .

وهناك إستخدام خاطئ آخر شائع ، وفيه يفترض أن النموذج يكون جيداً إذا كانت R^2 عالية ، وغير جيد (أي سئ) إذا كانت R^2 منخفضة . فالنموذج الذى به $(R^2 = 0.6)$ ربما يكون جيد إذا كان الهدف إنشاء علاقة موجودة بين قيمY والمتغيرات المفسرة فى النموذج . وعلى العكس فإن نموذج به $(R^2 = 0.9)$ قد يكون نموذج غير جيد إذا كان $(R^2 = .99)$ يمكن تحقيقها بأشتمال النموذج على متغيرات مفسرة لها معنى أكثر وضوحاً .

معامل التحديد المعدل The Adjusted Coefficient of Determination

كما سبق أن ذكرنا فإن R^2 تزيد بزيادة العناصر المضافة لنموذج الإنحدار . فبإضافة عناصر كافية للنموذج يمكن أن تقترب R^2 من الواحد الصحيح . بهذا فإن R^2 التى قيمتها تساوى 95. تكون مؤثرة لنموذج به أربعة عناصر عن نموذج به 30 عنصر . لهذا السبب فإن هناك علاقة بديلة لقياس جودة التوفيق قد أقترحت لتأخذ عناصر النموذج فى الحسبان . وهذا المقياس الوصفى لجودة توفيق معادلة المربعات الصغرى يسمى معامل التحديد المعدل ويعرف كما يلي:

$$R_a^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p}\right)\frac{\text{SSE}}{\text{SST}} \qquad \textbf{(10.9)}$$

حيث P عدد عناصر النموذج شاملة الجزء المقطوع من المحور الرأسى . بمعنى آخر P عدد المعالم β فى النموذج . لاحظ أن تعبير R_a^2 تختلف عن R^2 فقط بالكسر $\left(\frac{n-1}{n-p}\right)$. حيث أن هذا الكسر يجب أن يزيد عن الواحد ، فإن قيمة R_a^2 دائماً أقل من R^2 . بالإضافة لذلك ، من الممكن لقيمة R_a^2 أن تتناقص عندما تضاف متغيرات مفسرة غير مناسبة لنموذج الإنحدار . لهذا فإنه فى تحليل الإنحدار الخطى المتعدد يفضل معامل التحديد المعدل R_a^2 على R^2 للمقارنة بين نماذج الإنحدار المتنافسة . ومن المهم أن نعلم أن R_a^2 تمثل مؤشر إحصائى وصفى فقط . وسوف نعرض إجراء استنتاجى فى الجزء (١٠-٥) لنقرر ما إذا كان مساهمة العناصر المضافة فى نموذج الإنحدار تكون كافية لتبرير بقائها فى النموذج .

ولتوضيح حساب R_a^2 وبالعودة إلى مثال الأيس كريم حيث حجم العينة $(n = 10)$, $(p = 3)$ عناصر فى النموذج ومجموع مربعات البواقى $(SSE = 1,206.158)$ ومجموع المربعات الكلى $(SST = 15,760.1)$ فإن :

$$R_a^2 = 1 - \left(\frac{10-1}{10-3}\right)\frac{1,206.158}{15,760.1} = .9016$$

مثال (١٠-١)

إفترض أن نموذج الإنحدار لمتغير تابع Y فى مقابل متغيرين مفسرين X_1 , X_2 ، وجد أن معامل التحديد ($R^2 = .621$) ، ومعامل التحديد المعدل ($R_a^2 = .585$). وعند إضافة المتغير X_3 لمعادلة الإنحدار Y فى مقابل X_1 , X_2 , X_3 ، وجد أن ($R^2 = .629$) ، ($R_a^2 = .575$) هل زيادة R^2 تشير إلى أن ضم X_3 أفضل للنموذج ؟

الحل

الإجابة وبصوت عالى (لا) ، لأن قيمة أى متغير (أو أى حد)، حتى لو كان غير مناسبا، سوف يزيد من R^2 بمقدار صغير. والزيادة الصغيرة هنا من .621 إلى .629 عندما أضيف X_3 للنموذج. من المؤكد أن هذه الاضافة ليست مؤثرة. هذه النتيجة مدعمة بوضوح من تناقص قيمة R_a^2 من .585 إلى .575 والتى تعنى أن ضم X_3 ليس مضموناً من الناحية الإحصائية.

تمـارين

(١٠-١) إفترض أن النموذج ($Y = 1,5 + 1,2X_1 + .15X_2$) هو المستخدم فى وكالة تأجير سيارات لتقدير تكلفة الصيانة السنوية Y (بالألف دولار) كدالة فى عدد السيارات المؤجرة X_1 ومتوسط عدد الأميال لكل سيارة X_2 (بالألف ميل) .

أ - اشرح معنى قيمة كل معلمة .

ب- حدد التكلفة السنوية للصيانة لكل التوليفات التالية لقيم X_1 , X_2 :

($40 , 30 , 20 = X_2$) ($600 , 400 , 200 = X_1$)

(ملاحظة : سيوجد لدينا تسع توليفات)

ج- إستخدم نتائج (ب) لرسم العلاقة بين Y , X_1 مع ثبات X_2 ثم العلاقة بين Y , X_2 مع ثبات X_1.

(١٠-٢) إفترض النموذج الذي يعبر عن المتغير التابع Y كدالة فى المتغيرات التفسيرية X_1، X_2 كالتالى : ($Y = 15 + 6X_1 - 2X_2 - 1.5X_2^2$)

أ - ارسم العلاقة بين Y , X_1 عندما تكون ($X_2 = 2$)

ب- ارسم العلاقة بين Y , X_2 عندما تكون ($X_1 = 1$)

(١٠-٣) حدد أى واحد من النماذج الإنحدارية التالية تعتبر خطية بالنسبة لمعالمها. اشرح إجابتك.

أ - $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X_2^2 + \varepsilon$

ب - $Y = \beta_0 + \beta_1 \log X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$

ج - $Y = \beta_0 e^{\beta_1 X} + \varepsilon$

د - $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^{\beta_2} + \beta_3 X_2 + \varepsilon$

(١٠-٤) البيانات العينة التالية تكون لها معادلة المربعات الصغرى كما يلى :

$$\hat{Y} = 5.34 + .6065X_1 + .0942X_2$$

Y	75	58	50	100	60
X_1	100	66	88	150	75
X_2	22	75	44	33	100

أ - بالنسبة لهذه البيانات . هل تقدير bo = 5.34 له معنى حقيقي؟ أعطى سبباً لإجابتك .

ب- قدر متوسط Y عندما $(X_1 = 90)$ ، $(X_2 = 65)$

ج- حدد قيمة SSE ثم حدد تباين البواقى S_e^2 .

د - حدد معامل R^2 وأشرح معناه لهذا التمرين .

هـ - حدد معامل التحديد المعدل R_a^2 وأعطى سبباً لماذا قيمة R_a^2 المعدلة أصغر بكثير من R^2 لهذا التمرين .

(١٠-٥) بالإشارة إلى تمرين رقم (١٠-٤) وفق الخط المستقيم لبيانات العينة بإستخدام X_1 فقط .

أ - حدد SSE وتباين البواقى للخط المستقيم وقارن نتائجك مع (ج) فى تمرين رقم(١٠-٤)، واشرح النتائج التي توصلت إليها.

ب- حدد R^2 , R_a^2 وقارن النتائج مع (د) فى تمرين (١٠-٤) واشرح ما تنتج عنه تلك المقارنة.

ج - من وجهة نظر إجابتك للأجزاء (أ) ، (ب) لهذا التمرين ما هو الإستنتاج المعقول الذى يمكن أن تستنتجه بخصوص X_2 .

(١٠-٦) إفترض أن نموذج الإنحدار $(Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon)$ تم توفيقه لعينة من (n=10) مشاهدات وأعطى النتائج التالية: $(R_2 = .927 , SSE = 121.2)$. فيما بعد أضيف X_3 إلى مجموعة المتغيرات المفسرة ليصبح النموذج على الصورة $Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon$ وأعطى النتائج التالية:

$$R^2 = .930 , SSE = 116.2$$

أ - فى النموذج الأول، $(R^2 = .927)$ تعتبر قيمة عالية. هل هذا يشير إلى أن النموذج جيد التنبؤ بالمتغير Y ؟ علق على إجابتك .

ب- عند إضافة X_3 للنموذج فإن SSE انخفضت وارتفعت R^2 . هل هذه النتائج تشير إلى أن النموذج الثانى محسن عن النموذج الأول ؟ إشرح لماذا نعم أو لماذا لا .

ج- حدد تباين البواقى S_e^2 ومعامل التحديد المعدل لكل نموذج (ملاحظة : إستخدم R^2 , SSE لإيجاد SST) . ماذا تستنتج من هذه المعلومات عن المزايا النسبية لكلا النموذجين) .

(١٠-٧) تم تحديد نموذج إنحدار ليعبر عن المتغير Y فى مقابل 4 متغيرات تفسيرات لعينة مكونة من 22 مشاهدة وكانت SSE = 1225 ، SST = 14570 لهذا النموذج .

أ – حدد R^2 واشرح معناه .

ب – معتمداً على قيمة R^2 فى (أ)، هل تعتقد أن النموذج جيد للتنبؤ (Y)؟ وضح إجابتك .

ج – حدد قيمة R_a^2 .

(١٠–٨) إفترض أن نموذج المربعات الصغرى على الصورة التالية :

$$\hat{Y} = 22 + 5.2X_1 - .32X_1 + 2.7X_3 - 9.6X_4$$

تم استخدامه لتوفيق عينة مكونة من ($n = 28$) مشاهدة ، وكانت ($R^2 = .65$)، ($SSE = 15.22$) لهذا النموذج.

أ – هل SSE , R^2 تفيد في أن هذا النموذج جيد التنبؤ بـالمتغير Y ؟ وضح إجابتك .

ب – حدد قيم SST , SSR , R_a^2 واشرح لماذا R_a^2 أصغر من R^2 .

(١٠–٩) إفترض اننا نستخدم نموذج المربعات الصغرى التالى :

$$\hat{Y} = 3.06 - .22X_1 + 8.44X_2 - 2.44X_3$$

لعينة ($n = 100$) مشاهدة، وكانت: ($\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2 = 855.1$) , ($\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 144.3$) لهذا النموذج .

أ – حدد قيم SSE , SST , R^2

ب – حدد R_a^2 . هل يمكنك القول بأن النموذج جيد التنبؤ بالمتغير Y ؟ اشرح إجابتك .

(١٠–١٠) اذا كانت معادلة المربعات الصغرى للبيانات التالية هي :

$$\hat{Y} = 120.86 + 23.492X_1 - 2.2596X_2$$

Y	158	165	145	172	179	152	154
X_1	2.2	2.1	1.9	2.4	2.8	2.3	2.6
X_2	5	3	8	6	2	10	12

أ– بخصوص هذه البيانات ، هل تقدير ($b_0 = 120.86$)له معنوية حقيقية ؟ اشرح إجابتك .

ب– قدر متوسط Y عندما ($X_1 = 2.5$) , ($X_2 = 4$)

ج – حدد SSE , S_e^2

د – حدد R^2 , R_a^2 . هل يمكنك القول أن معادلة النموذج جيدة للتنبؤ بالمتغير Y ؟ اشرح إجابتك .

(١٠–١١) بالإشارة إلى تمرين(١٠–١٠)، وفق خطان مستقيمان، أحدهما بإستخدام X_1 فقط والآخر بإستخدام X_2 فقط .

أ – حدد SSE، S_e^2 لكلا الخطين وقارن بين نتائجك ونتائج الجزء (ج) فى تمرين(١٠–١٠) إشرح إجابتك .

ب– حدد R^2 , R_a^2 للخطين وقارن نتائجك بنتائج الجزء (د) فى تمرين (١٠–١٠) اشرح النتائج التي تصل إليها .

ج- ارسم البواقى لخط الإنحدار الذي به X_1 ، فى مقابل القيم المناظرة لمتغير X_2 . افعل نفس الشيء للبواقى الخاصة بخط الإنحدار X_2 مقابل قيم X_1 المناظرة؟ اشرح إجابتك .

د - من خلال إجابتك فى الأجزاء (أ) إلى (ج) لهذا التمرين . ما الإستنتاج المعقول الذي توصلت إليه لكلا المتغيرين X_1 , X_2 ؟

(٤-١٠) كيف يكون النموذج جيداً ؟ الإستنتاج الإحصائى للإنحدار الخطى المتعدد

How good is The Model? Statistical Inference for Multiple Linear Regression

يستخدم الإنحدار المتعدد بنفس الطريقة التى يستخدم بها الإنحدار الخطى البسيط ، بهدف الوصول إلى علاقة مفهومة بين المتغيرات العملية ، لتقدير متوسط Y أو التنبؤ بقيم Y بمعلومية مجموعة من قيم المتغيرات المفسرة فى النموذج . للتوضيح نعود إلى مثال الأيس كريم كما ناقشناه من قبل حيث تكون معادلة المربعات الصغرى : ($\hat{Y} = 25.8777 - 1.3418X_1 + 5.1953\ X_2$) وتساعدنا المعادلة على فهم حساسية المبيعات Y للتغيرات فى السعر X_1 ، ودرجة الحرارة X_2 . ويزودنا النموذج أيضاً بتقدير لمتوسط المبيعات أو التنبؤ بمبيعات يوم عند سعر ودرجة حرارة معينة . لكن كما كان الحال فى الفصل التاسع ، لايمكن إستخدام نموذج المربعات الصغرى إلا إذا تم تقييمه بكل دقة .

والقضايا التي تتعلق بتقييم نموذج المربعات الصغرى ، هى نفس القضاياالتي وضحت في الجزء (٩-٤)، ونعيدها مرة أخرى وهى:

١- هل بيانات العينة تشير بقناعة إلى العلاقة الموجودة بين Y المتغيرات المفسرة كما حددت فى نموذج الإنحدار ؟

٢- ما دقة التقديرات أو التنبؤات بمعادلة المربعات الصغرى ؟ وما هى إعتبارات الدقة التي تتضمن تقدير المعالم β's وتقديرات وتنبؤات المتغير التابع Y ؟

٣- هل هناك أى خلل يمكن توضيحه بالنسب للفروض الأساسية للإستنتاج الإحصائى؟ فكما فى الفصل التاسع يلعب تحليل البواقى دوراً كبيراً فى هذا الخصوص .

عموماً، سيعاد حل هذه القضايا بإستنتاج إحصائى ملائم لمعادلة المربعات الصغرى . مشتملاً فترات الثقة وإختبارات الفروض للمعالم β's . وهذه الإستنتاجات تعتبر إمتداداً لتلك الموجودة فى الفصل التاسع والخاصة بنموذج الإنحدار البسيط . فمثلا تعتمد طرق الإستنتاج الإحصائي على إفتراضات موجودة فى جزء (٩-٤-١) وسوف نعيدها هنا مرة أخرى .

ملخص لفروض الإستنتاج فى الإنحدار الخطى المتعدد :

Summary of Assumptions for Inferences in Multiple linear Regression

١-نموذج الانحدار المحدد له صيغة صحيحة . فنموذج الإنحدار ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + ... + \beta_KX_K + \varepsilon$) يمثل بصورة صحيحة شكل العلاقة بين المتغير التابع ومجموعة المتغيرات المفسرة . عند قيم معينة X_1 , X_2 , ... , X_k للمتغيرات المفسرة يكون { $E(Y) = \beta_0 + \beta_1X_1 + ... + \beta_KX_K$ } ويكون متوسط الخطأ العشوائي مساويا للصفر . معنى ذلك أنه عندما تكون تقديرات المربعات الصغرى محددة فإن معادلة المربعات الصغرى ($\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + ... + b_KX_K$) تقدر متوسط قيمة Y لمجموعة من قيم المتغيرات المفسرة .

٢- تباين الخطأ مقدار ثابت . تباين الخطأ σ_ε^2 مقدار ثابت لكل قيم المتغيرات المفسرة . لهذا فإن مدى إختلافات قيم Y من نموذج الإنحدار تكون واحدة بغض النظر عن قيم المتغيرات المفسرة .

٣- الأخطاء العشوائية تكون مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي. الأخطاء العشوائية المرتبطة بقيم Y تكون مستقلة إحصائياً عن بعضها البعض. وتتوزع طبقاً للتوزيع الطبيعي .

(١٠-٤-١) الإستنتاجات الإحصائية للنموذج الكامل : أسلوب تحليل التباين

Statistical Inferences on the Overall Model: An Analysis of Variance Approach

من المحتمل أن بعض أو كل المتغيرات التفسيرية فى معادلة المربعات الصغرى لا تكون مفيدة فى تفسير الإختلاف فى قيم Y . ومن الأغراض الأساسية لتقييم النموذج هو تحديد أى من هذه المتغيرات المفسرة، أن وجد، يجب أن يتواجد فى معادلة الإنحدار . لكن يجب أن نبحث أولاً ما إذا كانت العلاقة بين Y وأى من المتغيرات المفسرة المحددة موجودة أم لا. لهذا نستخدم تحليل التباين .

ففى مثال الأيس كريم ربما نسأل ما إذا كانت توجد علاقة واضحة بين المبيعات Y وأى من المتغيرات التفسيرية: السعر X_1 ، ودرجة الحرارة اليومية X_2 .افترض أننا مؤقتا أفترضنا أنه لاتوجد علاقة بين لا وكل من X_1، X_2. هذا يعنى أن المعاملات β_1 ، β_2 فى نموذج إنحدار المجتمع تساوى صفر . سنأخذ هذا على أنه الفرض العدمى. إذا كانت العلاقة غير واضحة، إذن على الأقل فإن واحدة من المعالم β_1 ، β_2 لا تساوى الصفر، ويكون هذا هو شكل الفرض البديل .

في نموذج الإنحدار : $(Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ... + \beta_K X_K + \varepsilon)$ نجد أن إجراء تحليل التباين يتشابه مع ماجاء في الفصل التاسع، ويكون ملائماً لإختبار الفرض العدمى :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_K = 0$$

فى مقابل الفرض البديل: على الأقل واحد من المعالم β_1 ، β_2 ، . . . . ، β_k لايساوى الصفر: H_a

تذكر أن نموذج إنحدار المجتمع يتكون من جزئين (جزء محدد وجزء عبارة عن خطأ عشوائى) بنفس الأسلوب كما فى الفصل التاسع نجد أنه في تحليل التباين يمكن تجزئة مجموع المربعات الكلى إلي جزئين واللذان يمثلان جزئي نموذج الإنحدار. وهكذا يتم تجزئة الإختلاف الكلى لقيم Y إلي جزئين : (1) تغير أو إختلاف يعزى إلى تغير فى قيم المتغيرات المفسرة فى النموذج. (2) تغير أو إختلاف يعزى إلى الخطأ العشوائى. وبلغة مجاميع المربعات (SST = SSR + SSE) . هذه الكميات تم تفسيرها فى جزء (١٠-٣-٣) ووضحت بإستخدام مثال الأيس كريم .

ومن المهم فهم أن SSR , SSE لهما علاقة تكاملية. تظل SST ثابتة لكل بيانات العينة المعطاة بصرف النظر عن أي متغيرات تفسيرية موجودة فى النموذج، لأنها ببساطة تعتمد فقط على قيم Y. لكن SSE , SSR مجموعهما يجب أن يساوى SST . لذا إذا زاد أحدهما ينقص الآخر. أفضل معادلة مربعات صغرى تلائم بيانات العينة، تلك التي لها أصغر قيمة لـ SSE وأكبر قيمة لـ SSR. في الحالات المتطرفة، فإن معادلة المربعات الصغرى التي تلائم بيانات العينة بدقة تامة يكون فيها: SST = SSR & SSE = 0.

الأحصاء الأساسي في منهج تحليل التباين هو النسبة بين مجموع مربعات الانحدار والخطأ، أي: MSR/MSE. وكما في الفصل التاسع، فإن مجموع المربعات طور بالقسمة على درجات الحرية الملائمة والمناظرة له. نتذكر من الجزء (٩-٤-٥) أن عدد درجات الحرية لـ SSR

هـو عـدد الحـدود التي تشتمل على المتغـيرات التفسـيرية في نمـوذج الانحدار. في النمـوذج: $Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + ... + \beta_KX_K + \varepsilon$ ، يوجـد K من مـثل هذه الحـدود. وبالتـالى فـهناك K من درجـات الحرية مـقترنة بـ SSR. في الجـزء (١٠-٣-٢) بينا أنه طالما أن هناك (K+1) من المعـالم β يجب تقديرها ، فإن المقام عند تحديد مـتوسـط مربعـات الخطأ (تباين البـواقي S_e^2) يكـون : n-(K+1). وعلى ذلك ، يـوجـد n-(K+1) من درجـات الحـرية تكون مـرتبطة بـ SSE. بهذا نجد أن مـتوسط مربعات الانحدار والخطأ يكونا على الصورة التالية:

$$MSR = \frac{SSR}{K} \quad (10.10)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-(K+1)} \quad (10.11)$$

الأحصاء F هو نسبة متوسطى المربعين:

$$F = \frac{MSR}{MSE} \quad (10.12)$$

وإذا كان الفرض العدمى وهو عـدم وجود علاقة بين Y والمتغيرات التـفسيرية X_1 ، X_2 صـحيحاً ، فإن توزيع المعـاينة لهذه النسبة هو توزيع F بـ K درجة حـرية البسط ، n-(K+1) درجة حـرية المقام. وكمـا سبق القـول من قبل ، فـإنه كلما كبـرت قيمة F صـغـرت قيمة P ويكون هناك دليل قـوى ضد الفرض العدمى القائل بإنه ليس هناك إرتباط بين Y والمتغيرات المفسرة .

وللتوضـيح ، نرجع إلى مثال الأيس كـريم ، حيث أن (n = 10) حجم العينة ، (k=2) حدين يشـملا متغـيـرات مفسـرة ومـجمـوع البـواقى SSE تساوى 1,206.158 ومجمـوع مـربـعـات الإنحـدار (SSR = 14,553.942) ومجموع المربعات الكلى تساوى 15,760.10 ويكون الفرضين العدمي والبديل:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

H_a : على الأقل واحد من المعالم β_1 أو β_2 لا يساوى الصفر

ويعطى جدول تحليل التباين (١٠-١) قيمة F المحسوبة 42.232 وقيمة P تساوى 0001. وحيث أن قيمة P تساوى الصفر تقريباً. فإن دليل العينة يتعارض بقوة مع الفرض العـدمى القائل بعدم وجود علاقة بين Y والمتغيـرات المفسرة (X_2 , X_1) . لهذا يمكننا أن نصل لدرجـة ثقة كبيرة أنه توجـد علاقة بين المبيعات وواحد على الأقل من المتغيرات المفسرة ، السعر X_1 ، ودرجة الحرارة X_2 .

جـــدول (١٠-١) : جدول تحليل التباين الكلي لمثال الأيس كريم

Source	df	SS	MS	F-value	P-value
Due to regression	2	14,553.942	7,276.971	4.0232	.0001
Due to error	7	1,206.158	172.308		
Total	9	15,760.100			

(١٠-٤-٢) تقييم المساهمة الفردية لمتغير تفسيري: الأحصاء T :

Evaluating the Contribution of an Individual Predictor Variable: The T Statistic

إفترض أن إجراء تحليل التباين للنمـوذج الكلي لم يكتشـف بوضـوح عن العلاقة بين Y وواحد على الأقل من المتغـيرات المفسرة كمـا رأينا فى مثال الأيس كـريم. تكون الخطـوة المنطقية التاليـة هى تحديد أى المتغيرات المفسرة يظهـر ليساهم فى تـفسيـر الإختـلاف فى قيم Y ، وأى منها ليس له هذا التـأثير ويمكن تحقيق ذلك باجراء اختبارات فردية لكل معامل β الذى يتضمنه المتغير المفسر .

وفيما يتعلق بنموذج الإنحدار : $(Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ...+ \beta_K X_K + \varepsilon)$، يكون الفرض العدمى لإختبار المساهمة الفردية للمتغير المفسر X_i هو $(H_0: \beta_i = 0 \text{ For } i = 1, ..., k)$ ويقر هذا الفرض العدمى بانه على الرغم من تغير المتغير المفسر X_i، فإن قيمة متوسط Y تظل ثابتة طالما ظلت قيمة المتغيرات الأخرى المفسرة فى النموذج بدون تغيير. ويوجد تفسير آخر فى غاية الأهمية لهذا الفرض العدمى وهو أن إضافة المتغير X_i إلى النموذج الذى يحتوى بالفعل على متغيرات مفسرة أخرى، لا يحسن من عملية التنبؤ بقيم Y : وهذا معناه، إنه إذا كانت $(H_0: \beta_i = 0)$ صحيحة، فإن : X_i لاتمدنا بمعلومات مفيدة لتقدير قيم Y ، أى لاتمدنا بمعلومات أكثر من تلك المعلومات التى تم الحصول عليها بواسطة المتغيرات الأخرى المفسرة. وبالتالى فإن $(\beta_i = 0)$ عبارة عن المساهمة الهامشية للمتغير المفسر X_i فى التنبؤ بقيمة Y، فى وجود كل جميع المتغيرات المفسرة الأخرى للنموذج، هذه المساهمة تساوى صفر. وربما يكون الفرض البديل من طرفين (ذيلين) two-sided أو في جانب واحد (ذيل واحد) one-sided. ويعتمد ذلك على العلاقة الخاصة بين X_i , Y . ونلاحظ أن معظم برامج الحاسبات تفترض وجود الفرض البديل ذو الجانبين two-sided. ولهذا السبب سوف نتبنى ذلك الفرض في هذا الفصل.

لا تندهش إذا علمت أن الإحصاء T هو المؤشر الملائم لاستنتاج المساهمة الهامشية للمتغير المفسر فى حضور كل المتغيرات المفسرة الأخرى فى النموذج ومعرفة قيمة مقدر b_i للمتغيرات والخطأ المعيارى للمقدر b_i ، يمكن إختبار الفرض العدمى$(H_0: \beta_i = 0)$ بواسطة قيمة T المحسوبة.

$$T_i = \frac{b_i - 0}{SE(b_i)} \qquad (10.13)$$

أو تحديد نتيجة P أو إنشاء فترة ثقة للمقدار β_i . وكالعادة، فإن قيمة P الصغيرة تتعارض مع الفرض العدمى وتقترح أن X_i يساهم مساهمة هامشية فى التنبؤ بقيمة Y . وعكس ذلك إذا كانت فترة الثقة للمقدار β_i لا تحتوى على الصفر. لا يكون الفرض العدمى على نحو يوهم بأنه مقبول وبالتالى يكون هناك دليل على أن X_i له مساهمة هامشية للتنبؤ بقيمة Y . وفى كلتا الحالتين فإن توزيع المعاينة للإحصاء T هو توزيع T بدرجة حرية $\{n - (K+1)\}$ (وهي نفسها درجة حرية SSE) لهذا فإن فترة الثقة $\{100(1-\alpha)\%\}$للمؤشر β_i تكون :

$$b_i \pm t_{1-\alpha/2,\, n-(k+1)} SE(b_i) \qquad (10.14)$$

حيث: $t_{1-\alpha/2,[n-(k+1)]}$ قيمة جدولية من توزيع T (انظر جدول C فى الملحق).

والتعبيرات التى تحدد قيمة $SE(b_i)$ أي الخطأ المعياري لتقديرات المربعات الصغرى وتشمل جبر المصفوفات والتى لن نقوم بذكرها هنا. وعموماً فإن مخرجات الحاسب الآلى تمدنا دائماً بالمقدرات والأخطاء المعيارية دون مجهود.

استخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

كما رأينا في الفصل التاسع، فإن كل من Minitab، SAS (والعديد من البرامج الاحصائية الجاهزة الأخرى) تزودنا بالمعلومات الناسبة والمطلوبة في عمليات تحليل الانحدار. وسوف نستخدم بيانات مثال الأيس كريم السابق لتوضيح مخرجات الحاسب عند إستخدام Minitab وكذلك SAS (انظر جدول ١٠-٢) للبرنامج SAS فإننا إستخدمنا الأمر PROC GLM بدلاً من PROC REG لأن ذلك يزودنا بمعلومات مفيدة في إختيار المتغيرات المفسرة والتي يتضمنها النموذج، كما سوف يتم مناقشتها في الجزء التالي Next Section.

لاحظ أن مخرجات Minitab (بخلاف الجزء الأخير منها) عبارة عن إمتداد طبيعي من المخرجات الخاصة بالانحدار الخطي البسيط والتي تم مناقشتها في الفصل التاسع. وفي مخرجات SAS وجدنا أن مقدرات المربعات الصغرى للمعلمات β_0، β_1، β_2 تحت العمود المعنون بكلمة Estimate في الجزء الأخير من المخرجات. وكما لاحظنا فإن ($b_0 = 25,8777$)، ($b_1 = -1.3418$)، ($b_2 = 5,1953$): وبالتالي فإن تقدير المربعات الصغري هو ($\hat{Y} = 25.877 - 1.3418\ X_1 + 5.1953X_2$).

ومن هذا الجزء من مخرجات SAS فإننا نجد أيضاً الأخطاء المعيارية لمقدرات المربعات الصغرى في العمود الذي عنوانه Std Error of Estimate وبالتالي فإن ($SE(b_o)= 51.3260$)، ($SE(b_1)= .3620$)، ($SE(b_2)= .5839$) ويكون تفسير الجزء الأخير من مخرجات Minitab وكذلك الجزء الأوسط من مخرجات SAS (والذي يتبع كلا منهما لجدول تحليل التباين ANOVA) في الجزء التالي Next Section، ولتقييم كيفية توفيق معادلة المربعات الصغرى بقيم Y، فإنه تم عمل هذه الملاحظات بالاعتماد على مخرجات البرامج الاحصائية Minitab أو SAS.

(١) تحليل النموذج بشكل عام: بالنسبة للنموذج بشكل عام فإن الفرض العدمي ($H_o: \beta_1 = \beta_2 = 0$) يتعارض بشكل كبير من بيانات المثال حيث أن قيمة P-value والتي تناظر قيمة (F والتي قيمتها 42.23) عبارة عن قيمة صغيرة جداً (.0001). وبالتالي فإننا نعلم انه ربما يكون السعر أو درجة الحرارة أو كلاهما تساعد في شرح الاختلاف في قيم Y في العينة.

(٢) تحليل المساهمة الهامشية الفردية للمتغيرات المفسرة: والآن نستطيع تقييم المساهمات الفردية للسعر في وجود مساهمة درجة الحرارة، أو المساهمة الفردية لدرجة الحرارة في وجود مساهمة السعر. وسوف نلاحظ أن الفروض العدمية الفردية ($H_o: \beta_1 = 0$)، ($H_o: \beta_2 = 0$) تتعارض مع بيانات العينة لأن قيمة P-value المناظرة مقدار صغير للغاية. فمثلاً بالنسبة للسعر نجد أن قيمة T هي ($T_1 = -1.3418/.3620 = -3.71$) حيث تكون قيمة P-value هى (.0076). أما بالنسبة لدرجة الحرارة فإن قيمة T هى ($T_2 = 5.1953/0 = .5839 = 8.90$) وتكون قيمة P-value هى (.0001). وفي

جدول (١٠-٢)

مخرجات الانحدار بالبرامج Minitab -SAS لبيانات مثال الأيس كريم

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: SALES

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	14553.94187442	7276.97093721	42.23	0.0001
Error	7	1206.15812558	172.30830365		
Corrected Total	9	15760.10000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	SALES Mean
0.923468	3.191497	13.12662575	411.30000000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRICE	1	912.66666667	912.66666667	5.30	0.0549
TEMP	1	13641.27520776	13641.27520776	79.17	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRICE	1	2367.16968325	2367.16968325	13.74	0.0076
TEMP	1	13641.27520776	13641.27520776	79.17	0.0001

تابع : جدول (١٠-٢)

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	25.87773161	0.50	0.6296	51.32600406
PRICE	-1.34175131	-3.71	0.0076	0.36200155
TEMP	5.19529086	8.90	0.0001	0.58389598

Minitab

```
The regression equation is
sales = 25.9 - 1.34 price + 5.20 temp

Predictor        Coef      Stdev     t-ratio       p
Constant        25.88      51.33        0.50   0.630
price         -1.3418     0.3620       -3.71   0.008
temp           5.1953     0.5839        8.90   0.000

s = 13.13    R-sq = 92.3%    R-sq(adj) = 90.2%

Analysis of Variance

SOURCE        DF        SS        MS         F       p
Regression     2   14553.9    7277.0     42.23   0.000
Error          7    1206.2     172.3
Total          9   15760.1

SOURCE        DF    SEQ SS
price          1     912.7
temp           1   13641.3
```

مخرجات SAS ظهرت قيمة T في العمود الذي له العنوان الذي (T for H_0 : Prmeter = 0) والصفوف (PRICE nd TEMP.). وتوجد قيم P المناظرة في العمود التالي إلى اليمين. ولذلك فإننا نخلص بأن السعر يمدنا بمعلومات متزايدة مفيدة غير تلك المعلومات التي تساهم بها درجة الحرارة. كما أن درجة الحرارة تمدنا بمعلومات متزايدة مفيدة غير تلك المعلومات التي يساهم السعر. وبالتالي فإن معادلة المربعات الصغرى والتي تحتوى كل من السعر ودرجة الحرارة تكون حقا أفضل في التنبؤ بقيمة Y من أى نموذج يحتوى على واحد فقط من تلك المتغيرات.

(٣) تحليل دقة معاملات الانحدار المقدرة: إن دقة المعلومات β_1 ، β_2 المقدرة تعتبر جيدة. حيث أن الأخطاء المعيارية لمقدرات المربعات الصغرى تعتبر أصغر من قيمة المقدرات. وفي الحقيقة فإنه بمقارنة حجم قيم T-values ($T_1 = -3.71$) ، ($T_2 = 8.90$) فإننا نستطيع أن نخلص إلى أن β_2 يتم تقديرها بدقة أكثر نسبياً عن β_1. وبإستخدام المعادلة رقم (10.14) نستطيع تكوين أو إنشاء فترات ثقة لكل من β_1 ، β_2 ، فعلى سبيل المثال نجد أن فترة ثقة 95% للمعلمة β_1 : ($t_{.975,7} = 2.365$) هي:

$$- 1.3418 \pm (2.365)\ (.3620) = - 1.3418 \pm .8561$$

أو هى (2.1979- ، - .4857). وهذا يعنى أنه، إذا ظلت الحرارة ثابتة، فإن متوسط المبيعات ربما ينخفض أو يتناقص بما يساوى حوالى 2.2 أوقية على الأكثر أو بما يساوى 49. أوقية على الأقل

لكل تخفيض بمقدار ١ سنت فى السعر . كما أن فترة الثقة 95% للمعلمة β_2 هي

$$5,1953 \pm (2.365)\ (.5839) = 5.1953 \pm 1.3809$$

أو هى (6.562 ، 3.8144). وهذا يعني أنه إذا ظل السعر ثابتا ، فإن متوسط المبيعات ربما يرتفع أو يتزايد بما يساوى 6.58 أوقية تقريباً على الأكثر أو بما يساوى 3.81 أوقية على الأقل عند ارتفاع درجة الحرارة اليومية بدرجة واحدة .

(٤) تحليل معامل التحديد: نجد أن قيم كل من R^2 (.9235) وكذلك R^2 المعدل Adjusted R^2 (.9016) كبيراً بدرجة معقولة . وهذا معناه أن معظم الاختلافات في قيم العينة Y تم شرحه عن طريق معادلة المربعات الصغرى والتي تحتوى على السعر ودرجات الحرارة . وهذا ليس معناه أنه يمكننا تحسين هذا النموذج عن طريق إضافة متغيرات مفسرة جديدة .

ولعله من المعقول أن نكون متفائلين بأن معادلة المربعات الصغرى ($\hat{Y} = 25.8666 - 1.3418X_1 + 5.1953X_2$) تكون مناسبة للتقدير والتنبؤ في حدود مدى الاسعار ودرجات الحرارية التي توجد في بيانات العينة . ويتبقى فقط إجراء تحليل البواقي لإختبار صحة فروض النموذج .

(١٠-٤-٣) إختبارات إضافية عن المساهمات الفردية للمتغيرات المفسرة : مبدأ مجموع المربعات الإضافية : Extra Sum of Squares Principle

فى الجزء السابق ، تعلمت كيف يستخدم الأحصاء T فى فحص المساهمة الهامشية لمتغير مفسر معين إذا كانت معادلة المربعات الصغرى تشمل كل المتغيرات المفسرة الأخرى . وفى هذا الجزء نقدم مفهوم مرن خاص يميز مجموع المربعات الإضافى للإسهام الهامشى للمتغير المفسر ويسمى «مبدأ مجموع المربعات الأضافي **Extra Sum of Squares Principle**» . يساعدنا هذا الإجراء على فهم أفضل لفكرة الإسهام الهامشى ومشكلة الازدواج الخطى بين المتغيرات المستقلة **Collinearity** والتى سوف تناقش فى الجزء (١٠-٧) . ولحسن الحظ فإن المعلومات الدائمة المتعلقة بمبدأ مجموع المربعات الإضافى توجد فى العديد من حزم الحاسب الآلى ومنها Minitab , SAS (والجزء من مخرجات SAS ، Minitab والتى لم تناقش فى مشكلة الأيس كريم تتعلق بهذه الجزئية) .

ونلاحظ أنه فى بعض تطبيقات الإنحدار ، لا يزودنا المتغير المفسر بمعلومات إضافية فى النموذج الذى يحتوى على متغيرات مفسرة أخرى ، حتى إذا كان هذا المتغير المفسر مفيد فى التنبؤ بالمتغير التابع عندما يكون هو المتغير المفسر الوحيد فى النموذج . فى بعض التطبيقات الأخرى ، قد يزودنا المتغير المفسر بمعلومات إضافية تفيد فى النموذج الذى يحتوى على متغيرات مفسرة أخرى ، حتى إن لم يكن كذلك عندما يؤخذ فى الإعتبار وحده . معرفةمثل تلك الشكلة الدقيقة يمكن الحصول عليها وفصلها بإستخدام مبدأ مجموع المربعات الإضافى . ويعتمد هذا المبدأ الأساسى على طبيعة مجموع المربعات الكلية وطبيعة مجموع مربعات الإنحدار وطبيعة مجموع مربعات البواقى . والتى تستحق إعادة ذكرها هنا :

١- فى حالة معرفة قيم Y لعينة معينة فإن : مجموع المربعات الكلى SST لا تكون متأثرة عندما تضاف عناصر تشمل متغيرات مفسرة جديدة فى نموذج الإنحدار .

٢- مجموع مربعات الأخطاء SSE يقل ولو بمقدار قليل بزيادة عدد العناصر المضافة إلى النموذج .

٣- مجموع مربعات الإنحدار SSR تزيد على الأقل بمقدار قليل بزيادة العناصر المضافة للنموذج ، والزيادة فى مجموع مربعات الإنحدار تتوافق مع إنخفاض مجموع مربعات الأخطاء .

مما تقدم ، فإن الأسلوب المنطقى فى الإنحدار الخطى المتعدد هو إضافة عناصر إلى النموذج فقط إذا كان إضافة تلك العناصر يقلل SSE بقدر كبير . وبالتالى يزيد SSR بقدر كبير .

وسوف نوضح هذا المبدأ بمثال الأيس كريم حيث أن :

$\{MSE(X_1, X_2)=172.308\}$ ، $\{SSR(X_1, X_2)=14,553.942\}$ ، $\{SSE(X_1, X_2)=1,206.158\}$ ، $(SST=15,760.1)$

ولمساعدة القارئ في إدراك المتغيرات المستقلة فى معادلة الإنحدار فقد تم تحديدها لكل من مجموع مربعات الإنحدار والخطأ ومتوسط مجموع مربعات الخطأ. لهذا فإننا نعرف "SSR (X_1, X_2) ,SSR للنموذج الذي يحتوى على متغيرات مفسرة (X_2, X_1) ". ولتحديد مجموع المربعات الإضافية نشير إلى الجزء المتوسط من مخرجات SAS فى جدول (١٠-٢) ولقد تم تقديمه هنا للتأكد. ونلاحظ أن هناك عمودان جدد تم تعريفهما كما يلي: Type I SS وكذلك Type III SS. ومثلما يوجد عمودان خاصان بمجموع المربعات، فإن هناك طرق عديدة مفيدة لتطبيق مبدأ مجموع المربعات الإضافي.

```
Source   DF        Type I SS        Mean Square      F Value     Pr > F

PRICE     1     912.66666667       912.66666667         5.30     0.0549
TEMP      1   13641.27520776     13641.27520776        79.17     0.0001

Source   DF      Type III SS        Mean Square      F Value     Pr > F

PRICE     1    2367.16968325      2367.16968325        13.74     0.0076
TEMP      1   13641.27520776     13641.27520776        79.17     0.0001
```

- الأحصاء الهامشى F المكافئ للأحصاء T : النوع الثالث SS III

النوع الثالث III لمجموع المربعات يقيس التزايد فى SSR والذى يكون نتيجة إضافة متغير مفسر للنموذج الذى يتضمن كل المتغيرات المفسرة الأخرى. على سبيل المثال الأثر المتزايد للمتغير الإضافى X_3 إلى نموذج الإنحدار الذى يشمل بالفعل X_2, X_1 . نقارن مجموع مربعات الخطأ للنموذجين: واحد يتضمن الثلاث متغيرات المفسرة والآخر يشمل X_2, X_1 فقط ونفترض أن النتائج كما يلى :

Model	SST	SSE	SSR
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$	100	40	60
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$	100	25	75
Extra sum of squares		15	15

لاحظ أن إضافة X_3 قلل مجموع مربعات الخطأ من 40 إلى 25 . ويمثل هذا «مجموع المربعات الإضافى» الأثر المضاف لإضافة X_3 إلى النموذج ويعرف مجموع المربعات الإضافية هنا $SSR(X_1, X_2, X_3)$ والتى تعنى زيادة فى SSR نتيجة لإضافة X_3 إلى النموذج الذى يحتوى سابقاً على X_2, X_1 .

وبتطبيق هذا المفهوم على مثال الأيس كريم نجد أن العمود المحدد كنوع ثالث SS III فى مخرجات SAS تزودنا بالقيم التالية :

$\{SSR\ (X_2|\ X_1) = 13{,}64.275\}$, $\{SSR\ (X_1\ |\ X_2) = 2{,}367.17\}$

وهنا نجد أن $SSR\ (X_1\ |\ X_2) = 2{,}367.170$ تمثل الإنخفاض فى مجموع مربعات الخطأ الذى يمكن أن يعزى إلى السعر X_1 عندما يضاف إلى النموذج الذى يحتوى فعلاً على درجة الحرارة X_2. ويتم شرح مجموع المربعات الإضافى فى الجدول التالى :

Model	SST	SSE	SSR
$\hat{Y} = b_0 + b_2X_2$	15,760.1	3,573.328	12,186.772
$\hat{Y} = b_0 + b_2X_2 + b_1X_1$	15,760.1	1,206.158	14,553.942
Extra sum of squares		2,367.170	2,367.170 $\Rightarrow$ $SSR(X_1|X_2)$

بالمثل فإن $\{SSR = (X_2|\ X_1) = 13{,}641.275\}$ تمثل إنخفاض في مجموع مربعات الخطأ الذى يعزى إلى إضافة درجة الحرارة إلى النموذج الذى يحتوى بالفعل على السعر. ويكون مجموع المربعات الإضافى كما يلى :

Model	SST	SSE	SSR
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1$	15,760.1	14,847.433	912.667
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$	15,760.1	1,206.158	14,553.942
Extra sum of squares		13,641.275	13,641.275 $\Rightarrow$ $SSR(X_2|X_1)$

وكلما زاد الإنخفاض فى مجموع مربعات الخطأ، كلما زادت فائدة إضافة متغير تفسيرى إلى النموذج الذى يحتوى بالفعل على متغيرات تفسيرية أخرى .

هل أنت مندهش، أن درجة الحرارة أكثر فائدة نسبياً فى التنبؤ بقيمة Y عن السعر؟، لايجب أن تندهش فنحن بالفعل توصلنا لمثل ذلك معتمدين على الأحصاء T . فربما يكون هناك بعض الإتصال بين النوع الثالث III لمجموع المربعات والأحصاء T ، وسنلاحظ كما فى حالة الأحصاء T أن المساهمة الإضافية لكل متغير مفسر فى وجود كل المتغيرات المفسرة الأخرى يمكن تحديدها بواسطة الأحصاء F . أولاً ، يجب تحديد متوسط المربعات المناظر لمجموع المربعات الإضافية للكميات $\{SSR = (X_1|\ X_2)\}$, $\{SSR\ (X_2|\ X_1)\}$ حيث أن كل مجموع مربعات يمثل أثر إضافة عنصر إلى النموذج وحيث توجد درجة حرية واحدة فقط مرتبطة به. لهذا فإن: $[MSR\ (X_1|\ X_2) = SSR\ (X_1|\ X_2)\ /1]$، $[MSR(X_2|\ X_1) = SSR\ (X_2|\ X_1)\ /1]$ ، بالتالى، فإن متوسط المربعات ومجموع المربعات يكونا متطابقان. ولإختبار الأثر الإضافى عند اضافة X_1 إلى النموذج الذى يحتوى بالفعل على المتغير X_2 فإننا نحدد نسبة $\{SSR\ (X_1|\ X_2)\}$ إلى $\{MSE\ (X_1, X_2)\}$. وبالمثل فإنه لإختبار الأثر الإضافى المتزايد لإضافة X_2 إلى النموذج الذى يحتوى على المتغير X_1 نحدد نسبة $\{SSR\ (X_2|\ X_1)\}$ إلى $\{MSE\ (X_2, X_1)\}$ هذه النسب هى إحصاءات F، وتسمى باحصاءات F الهامشية أو الجزئية لأختبار الفروض $H_o\!: \beta_1=0$ ، $H_o\!: \beta_2=0$.

بتطبيق ذلك على مثال الأيس كريم نجد أن قيمة F الجزئية للإختبار $(H_o\!: \beta_1=0)$ فى وجود X_2 هو:

$$F_1 = \frac{SSR(X_1\,|\,X_2)/1}{MSE(X_1, X_2)/1} = \frac{2{,}367.170}{172.308} = 13.74$$

بينما تكون قيمة F الجزئية لإختبار $(H_0: \beta_2=0)$ في وجود X_1 :

$$F_2 = \frac{SSR(X_2|X_1)/1}{MSE(X_2, X_1)} = \frac{13,641.275}{172.308} = 79.17$$

هذه القيم للاحصاء F بالإضافة إلى قيم P $(P_r > F)$ توجد في مخرجات البرنامج الإحصائي SAS المجاورة لعمود النوع الثالث لمجموع المربعات (Type III SS) لنفس الفروض. نعود إلى الإحصاء T حيث $(T_1 = -3.71)$ ، $(T_2 = 8.9)$. والآن ماذا تعتقد عندما نقوم بتربيع قيم T هذه؟ تحصل بالطبع على قيم F المناظرة، لماذا؟ لأنه كما ذكرنا في الفصل التاسع فأن مربع المتغير العشوائي T بدرجات حرية V يكون مساوياً لقيمة المتغير العشوائي F بدرجة حرية واحدة في البسط ودرجات حرية V في المقام. لهذا فإن قيم P (.0001 , .0076) تكون هي نفسها كما تم الحصول عليها مع قيم T ، لأن الإحصاء F الهامشي من النوع III من مجموع المربعات، تكون مساوية للإحصاء T المناظر.

- الإحصاءات الهامشية F لآخر متغير مفسر تم إدخاله للنموذج : النوع SS I

يمكن الإستفادة من تطبيق مبدأ مجموع المربعات الإضافية بطرق أخرى. حيث أنه إذا إفترضنا أن لدينا أربعة متغيرات مفسرة في نموذج إنحدار : X_1 , X_2 , X_3 , X_4 ويستخدم أسلوب إختبار أثر إضافة متغير واحد في كل مرة، وهذا معناه أننا نستخدم أربعة نماذج : النموذج الأول سوف نعتبر أن به متغير مفسر واحد X_1 ثم نوجد النموذج للإنحدار الثاني مع المتغيرات X_1 , X_2 . ثم نوجد النموذج الثالث مع X_1 , X_2 , X_3 . ثم نوجد النموذج الرابع مع X_1 , X_2 , X_3 , X_4 . وفي كل حالة نلاحظ كيف أن إضافة متغير تفسيري يخفض في مجموع المربعات للخطأ. ويسمى هذا التغير المتتالي في مجموع مربعات الخطأ بمجموعات المربعات من النوع الأول [Type I] وتستخدم الملاحظات التالية :

$SSR(X_1)$ = مجموع مربعات الإنحدار عندما يكون X_1 المتغير المفسر الوحيد .

$SSR(X_2|X_1)$ = مجموع المربعات الإضافية عندما يضاف X_2 إلى النموذج مقارنة بمجموع مربعات الإنحدار عندما يحتوى النموذج على X1 فقط .

$SSR(X_3|X_1, X_2)$ = مجموع المربعات الإضافية عندما يضاف X_3 إلى النموذج مقارنة بمجموع مربعات الإنحدار للنموذج الذي يحتوى على X_1 , X_2 .

$SSR(X_4|X_1, X_2, X_3)$ = مجموع المربعات الاضافية عندما يضاف X_4 إلى النموذج مقارنة بمجموع مربعات الإنحدار للنموذج الذي يحتوى على X_1 , X_2, X_3.

على سبيل المثال، إفترض أن مجموع مربعات الخطأ والإنحدار كما يلي للأربعة نماذج :

Model	SST	SSE	SSR	Type I SS
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1$	100	50	50	50
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$	100	40	60	10
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$	100	25	75	15
$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4$	100	5	95	20
Total				95

والنوع الأول (I) لمجموع المربعات هو عبارة عن زيادة متتالية فى مجموع مربعات الإنحدار كمتغيرات مضافة إلى النموذج واحداً بعد الآخر. لاحظ أن مجموع المربعات الكلى للنوع I فى الجدول يكون 95 هو نفسه مجموع مربعات الإنحدار للنموذج النهائي الذى يشمل X_1, X_2, X_3, X_4. وهذا صحيح بصفة عامة. مجموع المربعات من النوع I الذي يمثل تجزئة لمجموع مربعات الإنحدار المتضمن كل المتغيرات المفسرة لأى نموذج له أربعة متغيرات مفسرة.

$$SSR(X_1, X_2, X_3, X_4) = SSR(X_1) + SSR(X_2|X_1) + SSR(X_3|X_1, X_2) + SSR(X_4|X_1, X_2, X_3) \quad \textbf{(10.15)}$$

وكل مجموع مربعات من النوع I يكون له درجة حرية واحدة لأنها تمثل مساهمة عنصر واحد فقط يشمل متغير مفسر. ويساعدنا الحاسب الآلى فى تحديد مجموع المربعات من النوع I. وعموماً ، ليس من الضرورى توفيق أربعة نماذج. وبدلاً من ذلك فإن البرنامج الإحصائى SAS يزودنا بكل مجموع المربعات من النوع I عندما نوفق نموذج كامل يحتوى على كل المتغيرات المفسرة وهذا موضح فى العمود (Type I SS) .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان هناك متغيران مفسران فى مثال الأيس كريم، فمن الممكن تجزئة مجموع مربعات الإنحدار (عندما يكون كلا المتغيرين السعر X_1 ودرجة الحرارة X_2 فى النموذج) إلى مكونات كل واحد منهم عبارة عن النوع الأول من مجموع مربعات الإنحدار بدرجة حرية واحدة. فإذا إفترضنا أن ترتيب الدخول للمتغيرات المفسرة إلى النموذج تكون السعر أولاً ثم درجة الحرارة. فتجزئة مجموع مربعات الإنحدار إلى مكونات يعزى إلى ترتيب دخول كل متغير مفسر ويكون :

$$SSR(\text{Price, Temperature}) = SSR(\text{Price}) + SSR(\text{Temperature} \mid \text{Price}) \quad \textbf{(10.16)}$$

مجموع مربعات الإنحدار للنموذج الذى يحتوى على السعر ودرجة الحرارة المعطى فى جدول (١٠-٢) يساوى (14,553.942) وقيمة المكونات $SSR(X_1)$ ، $SSR(X_2|X_1)$ موجودة فى مخرجات البرنامج الإحصائى SAS فى عمود (Type I SS). $(SSR(X_1) = 912.667)$ تمثل مجموع مربعات الإنحدار عندما يكون السعر فقط فى النموذج وتمثل $(SSR(X_2|X_1) = 13,641.775)$ إنخفاض مجموع مربعات الخطأ الذى يحدث عندما يضاف X_2 إلى النموذج السابق المحتوى على X_1 . للتأكيد على هذه التجزئة نلاحظ أن :

$$SSR(X_1, X_2) = 14,553.942 = 912,667 + 13,641.275)$$

نريد أن نكون قادرين على تحديد المساهمات الإضافية المتزايدة للمتغيرات المفسرة كلما أضيفت بالتتابع لمعادلة الإنحدار. ولأى من المتغيرات التفسيرية، هل نتوقع أن تكون مساهمته أكثر من إضافة متغيرات غير مرتبطة فى النموذج؟ لتنفيذ هذا التقييم نقوم بتكوين الإحصاء F لكل متغير مفسر بالاعتماد على قيمة مجموع مربعاتها من النوع I . ويكون بسط الإحصاء F مجموع المربعات للنوع I مقسوماً على درجة حريتها، والمقام يكون متوسط مربع الخطأ لكل النموذج $MSE(X_1|X_2)$.
لهذا فإن قيمة F الناتجة عن مساهمة X_1 فقط هى :

$$F_1 = \frac{SSR(X_1)/1}{MSE(X_1, X_2)} = \frac{912.667}{172.308} = 5.30$$

وقيمة F للمساهمة الإضافية للمتغير X_2 عندما تضاف إلى النموذج المحتوى على X_1 يكون :

$$F_2 = \frac{SSR(X_2|X_1)/1}{MSE(X_1, X_2)} = \frac{13,641.275}{172.308} = 79.17$$

ونجد أن هذه القيم للاحصاء F وما يقابلها من قيم P موجودة فى الجانب الأيمن لعمود Type I SS. لاحظ أن قيمة P لمساهمة السعر صغيرة لكن لا يمكن إهمالها (0549.) . وهذا يدل على أنه إذا كان السعر هو المتغير المفسر الوحيد فى النموذج فإن مساهمته فى إختلاف Y غير مؤكد. ومن المهم المقارنة بين قيم P وما يقابلها من مجموع مربعات السعر للنوع III ، والفرق قليل ويقدر بمقدار (0076.). وتشير قيمة P السابقة أننا متأكدين تماماً بأن السعر فى وجود درجة الحرارة يساعد فى تفسير الإختلاف للمبيعات اليومية. ما سبب هذا الإختلاف أو الفرق؟ يرجع هذا الفرق إلى العلاقة بين المتغيرات المفسرة. وهذا يعنى أن السعر ودرجة الحرارة مرتبطين بشكل ما. عندما يكون هناك علاقة بين المتغيرات التفسيرية، فإنه يظهر تعارض معتمداً على قيم P للنوع I والنوع III لمجموع المربعات. وعندما يكون التعارض كبير (بمعنى قيم P مختلفة تماماً)، فإن ذلك يدل على وجود ما يعرف بالإرتباط الخطى بين المتغيرات المفسرة. والازدواج الخطى Collinearity بين المتغيرات مشكلة كبيرة فى تطبيقات الإنحدار المتعدد. وسوف نقوم بتعريفه وفحصه فى الجزء (١٠-٧).

والبرنامج الاحصائي Minitab وغيرها من الحزم الإحصائية تزودنا بمعلومات عن إحصاء F الجزئية - بالخصوص مخرجات Minitab - تتضمن ما يكافئ (Type I SS) لكن لا تزودنا بقيم F الجزئية أو قيم P ويمكنك أن تقوم بعمل ذلك بنفسك بإستخدام المعلومات المعطاة. وفى الجزء الأخير من مخرجات Minitab فى جدول (١٠-٢) لمثال الأيس كريم ، نلاحظ أنه تحت العمود SEQ SS تعطي مكونات $SSR(X_1, X_2)$. هذه الأرقام هي نفسها كما فى مخرجات SAS بعد تجنيب فروق التقريب : $(SSR(X_1) = 912.7)$ ، $(SSR(X_2|X_1) = 13,641.3)$ ويجب علينا أن نشير إلى أن ترتيب دخول المتغيرات التفسيرية إلى النموذج يتم تعريفه بواسطة المستخدم لأمر الإنحدار فى البرنامج الإحصائى. فعلى سبيل المثال فى مثال الأيس كريم إذا حددت درجة الحرارة أولاً X_2 ثم تبعها X_1 فإن المكونات $(SSR(X_1, X_2) = 14,553.942)$ تكون :

$$SSR(X_1, X_2) = SSR(X_2) + SSR(X_1|X_2) \quad \textbf{(10.17)}$$

وفي هذا السياق ، فإن $SSR(X_2)$ هو مجموع مربعات الإنحدار عندما يكون X_2 فقط فى النموذج (درجة الحرارة)، وتكون $SSR(X_1|X_2)$ هى مجموع المربعات الإضافية التي أزيلت من SSE عندما تضاف X_1 السعر إلى النموذج. وعند إستبدال ترتيب الدخول إلى النموذج من المتغيرات التفسيرية من المكن التعرف على عدة علاقات لمجموع مربعات الإنحدار كما وضحت فى التعبيرات (10.16)، (10.17).

مثال (١٠-٢)

بالإشارة إلى مثال الأيس كريم ، وبالإعتماد على الإحصاء F الجزئية ، حدد ما إذا كانت درجة الحرارة تساعد فى شرح الإختلاف بين قيم Y عندما تكون درجة الحرارة فقط هي المتغير المفسر فى النموذج .

الحل

جدول(١٠-٢) يظهر جزء من مخرجات البرنامج الإحصائي SAS التي تشمل كلا من السعر ودرجة الحرارة. ونحن نعلم أن مجموع مربعات الإنحدار للنموذج بأكمله $SSR(X_1,X_2)$ تساوي 14,553.942 وأن متوسط مجموع مربعات الخطأ $MSE(X_1 , X_2)$ تساوى 172.308 ومجموع المربعات الإضافية عندما تضاف X_1 إلى النموذج السابق المتضمن فقط X_2 يكون $SSR(X_1| X_2)= 2,367$، (مجموع مربعات النوع الثالث) ونريد تحديد $SSR(X_2)$ ، مجموع المربعات الإضافى الذي يستبعد من SSE عندما تضاف درجة الحرارة X_2 للنموذج ($Y = \beta_0 + \varepsilon$)والتى لا تتضمن متغيرات مفسرة. من التعبير (10.17) نعلم أن :

$$SSR (X_1 , X_2) = SSR(X_2) + SSR(X_1 \mid X_2)$$

بحلها بالنسبة لقيمة $SSR(X_2)$ وإحلال الكميات المعلومة نجد أن :

$$SSR(X_2) = SSR (X_1 , X_2) - SSR (X_1 \mid X_2)$$

$$= 14,553.942 - 2,367.17 = 12,186.772$$

حيث أن متوسط مربعات الخطأ للنموذج بأكمله هى: $[(MSE(X_1 , X_2) = 172.308]$ ، تكون قيمة F كما يلي:

$$F = \frac{12,186.772 / 1}{177.308} = 70.73$$

وقيمة P المقابلة تكون (.0001) مساوية للصفر. بالتالى درجة الحرارة غالباً تساعد فى تفسير وشرح الإختلاف فى Y عندما تكون هى المتغير المفسر الوحيد فى النموذج .

مثال (١٠-٣)

إفترض أن X_3 , X_2 , X_1 ثلاث متغيرات مفسرة في نموذج للتنبؤ بالمتغير التابع Y . معتمداً على عينة مناسبة، إفترض بعض الحزم الإحصائية المستخدمة (مثل SAS) لتحديد معادلة المربعات الصغرى ($\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$) .

(أ) إذا كان ترتيب دخول المتغيرات X_1 ثم X_2 ثم X_3، حدد ملاحظة مناسبة للثلاث مكونات الخاصة بقيمة $SSR (X_1 , X_2 , X_3)$.

(ب) أجب نفس السؤال كما فى (أ) إذا كان ترتيب الدخول X_2 ثم X_1 ثم X_3 .

(ج) أجب نفس السؤال كما فى (أ) إذا كان ترتيب الدخول X_3 ثم X_2 ثم X_1 .

(د) بصرف النظر عن طريقة الدخول، حدد الملاحظة المناسبة لمجموع المربعات التى تكون مدرجة فى العمود (Type III SS) اذا تم إستخدام الأمر PROC GLM إذا كانت الحزمة الإحصائية SAS هى المستخدمة .

الحل

الإجابة الأجزاء الثلاث الأولى هى مجموع المربعات الهامشية المرتبطة بترتيب دخول المتغيرات وهى:

(أ) $SSR = (X_1 , X_2 , X_3) = SSR(X_1) + SSR(X_2| X_1) + SSR (X_3| X_1, X_2)$

حيث $SSR\ (X_1)$ تمثل الانخفاض فى مجموع مربعات الخطأ عندما X_1 تكون هي أول متغير يدخل النموذج .

$SSR\ (X_2|\ X_1)$ وتمثل الإنخفاض الاضافي فى مجموع مربعات الخطأ SSE عندما تضاف X_2 للنموذج المحتوى فعلاً على X_1 .

$SSR\ (X_3|\ X_1, X_2)$ وتمثل الإنخفاض الاضافي فى مجموع مربعات الخطأ عندما تضاف X_3 إلى النموذج المحتوى فعلاً على X_2 , X_1 .

(ب) $SSR\ (X_1, X_2\ , X_3) = SSR(X_2) + SSR(X_1|\ X_2) + SSR\ (X_3|\ X_2, X_1)$

(ج) $SSR = (X_1, X_2\ , X_3) = SSR(X_3) + SSR(X_2|\ X_3) + SSR\ (X_1|\ X_3, X_2)$

مكونات الأجزاء (ب) ، (ج) لها نفس المعنى كما في الجزء (أ).

(د) المكونات التى يجب إدراجها فى عمود (Type III SS) هى التى تكون مقياس للأثر المضاف لكل متغير مفسر إذا أدخل فى النموذج ويكون ذلك بعد أن يشتمل النموذج على كل المتغيرات التفسيرية الأخرى . وتكون المكونات :

$$SSR\ (X_1|\ X_2\ , X_3)\ , SSR(X_2|\ X_1, X_3) \text{ and } SSR\ (X_3|\ X_1, X_2)$$

مثال (١٠-٤)

تم التعاقد مع شركة تسويق لتقدير مقدار إنفاق الأسرة على الغذاء بالإعتماد على دخل وحجم الأسرة، وتشمل البيانات التالية الإنفاق الشهرى على الطعام Y (بآلاف الدولارات) فى مقابل الدخل الشهرى X_1 (بآلاف الدولارات) حجم العائلة X_2 وذلك لعدد 15 عائلة مختارة عشوائياً من منطقة جغرافية معينة :

Y	X_1	X_2	Y	X_1	X_2
.43	2.1	3	.29	1	5
31	1.1	4	1.29	8.9	3
.32	.9	5	.35	2.4	2
.46	1.6	4	.35	1.2	4
1.25	6.2	4	.78	4.7	3
.44	2.3	3	.43	3.5	2
.52	1.8	6	47.	2.9	3
			.38	1.4	4

حدد ما إذا كان حجم ودخل العائلة يساهم فى شرح عمليات الإختلاف بين أرقام إنفاق الأسرة فى العينة الموضحة فى الجدول .

الحل :

لنموذج الإنحدار ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon$) تم توضيح نتائج البرنامج SAS فى جدول (١٠-٣) ومنها يمكن إستنتاج ما يلى :

١- معادلة المربعات الصغرى :

$$(\ \hat{Y}= -.1605 + .1487X_1 + .0769X_2)$$

جدول (١٠-٣)

مخرجات SAS لمثال (١٠-٤)

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: FOOD

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	1.35954215	0.67977108	113.14	0.0001
Error	12	0.07209785	0.00600815		
Corrected Total	14	1.43164000			
	R-Square	C.V.	Root MSE		FOOD Mean
	0.949640	14.40749	0.07751228		0.53800000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
INCOME	1	1.27162442	1.27162442	211.65	0.0001
SIZE	1	0.08791773	0.08791773	14.63	0.0024

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
INCOME	1	1.33664408	1.33664408	222.47	0.0001
SIZE	1	0.08791773	0.08791773	14.63	0.0024

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	-.1604580427	-1.78	0.1012	0.09038910
INCOME	0.1487270228	14.92	0.0001	0.00997132
SIZE	0.0769151943	3.83	0.0024	0.02010687

نلاحظ أن علامات التقديرات $(b_1 = .1487)$, $(b_2 = .0769)$ موجبة، وينبغي أن تكون كذلك، العائلة الأكبر دخلاً هي الأكثر إنفاقاً فى إستهلاك الطعام وذلك لحجم معين للعائلة، (العائلة الأكبر حجماً هى الأكثر إنفاقاً فى إستهلاك الطعام وذلك حسب دخل معين) .

٢- لتقييم النموذج ككل فإن الفرض العدمى $(H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0)$ يتعارض مع ما يحدث للعينة. ويتضح ذلك بواسطة تحليل التباين (P-value = .0001) . ومعنى هذا أن دخل العائلة أو حجمها أو كلاهما يساهم فى شرح الإختلاف فى الإنفاق على الطعام .

٣- لتقييم المساهمات الفردية للمتغيرات المفسرة فإن الفرض العدمى $(H_0: \beta_1 = 0)$ من السهل أن يتم تعارضه أي رفضه بالاعتماد على T أو الإحصاء F الهامشية وتكون (P-value = .0001) . لهذا فإن مساهمة دخل الأسرة مع وجود حجم الأسرة مفيداً بالفعل. من ناحية أخرى، فإن فرض $(H_0: \beta_2 = 0)$ أيضاً يتعارض حيث أن (P-value = .0024) . لهذا فإن حجم العائلة X_2 يظهر ليساهم بصفة متزايدة للتنبؤ بقيمة Y أكثر من المساهمة الناشئة بواسطة دخل الأسرة X_1 .

(١٠-٤-٤) إستخدام نموذج المربعات الصغرى فى التقدير والتنبؤ :

Using the least Squares Model for Estimation and Prediction

كما فى حالة الإنحدار الخطى البسيط فى الفصل التاسع، طالما أصبح لدينا رؤية واضحة عن العلاقة بين المتغير التابع ومجموعة المتغيرات المفسرة، فإننا نريد إستخدام معادلة المربعات الصغرى للتقدير والتنبؤ. وعلى وجه الخصوص نريد تقدير متوسط قيمة Y أو التنبؤ بالقيم الفردية للمتغير Y ، بإستخدام قيم مجموعة المتغيرات المفسرة فى معادلة المربعات الصغرى .

وللتوضيح ، سوف نعود لمثال (١٠-٤). إفترض أن شركة تسويق تريد تقدير المتوسط الشهرى المنفق على الطعام بواسطة ($X_1 = 1\{\$1000\}$) ، ($X_2 = 3$) أفراد العائلة، وبالتعويض فى معادلة المربعات الصغرى:

($\hat{Y} = -.1605 + .1487X_1 + 0.769X_2$) تحصل على ($\hat{Y} = -.1605 + 1487(1) + .0769(3) = .219$)

لهذا فإن متوسط الإنفاق المقدر يكون 219$. ويكون الإنفاق المتنبأ به للعائلة الواحدة عند تكون ($X_1 = 1$) ، ($X_2 = 3$) أيضاً يساوى 219$. لكن في ظل مجموعة من قيم X ، فإن دقة التقدير لمتوسط قيم Y تكون أفضل من تقدير قيم Y الفردية المتنبأ بها. نعلم أن الدقة محددة بواسطة الخطأ المعيارى المرتبط بالتقدير أو التنبؤ. ومما يؤسف له فإن التعبيرات الرياضية للأخطاء المعيارية تشمل جبر المصفوفات وهي ليست موضوع هذا الكتاب. ومع ذلك، فإن كل الحزم الإحصائية ومنها SAS , Minitab مزودة بفترات ثقة لمتوسط قيم Y . وفترات تنبؤ بمفردات قيم Y المعطاة لمجموعة المتغيرات المفسرة فى معادلة المربعات الصغرى . وفيما يلى فترة ثقة وفترة تنبؤ (95%) للمثال (١٠-٤) بمعلومية قيم X_1 , X_2 ولقد تم تنفيذ الحسابات بإستخدام الحاسب الآلى :

X_1	X_2	$\hat{Y}$	Confidence Interval	Prediction Interval
1.0	3	.2190	(.1473,.2908)	(.0355,.4026)
3.0	3	.5165	(.4647,5682)	(.3398,.6931)
6.0	3	.9626	(.8848,1.0405)	(.7767,1.1486)
1.0	4	.2929	(.2392,.3526)	(.1177,.4741)
3.0	4	.5934	(.5467,.6401)	(.4181,.7687)
6.0	4	1.0396	(.9517,1.1274)	(.8492,1.2300)

دعنا نفسر المعنى لأحد هذه الأسر . للأسرة المكونة من 4 أفراد بدخل شهرى , 3000$ قدرنا متوسط الإنفاق على الطعام فى الشهر بمقدار (593.4$) وفترة ثقة 95% (6401. , 5467.) تعنى أن متوسط الإنفاق الشهرى يمكن أن يكون بحد أدنى 546.7$ وحد أعلى 640.1$. ولنفس الأسرة نتنبأ باستهلاك شهرى للطعام (593.40$) حيث أن { $\hat{Y} = (.5934)$ } . لكن فترة التنبؤ (7687. , 4181.) 95% تعنى أن الإنفاق الفعلى يكون الحد الأدنى له 418.1$ والحد الأعلى 5768.70$.

تمارين

(١٠-١٢) عند توفيق النموذج ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon$) لعينة مكونة من 15 مشاهدة. حددت الكميات التالية :

$SST = 200$, $SSR(X_1, X_2) = 140$, $SSR(X_1) = 90$ and $SSR(X_1 | X_2) = 80$

أ - هل اكتشفت علاقة بين قيم Y , X_1 , X_2 ؟

(ملاحظة : اختبر الفرض العدمى $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$) .

ب- هل مساهمة X_1 يساعد فى شرح الإختلاف فى قيم Y عندما يكون X_1 المتغير المفسر الوحيد؟

ج- هل مساهمة X_2 الزائدة مفيدة فى شرح الإختلاف فى قيم Y فى وجود X_2 ؟

د - هل مساهمة X_2 الزائدة مفيدة فى وجود X_1 ؟

هـ - هل مساهمة X_2 مفيدة عندما يكون X_2 هو المتغير المفسر الوحيد فى النموذج ؟

و - بالإعتماد على إجابتك فى الأجزاء السابقة للتمرين ، ما استنتاجك حول المتغيرات المفسرة X_1 , X_2 ؟

(١٠-١٣) بالإشارة إلى تمرين (١٠-١٢) حدد قيمة R_a^2 للنموذج المحتوى على X_1 , X_2 واشرح معنى ذلك ؟

(١٠-١٤) عند توفيق النموذج $(Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon)$ لعينة (n= 23) مشاهدة ، حصلنا على الكميات التالية :

$$SST = 500 , SSE (X_1, X_2) = 200 , SSR (X_2) = 200 \text{ and } SSR(X_2| X_1) =275$$

أجب عن جميع الأجزاء الواردة فى تمرين (١٠-١٢) ؟

(١٠-١٥) عند توفيق النموذج $(Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon)$ لعينة من 14 مشاهدة. حددت الكميات التالية :

$$SST = 800 , SSE (X_1, X_2, X_3) = 100 , SSR (X_1) = 200 \text{ and } SSR(X_2| X_1) = 470$$

أ - هل اكتشفت العلاقة بين قيم Y , X_1 , X_2 , X_3 ؟

ب- ما قيمة R^2 المعدلة للمعادلة المتضمنة كل المتغيرات المفسرة الثلاث؟ هل تشير هذه القيمة لجودة النموذج فى التنبؤ ؟ اشرح .

ج - هل مساهمة X_1 مفيد فى شرح الإختلاف فى قيم Y عندما يكون هو المتغير المفسر الوحيد فى النموذج ؟

د - هل المساهمة الإضافية لـ X_2 مفيد فى وجود X_1 ؟

هـ - هل المساهمة الإضافية لـ X_3 مفيد فى وجود X_1 , X_2 ؟

و - ما قيمة T من المساهمة الأضافية للمتغير X_3 فى وجود X_1 , X_2 ؟

(١٠-١٦) بالإشارة إلى تمرين (١٠-١٥) افترض أن $SSR (X_2) = 350$

أ - هل مساهمة X_2 مفيد عندما يكون X_2 المتغير المفسر الوحيد ؟

ب - هل مساهمة X_1 الإضافية مفيد فى وجود X_2 ؟

(١٠-١٧) قامت جامعة ما بدراسة لتحديد ما إذا كان هناك علاقة بين بداية المرتبات Y بالألف دولار ومتوسط نقط التخرج X_1 (أي تقدير التخرج بمتوسط النقاط) وعمر الخريجين X_2 لطلاب فى كلية التجارة وحصلت على البيانات التالية :

بداية المرتب	متوسط النقط	العمر
25.5	2.95	22
27	3.2	23
28.1	3.4	23
29.4	3.6	23
28.2	3.2	27
22	3.85	22
25	3.1	25
25.8	3.85	28
22.7	3.05	23
21.4	2.7	22
22.5	2.75	28
24.2	3.1	22
26	3.15	26
24.2	2.95	23
23.8	2.75	26

حدد ما إذا كان متوسط النقط والعمر يساهموا على التوالى فى شرح الإختلاف فى بداية المرتب للعينة.

(١٠-١٨) افترض معادلة المربعات الصغرى $(\hat{Y} = 50 + .04X_1 + 25X_2 + 8X_3)$ المثلة لعينة مكونة من 20 مشاهدة وتمثل Y سعر مكيف هواء كدالة فى ثلاثة متغيرات (X_1) ، (X_2)، (X_3)، افترض أيضاً أن $(SE(b_1) = 005)$, $(SST = 1,200)$, $(SSE (X_1 , X_2 , X_3) = 200)$, $(SE (b_2) = 2.5)$, $(SE (b_3) = 6.5)$

أ - هل إشارات معاملات X_1 , X_2 , X_3 صحيحة ؟ اشرح .

ب- هل استطعت تحديد العلاقة بين السعر و X_1، X_2 ، X_3 ؟ دعم إجابتك .

ج - حدد فترة ثقة 95% للمعالم $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3$ ، معتمداً على هذه الفترات، ماذا نستنتج عن المساهمة الإضافية لكل متغير مفسر فى وجود المتغيرات الأخرى؟ اشرح .

(١٠-١٩) بفرض أن معادلة المربعات الصغرى $(\hat{Y} = 2.8 + 6.5X_1 - 3.2X_2)$ قد تم تحديدها من 15 قراءة سنوية للمناطق الخاصة لتخزين الكمبيوتر . حيث Y تمثل عدد الحاسبات الشخصية المباعة فى المنطقة كدالة في كل من تكلفة ترويج كل منطقة X_1 وعدد الحاسبات المخزنة فى كل منطقة X_2. افترض أيضاً أن :

$SE(b_1) = .62$, $SE(b_2) = .4$, $SSR = (X_1, X_2) = 750$, $SST= 800$,

أ - هل إشارات معاملات X_1 , X_2 صحيحة ؟ اشرح .

ب - هل اكتشفت العلاقة بين المبيعات و X_1 ، X_2 ؟ وضح إجابتك .

ج - حدد فترات ثقة 95% للمعالم β_1 , β_2 . معتمداً على هذه الفترات ، ما استنتاجك حول المساهمة الإضافية لكل متغير مفسر فى وجود المتغير الآخر ؟ اشرح .

(١٠-٥) ادخال المعلومات الوصفية فى الإنحدار الخطى المتعدد : المتغيرات الوهمية

Incorporating Qualitative Information in Multiple Linear Regression:Dummy Variables

في هذا الفصل تم دراسة وتحليل نماذج الإنحدار الخطى المتعدد. والآن نستطيع تناول بعض الطرق كامتداد مفيد لنماذج الإنحدار. ففى هذا الجزء، نعرض طريقة للاستفادة من المعلومات الوصفية فى نموذج الإنحدار .

فى جميع المشاكل التى تم مناقشتها حتى الآن ، كانت المتغيرات المفسرة كالسعر ودرجة الحرارة والدخل وحجم العائلة متغيرات كمية تأخذ قيماً. وعادة توجد بعض المتغيرات الوصفية كالحالة الإجتماعية والجنس وكلها عوامل هامة نحتاج إلى إدخالها فى نموذج الإنحدار ، ولكن المتغيرات الوصفية ليس لها مقياس معروف جيداً. على سبيل المثال الحالة الإجتماعية تعزى إلى شخص متزوج أو غير ذلك. أيضاً التخصيص الدقيق لطالب التجارة، أما محاسبة أو إدارة الأعمال أو مالية. . الخ. كيف إذن تظهر المعلومات الوصفية فى معادلة الإنحدار؟ تستخدم المتغيرات الوهمية كمتغير إصطناعى Dummy Variable والذى يخصص دائماً قيم للواحد أو الصفر. القيمة (1) تشير إلى وجود الصفة، (0) يشير إلى غياب الصفة .

وللتوضيح ، سوف نعود إلى مثال الأيس كريم ، والغرض من تحليل الإنحدار هو تحسين وزيادة البصيرة خلال العمليات . بالتالى الوصول إلى أفضل القرارات التى يمكن إتخاذها. لهذا نتسائل ما هي العوامل الأخرى غير السعر ودرجة الحرارة التي يجب حسابها والتي تؤثر على الإختلاف فى مبيعات الأيس كريم اليومية. أحد الاحتمالات أن يكون الطلب عليها أكبر فى الأجازات عنها فى أيام الأسبوع الأخرى . إذا كان هذا صحيحاً فإننا نختار تخفيض السعر فى أيام الأسبوع ، ونرفع السعر في عطلات نهاية الاسبوع . نوع اليوم (عطلة / يوم عادى) يعتبر معلومة وصفية يمكن دمجها فى نموذج الإنحدار بإنشاء متغير وهمى . ويمكن تعريف المتغير X_3 كما يلى :

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{أيام العطلات} \\ 0 & \text{أيام العمل} \end{cases}$$

وبيانات العينة لمثال الأيس كريم مع توضيح نوع اليوم كما يلى :

اليوم Day	Y(sales) المبيعات	X_1 (Price) السعر	X_2(temperature) درجة الحرارة	X_3 (type of day (نوع اليوم)
1	374	35	74	1
2	386	35	82	0
3	472	35	94	1
4	429	50	93	0
5	391	50	82	1
6	475	50	96	1
7	428	50	91	1
8	412	65	93	0
9	405	65	88	1
10	341	65	78	0

ويكون نموذج الإنحدار : $(Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon)$

لاحظ أنه إذا كان نوع اليوم غير هام ، إذن $(\beta_3 = 0)$ ويكون الفرض العدمى الإضافى المراد اختباره هو : $(H_0: \beta_3=0)$ فى وجود السعر ودرجة الحرارة . من مخرجات البرنامج الإحصائى SAS يظهر النموذج فى جدول (١٠-٤). والإستنتاجات التالية تظهر من المخرجات كما يلى :

جدول (١٠-٤)

مخرجات SAS لمثال الأيس كريم شاملاً نوع اليوم كمتغير وهمي

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: SALES

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	15456.98030414	5152.32676805	101.99	0.0001
Error	6	303.11969586	50.51994931		
Corrected Total	9	15760.10000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	SALES Mean
0.980767	1.728115	7.10773869	411.30000000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRICE	1	912.66666667	912.66666667	18.07	0.0054
TEMP	1	13641.27520776	13641.27520776	270.02	0.0001
DAY	1	903.03842972	903.03842972	17.87	0.0055

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRICE	1	1470.50695790	1470.50695790	29.11	0.0017
TEMP	1	12660.27582653	12660.27582653	250.60	0.0001
DAY	1	903.03842972	903.03842972	17.87	0.0055

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	15.30937021	0.55	0.6030	27.90393324
PRICE	-1.10118194	-5.40	0.0017	0.20410657
TEMP	5.03906542	15.83	0.0001	0.31831702
DAY	20.24521411	4.23	0.0055	4.78851344

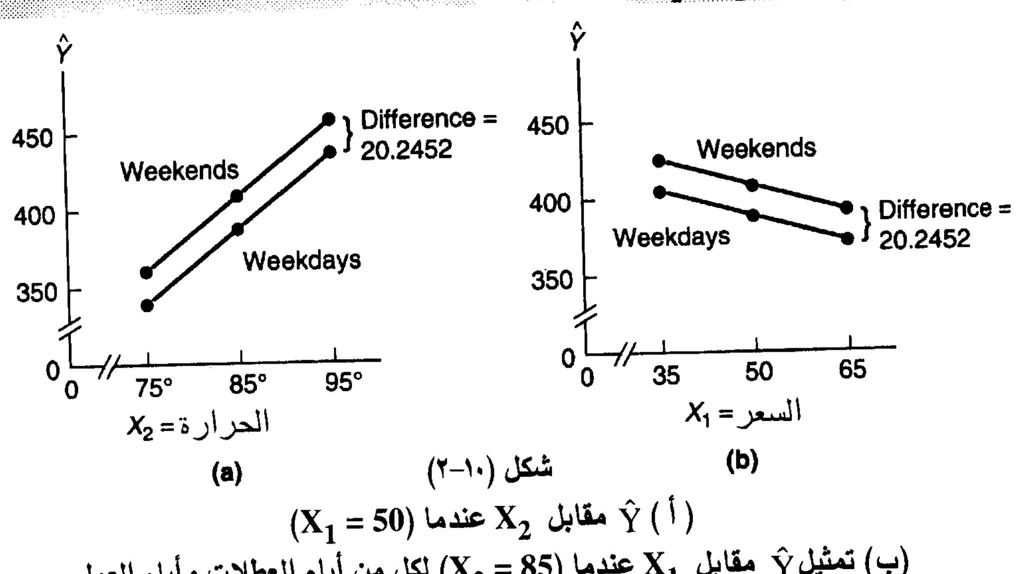
١- معادلة المربعات الصغرى هى :

$$\{\ \hat{Y}= 15.3094 - 1.1012X_1 + 5.0391X_2 + 20.2452X_3 \}$$

ويمثل تقدير المربعات الصغرى $b_3 = 20.2452$ الفرق بين متوسط المبيعات اليومى عندما $(X_3=1)$ (يوم عطلة) ومتوسط المبيعات عندما $(X_3 = 0)$ (يوم عمل)، إذا كان السعر ودرجة الحرارة ثابتين . ويمكن أن ترى ذلك بواسطة التعبير فى معادلة المربعات الصغرى فى كلا الحالتين كما يلى :

$$\text{If } X_3 = 1 : \ \hat{Y}= 15.3094 - 1.1012X_1 + 5.0391X_2 + 20.2452$$
$$\text{If } X_3 = 0 : \ \hat{Y}= 15.3094 - 1.1012X_1 + 5.0391X_2 + 0$$

لاحظ أن المعادلتين متطابقتان فيما عدا أن الثابت $(b_3 = 20.2452)$ يضاف فى حالة تقدير المبيعات فى أيام العطلات . وطبيعة كلا المعادلتين موضحتان فى شكل (١٠-٢) لقيمة $\hat{Y}$ فى مقابل X_2 على فرض أن $(X_1 = 50)$ وكذلك $\hat{Y}$ مقابل X_1 على فرض أن $(X_2 = 85)$.



شكل (١٠-٢)

(أ) $\hat{Y}$ مقابل X_2 عندما $(X_1 = 50)$

(ب) تمثيل $\hat{Y}$ مقابل X_1 عندما $(X_2 = 85)$ لكل من أيام العطلات وأيام العمل

٢- يتعارض الفرض العدمى $(H_0: \beta_3=0)$ بقوة مع بيانات العينة، حيث أن قيمة P والتي تعتمد أيضاً على قيمة الاحصاء T أو F الجزئية صغير جداً (.0055) . وهذا يعنى أن معرفة نوع اليوم يساعد فى التنبؤ بالمبيعات إذا كان السعر ودرجة الحرارة معروفين ويقدر متوسط مبيعات في الإجازات بمقدار 20.2452 فى اليوم أكثر من مبيعات يوم العمل العادي.

٣-نموذج المربعات الصغرى الذي يتضمن نوع اليوم يعتبر أفضل فى التقدير والتنبؤ عن النموذج الذي لا يتضمن نوع اليوم. وهذا يعتبر صحيحاً لأن تباين البواقى S_e^2 يكون أصغر في هذه الحالة. (50.52 فى مقابل 172.308) . بالإضافة إلى ذلك، فإن الأخطاء المعيارية لتقديرات المربعات الصغرى لمعاملات السعر ودرجة الحرارة تكون أصغر من قبل. حيث أصبحت قيمة T الآن: (-5.4)، (15.836) الآن فى مقابل قيمة T (-3.7)، (8.96) بالنسبة لكل من للسعر ودرجة الحرارة.

تخصيص قيم الصفر (0) والواحد الصحيح (1) للتعبير عن المتغيرات الوهمية :

لادخال المتغير الوصفى «نوع اليوم» فى مثال الأيس كريم إلى معادلة الانحدار، إفترض أننا خصصنا القيم 1 , 0 للمتغير X_3 بطريقة عكسية كما يلى :

$$X_3 = \begin{cases} 0 & \text{أيام العطلات} \\ 1 & \text{أيام العمل} \end{cases}$$

هل يصنع ذلك إختلافاً ؟ الإجابة لا . فمعاملات الإنحدار ستكون هي نفسها ما عدا b_3 ستتغير إشاراتها فقط من الموجب إلى السالب. والتفسير أن متوسط المبيعات فى أيام العمل يكون (20.2452) أقل من أيام العطلات. بالطبع هذا هو نفس التفسير السابق. لهذا فتخصيص قيم 1 , 0 للمتغير الوهمى يكون إختيارياً. ولكن نحتاج فقط أن نتذكر أن معامل المتغير الوهمى فى معادلة الإنحدار دائماً يمثل الفرق بين حالة (1) ، حالة (0) .

ماذا إذا كان هناك أكثر من حالتين للمتغير الوصفى ؟

ماذا يحدث لو أن المتغير الوصفي له أكثر من حالتين؟ عامل آخر يؤثر على مبيعات الأيس كريم هو درجة صفاء السماء أي هل الجو مشمس أم به غيوم أو ممطر. لهذا يجب أن نأخذ فى الإعتبار

متغير وصفى آخر (حالة السماء) فى مثال الأيس كريم بثلاث حالات ممكنة وهي مشمس، مغيم، ممطر. الثلاث حالات للسماء يمكن تضمينها في النموذج بتعريف متغيرين وهميين على النحو التالي:

$$X_4 = \begin{cases} 1 & \text{جو مشمس} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$X_5 = \begin{cases} 1 & \text{به غيوم} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

هذان المتغيران الوهميان يمكن أن يحددا الثلاث حالات للسماء كما يلي :

	X_4	X_5
يوم مشمس	1	0
يوم به غيوم	0	1
يوم ممطر	0	0

وبصفة عامة ، فإن عدد المتغيرات الوهمية المطلوبة تكون أقل من عدد الحالات الممكنة للمتغير الوصفى بواحد . لاحظ أن واحد من هذه الحالات يكون الحالة الأساسية وهى الحالة التى تشير إلى الحالة التى تكون فيها كل المتغيرات الوهمية تساوى صفر . ولهذا فإن الحالة الأساسية فى حالة الأيس كريم هى المطرة .

إذا تم إدخال المتغير الوصفى (حالة السماء) إلى معادلة الانحدار فى مثال الأيس كريم، فإننا يمكن أن نفسر معاملات المربعات الصغرى للمتغيرات X_5 , X_4 بواسطة فحص معادلة المربعات الصغرى لكل حالة كما يلى :

إذا كان $(X_4 = 1)$, $(X_5 = 0)$ (مشمس) : $\hat{Y} = b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+b_4$

إذا كان $(X_4 = 0)$, $(X_5 = 1)$ (معتم) : $\hat{Y} = b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+b_5$

إذا كان $(X_4 = 0)$, $(X_5 = 0)$ (ممطر) : $\hat{Y} = b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3$

وكنتيجة لذلك فان التقدير (b_4) يمثل الفرق فى متوسط المبيعات بين اليوم المشمس $(X_4 = 1)$ والحالة الأساسية وهى اليوم المطر. وتقدر (b_5) بأنها الفرق فى متوسط المبيعات بين اليوم الذى به غيوم $(X_5 = 1)$ واليوم المطر. فى النهاية التقدير $(b_4 - b_5)$ يمثل الفرق فى متوسط المبيعات بين اليوم المشمس واليوم الذى به غيوم . وعلى العموم، فإن معامل أي متغير وهمى يقدر الفرق بين متوسط المتغير التابع (Y) عندما يساوى المتغير الوهمى (1) والمتوسط التابع للحالة الأساسية .

مثال (١٠-٥)

يرغب أحد خبراء إدارة الأفراد في تحديد العوامل التى تفسر المرتبات الأولية التى يحصل عليها خريجى المدارس التجارية، ويعتقد أن تقدير الخريج (GPA) وكذلك نوع التخصص أو كلاهما يؤثران على ذلك. وفيما يلى عينة مكونة من 15 خريج من المدارس التجارية حيث يمثل (Y) بداية مربوط المرتب (بآلاف الدولارات) ، (X_1) تعبر عن التقدير الخاص بالخريج (GPA) .

Y	X_1	Major التخصص	Y	X_1	Major التخصص
21.5	2.95	Management إدارة	24.7	3.05	Accounting محاسبة
23.0	3.20	Management إدارة	23.4	2.70	Accounting محاسبة
24.1	3.40	Management إدارة	20.5	2.75	Finance تمويل
25.4	3.60	Management إدارة	22.2	3.10	Finance تمويل
24.2	3.20	Management إدارة	24.0	3.15	Finance تمويل
24.0	2.85	Accounting محاسبة	22.2	2.95	Finance تمويل
27.0	3.10	Accounting محاسبة	21.8	2.75	Finance تمويل
27.8	2.85	Accounting محاسبة			

والمطلوب : إيجاد النموذج الملائم لهذه البيانات ، ثم تقييمه وتفسيره .

الحل :

حيث أن المتغير الوصفى (التخصص) يحتوى على ثلاث حالات، فإننا نحتاج إلى تعريف متغيرين وهميين كما يلى:

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{إدارة أعمال} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{محاسبة} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

لهذا فإن المتغيرين الوهميين X_3, X_2 يوضحا الثلاث تخصصات، حيث يكون تخصص التمويل هو الحالة الأساسية :

X_3	X_2	التخصص
0	1	إدارة أعمال
1	0	محاسبة
0	0	تمويل

تم توضيح مخرجات البرنامج الإحصائى Minitab فى جدول (١٠-٥) للنموذج ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon$) من هذه المخرجات يمكن إستنتاج الآتى :

جدول (١٠-٥)

مخرجات ميني تاب لمثال(١٠-٥)

```
The regression equation is
salary = 6.00 + 5.49 gpa - 0.312 dummya + 3.40 dummyb

Predictor        Coef       Stdev     t-ratio        p
constant        5.997       4.942        1.21    0.250
gpa             5.491       1.672        3.28    0.007
dummya        -0.3120      0.9212       -0.34    0.741
dummyb         3.4047      0.7395        4.60    0.000

s = 1.167    R-sq = 73.2%    R-sq(adj) = 65.9%
```

تابع : جدول (١٠-٥) مخرجات ميني تاب لمثال(١٠-٥)

```
Analysis of Variance

SOURCE          DF        SS         MS         F         p
Regression       3    40.974     13.658     10.04     0.002
Error           11    14.970      1.361
Total           14    55.944

SOURCE          DF    SEQ SS
gpa              1     5.934
dummya           1     6.193
dummyb           1    28.847
```

١-معادلة المربعات الصغرى :

$$Y = 5.997 + 5.491X_1 - .312X_2 + 3.405X_3$$

والتقدير (b_2 = -.312) يعنى أنه فى المتوسط، يحصل تخصص إدارة الأعمال على أقل من المتخصص في التمويل . بالمثل تقدير (b_3 = 3.405) يعنى أنه فى المتوسط فإن المحاسب يحصل على ($3,405) أكثر من المتخصص فى التمويل .

٢-R^2 المعدلة (65.9%) وإختبار الفرض العدمي (H_o: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 0$) وكانت قيمة P للاحصاء (F = 10.04) يساوى (.002) لهذا فإن GPA (و/أو) كل من المتغيرين الوهميين يظهر لهما على الأقل نفس الأثر على بداية المرتب.

٣-الفرض (H_o: $\beta_1 = 0$) ، (H_o: $\beta_3 = 0$) للمساهمة الفردية التي تعتمد على الأحصاء T تتعارضان مع بيانات العينة حيث أن قيمة P تساوى .007 , .000 على التوالى. وهذا يعنى أن التمييز بين المحاسب ($X_3 = 1$) والتمويل ($X_3 = 0$) مفيداً . لكن الفرض (H_o: $\beta_2 = 0$) لا يتعارض مع بيانات العينة حيث أن قيمة P تساوى .741. ويظهر بالتالى أن التمييز بين إدارة الأعمال ($X_2 = 1$)، والتخصص التمويل ($X_2 = 0$) لا يكون مفيداً. بالتالى يمكن إسقاط X_2 من النموذج ونعاود توفيقه فقط مع المتغير X_1 (GPA) والمتغير الوهمى X_3، حيث ($X_3 = 1$) تشير إلى تخصص المحاسبة، ($X_3 = 0$) تشير إلى إدارة الأعمال أو التمويل.

ويوضح جدول (١٠-٦) مخرجات النموذج ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_3X_3 + \varepsilon$) بواسطة البرنامج الإحصائي Minitab . من هذه المخرجات نلاحظ أن المقدرة التنبؤية لمعادلة المربعات الصغرى ($\hat{Y} = 6.894 + 5.152X_1 + 3.495X_3$) أفضل من قبل. وتزداد قيمة R المعدلة من 65.9% إلى 68.5% كما أن قيمة تباين البواقى S_e^2 تقل من 1.361 إلى 1.206 ، الأخطاء المعيارية لقيم b_1 , b_2 تكون أصغر من ذى قبل .

جدول (١٠-٦)

مخرجات ميني تاب المحسنة لمثال (١٠-٥)

```
The regression equation is
salary = 6.89 + 5.15 gpa + 3.49 dummyc

Predictor        Coef       Stdev      t-ratio        p
Constant        6.894       4.016         1.72    0.112
gpa             5.152       1.288         4.00    0.002
dummyc         3.4946      0.6643         5.26    0.000

s = 1.123    R-sq = 73.0%    R-sq(adj) = 68.5%
```

تابع : جدول (١٠-٦)

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regression	2	40.818	20.409	16.19	0.000
Error	12	15.126	1.260		
Total	14	55.944			

SOURCE	DF	SEQ SS
gpa	1	5.934
dummyc	1	34.884

تمارين

(١٠-٢٠) يريد مثمن عقارات أن ينشأ نموذج إنحدار ويريد المثمن أن يتضمن النموذج المتغيرات المفسرة الآتية : الأماكن المراد تدفئتها (بالقدم المربع) عدد الحمامات، الشكل المعمارى (معاصر - على طراز المستعمرات البريطانية - تقليدى) وما إذا كان فى المنزل مكان تدفئة أم لا ، المتغير التابع يكون القيمة المثمنة. أنشئ النموذج الذى يحاول المثمن العقارى أن يوفقه لتمثيل عينة من البيانات .

(١٠-٢١) شركة (R. L. Williams) تؤجر الحاسبات الصغيرة وأيضاً تحافظ على خدمتها خلال مدة التعاقد. يريد مدير الخدمات تكوين نموذج للعلاقة بين سنوات الخدمة الممثلة فى الخبرة ومتوسط الوقت (فى الساعة) الذى تستغرقه للإصلاح . تتطلب بعض الحاسبات الصغيرة التقليدية وقت أكثر من غيرها. تستخدم الشركة ثلاث نماذج C , B , A معتمدة على عينة حددت معادلة المربعات الصغرى التالية لمتوسط وقت الإصلاح .

$$\hat{Y} = 20 - .2X_1 + 1.1X_2 - .5X_3$$

حيث X_1 عدد سنوات الخبرة فى الخدمة، X_3 , X_2 متغيرات وهمية معرفة كالتالى :

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{A متوسط وقت التصليح للنموذج} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{B متوسط وقت التصليح للنموذج} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

أ - فسر قيم المعاملات $(b_3 = -.05)$, $(b_2 = 1.1)$

ب- عبر عن معادلة المربعات الصغرى لثلاث معادلات كل واحدة تمثل العلاقة بين متوسط وقت التصليح لكل نموذج من نماذج الحاسب الصغير. فسر الإختلاف بين المعادلات الثلاثة .

ج - فسر معامل المربعات الصغرى $(b_1 = -.02)$.

(١٠-٢٢) اعتبر معادلة المربعات الصغرى $(\hat{Y} = 60 + 2X_1 - 5X_2 + 22X_3 - 3.5X_4)$ حيث: X_4 عبارة عن متغير كمى أما X_3 , X_2 , X_1 فهى عبارة عن متغيرات وهمية تمثل متغير وصفي بالشروط التالية:

$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{(1) إذا تحقق الشرط} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$ $\quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{(2) إذا تحقق الشرط} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$ $\quad X_3 = \begin{cases} 1 & \text{(3) إذا تحقق الشرط} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$

فإذا كانت ($X_4=10$) إستخدام النموذج في التنبؤ بالمتغير Y عندما :

أ - المتغير الوصفى تحقق الشرط 1 .

ب- المتغير الوصفى تحقق الشرط 2 .

ج - المتغير الوصفى تحقق الشرط 3 .

د - المتغير الوصفى تحقق الشرط 4 .

هـ - هل الإختلافات التى حصلت عليها فى الأجزاء من (أ) حتى (د) ترجع فقط إلى المعلومات التي نحصل عليها من معاملات المربعات الصغرى ($b_1 = 2$)، ($b_2 = -5$)، ($b_3 = 22$) دون التعويض في معادلة المربعات الصغري؟ إشرح ذلك .

(١٠-٢٣) يرغب مدير احدى شركات التأمين ، في تحديد العلاقة بين Y (عدد أيام العمل المفقودة بواطة ضحايا الحوادث)، (X_1 = العمر) ، (X_2 = النوع). فإذا تم إختيار 25 تقرير عن خسائر ، وتم استخدام نموذج الانحدار التالى:

$$\hat{Y} = 21.4 - .075X_1 - 1.5X_2$$

ولهذه المعادلة وجد أن ($SE(b_2) = .99$, $SE(b_1) = .11$, $SSE = 3.81$, $SST = 4.75$)

أ - هل اكتشفت العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغيرات المفسرة X_2 , X_1 ؟ وضح إجابتك .

ب- هل المساهمة الهامشية للعمر مفيدة فى وجود النوع ؟

ج - هل المساهمة الهامشية للنوع مفيدة فى وجود العمر ؟

د - ما استنتاجاتك للأجزاء أ ، ب ، حول إمكانية جعل قسط التأمين يعتمد على الدخل بدلا من الاعتماد على العمر ونوع المؤمن عليه عندما يفقد وقت العمل بسبب الحادث.

(١٠-٢٤) مدير مكتب نظم معلومات يهتم بكفاءة الحاسب الآلى أثناء وقت العمل اليومى أو ضغط العمل من (10 صباحاً إلى 3 مساءً) فى مقابل الأوقات خفيفة العمل(من 8-10 صباحاً ، 3-5 مساءً) وتقاس الكفاءة بواسطة إجمالى الوقت الذي ينتهى الحاسب الآلى من أداء وظيفته. جمعت البيانات من عينة مكونة من 36 وظيفة: 18 أثناء فترات العمل التي بها ضغط ، 18 أثناء الفترات الخفيفة. وحيث أن حجم الوظيفة معقد يمكن توقع أثرها على الوقت الكلى. الوقت الفعلى للحاسب الآلى (الوقت الفعلى هو الوقت الذى يستغرقه الحاسب فى إنهاء الوظيفة مطروحاً منه أوقات انتظار وظائف الأخرى) بالتالى يمكن أن يضم النموذج المتغيرات التالية:

Y : الوقت الكلي

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{فترة ضغط} \\ 0 & \text{فترة خفيفة} \end{cases}$$

X_2 = وقت وحدة التشغيل للحاسب

وكانت النتائج كالاتي:

$$\hat{Y} = 14.31 + 4.5X_1 + .33X_2$$

وكانت: $\left(R^2 = .77\ ,\ SST = 3225\ ,\ SS(b_1) = .09\ ,\ SE(b_2) = .11\right)$

أ – حدد SSR , SSE

ب– هل يمكن تحديد العلاقة بين Y , X_1 , X_2 كمجموعة ؟ وضح إجابتك .

ج – هل المساهمات الهامشية للمتغيرات X_1 , X_2 مفيدة ؟ اشرح استنتاجك حول كل متغير .

د – هل إشارات b_1 , b_2 متسقة مع العلاقات المتوقعة بين الوقت: (والوقت المضغوط/ الخفيف)، ووقت تشغيل الحاسب ؟

هـ – ما هى معادلة المربعات الصغرى لفترة العمل المضغوط ؟ لفترة العمل الخفيف ؟

(١٠–٢٥) شركة خدمات تتخذ نموذج الإنحدار التالى في تقييم المواقع الخاصة بتقديم الخدمة وتعتمد فى دراستها على 46 محطة خدمة . (محطات خدمة بترولية)

$$\hat{Y} = -17.4 + 20X_1 + .0033X_2 + 3.1X_3 + 2.2X_4$$

حيث :

Y = متوسط مبيعات البنزين فى اليوم (بالألف دولار) .

X_1 = سعر الجالون .

X_2 = حجم المرور (متوسط عدد السيارات التى تمر على الموقع فى اليوم) .

X_3 = طريقة الوصول: (1) إذا كان هناك إتجاهان ، (0) إذا كان هناك اتجاه واحد.

X_4 = brand image ("brand" 1, "off" 0)

فإذا حصلت على المعلومات التالية لهذا النموذج

$$SST = 180,\ SSE = 35,\ SE(b_1) = 14,\ SE(B_2) = .0005,\ SE(b_3) = .60 \text{ and } SE(b_4) = 1.8$$

أ – حدد R_a^2 معتمداً على هذه القيمة هل يمكنك القول أن معادلة التنبؤ جيدة ؟ اشرح .

ب– كمجموعة ، هل المتغيرات المفسرة مرتبطة كلياً مع متوسط المبيعات اليومية؟ دعم إجابتك.

ج – فيما يتعلق بالمساهمات الهامشية لكل متغير مفسر ، أى واحد منهم يظهر أكثر أهمية ؟ الأقل أهمية .

د – معتمداً على إجابة الجزء ج ، أى المتغيرات يمكنك حذفه ولماذا ؟

هـ – ما هى معادلة المربعات الصغرى لمحطة الخدمة التى تبيع (name brand) بنزين والتي تقع على طريق ذو إتجاهين؟

(١٠–٢٦) فى مدينة ما ، تم اختيار 5 منازل مباعة حديثا عشوائيا من كل منطقة من ثلاث مناطق مختلفة (A ، B ، C) في تلك المدينة. ولقد تم مقارنة سعر البيع Y بالقيمة المقدرة X_1 والمحددة من مكتب مثمن عقارى. وكانت بيانات العينة كما يلى (حيث أن سعر البيع وقيمة الأصول مقدرة بآلاف الدولارات):

المنطقة	X_1	Y
A	53.1	62.5
A	62	56.8
A	67.8	62.6
A	73.4	61.2
A	79.6	68.6
B	83.9	95.2
B	88.4	103.4
B	92.3	103.3
B	97.8	136.8
B	100.8	134.3
C	116.5	142.8
C	121.8	145.6
C	126.2	152.5
C	132.6	147.4
C	140.5	167.8

اختار نموذج مناسب لهذه البيانات، وقيم النموذج المختار.

(١٠-٦) المنحنى الخطى لنموذج الإنحدار : Curvilinear Regression Models

فى العديد من التطبيقات، قد لا تكون العلاقة خطية بين المتغير التابع Y وواحد أو أكثر من المتغيرات المفسرة. ولتوضيح ذلك نرجع إلى مثال (٩-٢) (المرتب مقابل الخبرة). وبالنظر إلى شكل (٩-٧)، (٩-١٧) نلاحظ أن كلاهما يحتوى على عنصر مربع (X^2) فى نموذج الإنحدار. ويمكننا دمج العنصر التربيعى ضمن المتغيرات المفسرة فى نموذج الإنحدار كما يلي:

$$(Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon)$$

حيث : $\beta_2 X^2$ العنصر المربع. ويظل بذلك نموذج خطى متعدد حيث أن الخطية تتعلق بالمعالم $\beta_0 , \beta_1 , \beta_2$. سوف نعالج X (سنوات الخبرة)، X^2 (سنوات الخبرة المربعة) كمتغيرين تفسيريين. لاحظ أنه إذا كان العنصر التربيعى مفيداً، فإن β_2 لا تساوى الصفر. ومن نتائج برنامج SAS لهذا المثال المستخدم والموضح بجدول (١٠-٧) يمكن إستنتاج الآتى من هذه المخرجات :

جدول (١٠-٧)
مخرجات SAS المرتب مقابل الخبرة

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: SALARY

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	2766.59844714	1383.29922357	555.00	0.0001
Error	13	32.40155286	2.49242714		
Corrected Total	15	2799.00000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	SALARY Mean
0.988424	3.272005	1.57874227	48.25000000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
YEARS	1	2446.67975316	2446.67975316	981.65	0.0001
YEARSQRD	1	319.91869398	319.91869398	128.36	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
YEARS	1	821.06024971	821.06024971	329.42	0.0001
YEARSQRD	1	319.91869398	319.91869398	128.36	0.0001

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	19.98007592	18.54	0.0001	1.07779724
YEARS	3.21518871	18.15	0.0001	0.17714553
YEARSQRD	-0.06339113	-11.33	0.0001	0.00559526

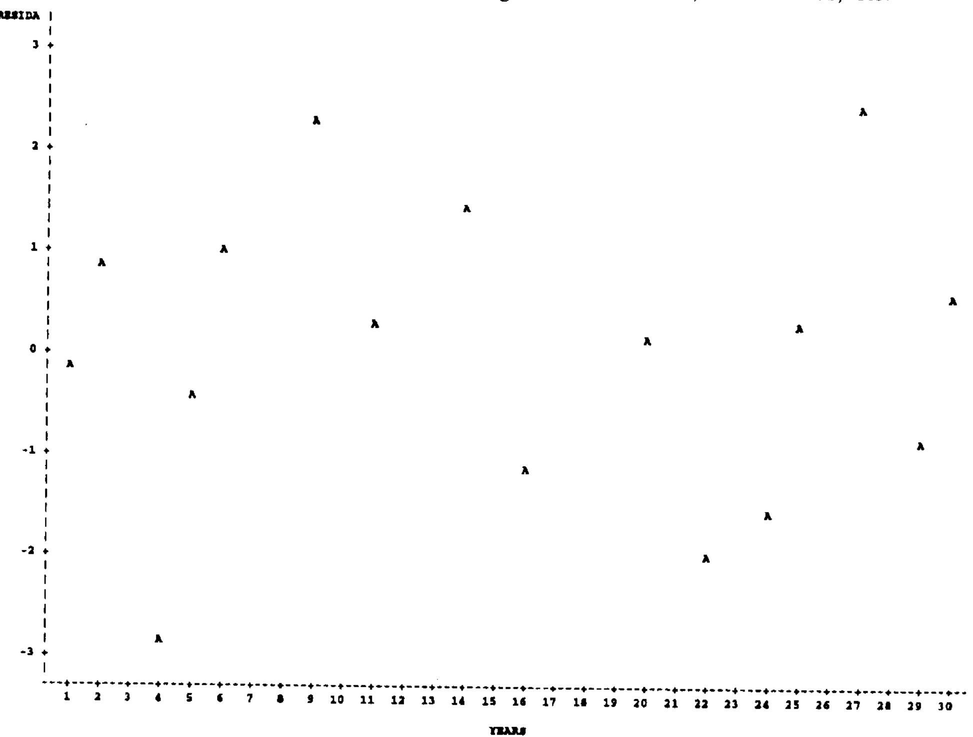
١- معادلة المربعات الصغرى هى :

$$(\ \hat{Y}= 19.9801 + 3.2152X - 0634X^2)$$

لاحظ أن إشارة معامل الحد التربيعى سالبة ($b_2 = - .0634$). وهذا يعنى أن منحنى المربعات الصغرى يتسطح كلما زادت قيمة X . وهذا يتسق مع شكل الإنتشار (٩-٧) .

٢-إن وجود الحد التربيعى ضمن معادلة الانحدار مفيداً، حيث أن الفرض (H_0: β_2=0) يتناقض مع بيانات العينة (وتكون قيمة P = .0001 سواء المصاحبة للاحصاء T أو F الجزئية).

٣- تكون معادلة المربعات الصغرى المتضمنة الحد التربيعى أفضل فى التقدير والتنبؤ عن النموذج الخطى. ويكون تباين البواقى S_e^2 أقل من قيمتها من قبل. وتتزايد قيمة R^2 من 874. إلى 988. . وتقدير المعالم β_1 لعنصر β_1X يكون أدق من ذى قبل (وقيمة T تكون الآن 18.5 فى مقابل قيمة T من قبل وهو 9.86) بالإضافة إلى ذلك، فإن الشكل البيانى للبواقى للتوفيق التربيعى مقابل عدد سنوات الخبرة والموضح فى شكل (١٠-٣)يظهر نمط لايمكن تحديده. ومما لا شك فيه فإن معادلة المربعات الصغرى التربيعية تكون أفضل فى التقدير والتنبؤ عن معادلة المربعات الصغرى الخطية وذلك داخل مدى بيانات العينة المعطاة.



شكل (١٠-٣)

شكل البواقى للتوفيق التربيعى للدخل مقابل عدد سنوات الخبرة

تمارين

(١٠-٢٧) افترض أن معادلة المربعات الصغرى ($\hat{Y} = 110 + 4.5X - .25X^2$) ممثلة للعلاقة بين المبيعات (Y) والسعر (X) افترض أن :

$SE(b_2) = .06$, $SE(b_1) = .5$, $n = 15$, $SSR (X, X^2) = 300$, $SST = 400$.

أ - إذا كان المدى المستخدم لقيم X فى تحديد هذه المعادلة من 5 إلى 20، بين واشرح المشكلة إذا أردت التنبؤ بالمبيعات عندما ($X = 40$) .

ب- حدد قيم R^2 , R_a^2 لهذه المعادلة .

ج - هل تنصح بضم العنصر المربع إلى النموذج ؟ وضح اجابتك .

(١٠-٢٨) استخدم البيانات التالية لتحديد معادلة المربعات الصغرى :

X	10	15	22	28	40	45	55	60
Y	20.1	23	24.7	27.3	39.7	31.4	33	34.4

أ - مثل البيانات بيانياً معتمداً على شكل الإنتشار ، ما هو النموذج الملائم لتمثيل العلاقة بين X، Y ؟

ب- وفق النموذج طبقاً لإجابتك فى (أ) وقيم نتائج معادلة المربعات الصغرى؟

(١٠-٢٩) اذا اردنا تحديد النموذج الملائم لتمثيل العلاقة بين المبيعات الشهرية (Y) فى إقليم ما، وعدد المبيعات (X) المخصصة فى الإقليم . وفيما يلى رقم المبيعات لعدد 12 إقليم:

عدد الوحدات المخصصة (X)	2	2	2	3	3	4	4	5	6	7	9	9
المبيعات (Y)	41	52	48	66	56	77	72	85	80	90	92	85

أ - مثل البيانات بيانيا. ما هو النموذج الملائم لتمثيل العلاقة بين X , Y .

ب- وفق النموذج طبقاً لإجابتك فى (أ) وقيم نتائج معادلة المربعات الصغرى؟

(١٠-٣٠) إذا علمت أن الطلب على سلعة ما يتغير بسبب التغير فى سعر الوحدة، البيانات التالية تحتوى على (Y) الطلب على المنتج كدالة فى (X) مدى السعر العادل .

X بالدولار	8.8	9.7	9.9	10.3	11	12.5	13.2	14.8	15.8	17.4	18.2
Y بالوحدة	360	305	230	242	180	172	121	83	122	91	105

أجب على الجزئين (أ)، (ب) المذكورين في التمرين (١٠-٢٩) باستخدام بيانات هذا التمرين.

(١٠-٧) اكتشاف النقص في النموذج وتجنب العوائق : تحليل البواقى والأزدواج الخطى:

Detecting Model Deficiencies and Avoiding Pitfalls: Residual Analysis and Collinearity

F ،T يعتبرا من الأحصاءات الهامة في اكتشاف المساهمة المفيدة للمتغيرات الفردية، ولكنهما غير كافيان لتوضيح ما إذا كان نموذج المربعات الصغرى دقيق ومضمون. وليس هناك تحليل إنحدار كامل ما لم يتم فحص الإنتقاضات المكنة فى النموذج أو المشاكل التى توجد به، حتى لو كانت النتائج التى تعتمد على المؤشران F , T الهامشية والتى قد تظهر جودة النموذج. دائما توجد مشكلتان واضحتان وهما التناقضات المحتملة عن فروض النموذج والأزدواج الخطى Callinearity والذى قد يحدث عندما يكون هناك إرتباط قوى بين بعض المتغيرات المفسرة. وسوف نتعرض لهاتان المشكلتان فى هذا الجزء .

(١٠-٧-١) تحليل البواقى : The Analysis of Residuals

إن أفضل طريقة لفحص الانحرافات عن فروض النموذج، يكون عن طريق تحليل البواقى. حيث أن تحليل البواقى يحدد المشاكل غير العادية فى بيانات العينة ويقترح طرق لتحسين النموذج وعلى الخصوص سوف نفحص ثلاث مشاكل شائعة وهي : (١) العلاقة بين المتغير التابع وواحد أو أكثر من المتغيرات المفسرة والتى قد لا تكون خطية. (٢) قد لا يكون تباين الخطأ σ_{ε}^{2} ثابت . (٣) قد لا يشمل النموذج واحد أو أكثر من المتغيرات الهامة . أيضاً سيتم النظر إلى مشكلة القيم المتطرفة outliers أى للمفردات التى تكون مشاهداتها مختلفة وبعيدة عن بيانات العينة .

ويعنى تحليل البواقى تحليل الرسم البيانى للبواقى. فإذا كانت معادلة المربعات الصغرى جيدة ولا يوجد بها تناقضات فإن الشكل البيانى للبواقى فى مقابل كل متغير مفسر أو قيم $\hat{Y}$ يجب أن لا يظهر عنه نموذج معين. وبعبارة أخرى يجب أن لا توجد علاقة بين البواقى والمتغيرات المفسرة أو بين البواقى وقيم Y المقدرة. لكن إذا كان هناك شكل أو نمط يمكن توضيحه، فإنه يمكن أن يكون نقص أو عيب فى معادلة المربعات الصغرى .

ولإكتشاف المشاكل أو العيوب الثلاث الشائعة نجرى الآتى :

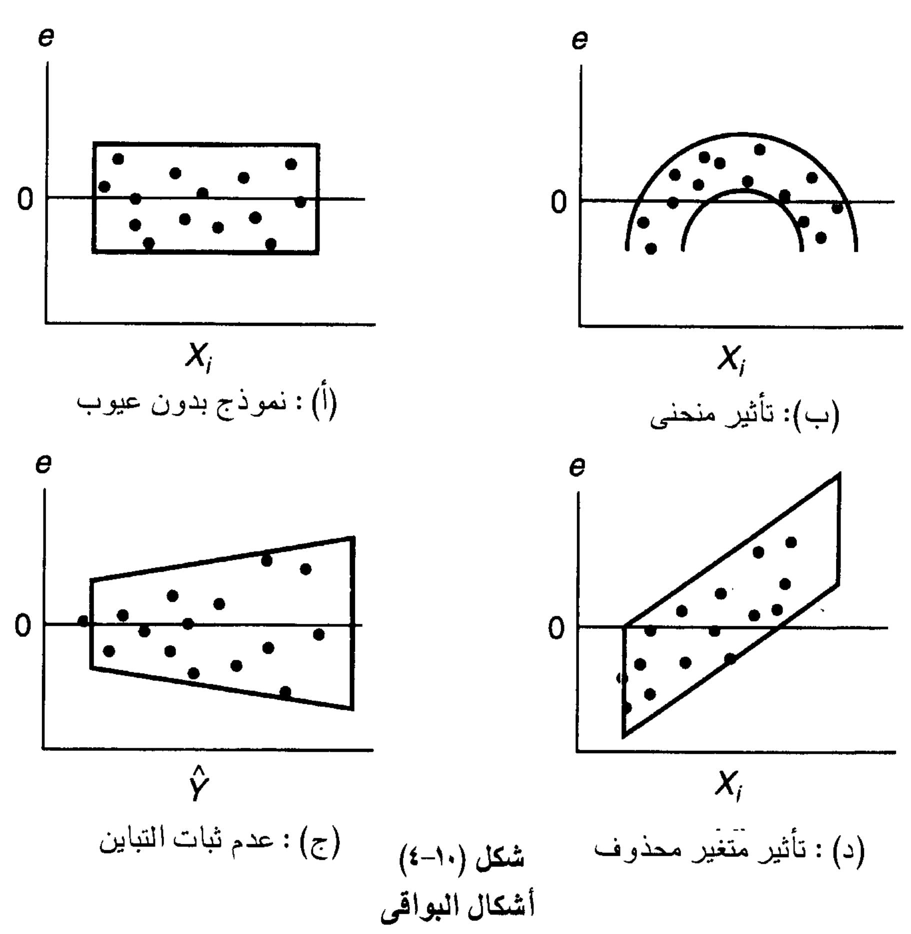
١- إكتشاف الإنحناء (التقوس) لتحديد ما إذا كانت العلاقة لها إنحناء يتعلق ببعض المتغيرات المفسرة. ويتم رسم شكل بيانى للبواقى فى مقابل كل متغير مفسر فى معادلة المربعات الصغرى .

٢-إكتشاف عدم ثبات تباين الخطأ. لتحديد هل تباين الخطأ ثابت، فإننا نقوم برسم الشكل البيانى بين البواقى وقيم$\hat{Y}$.

٣-إكتشاف عدم وجود متغير تفسيري هام. لتحديد ما إذا كان من الممكن ادخال متغير تفسيري هام في نموذج الانحدار (لم يكن موجوداً من قبل)، نقوم برسم البواقي مقابل قيم ذلك المتغير.

إذا كانت معادلة المربعات الصغرى خالية من أي عيوب، فإن البواقي تميل إلى أن تقع في شكل حزمة أفقية تتمركز حول الصفر، مع عدم وجود ميل لأن تكون موجبة أو سالبة بأنتظام. عموماً فان أي إختلاف عن هذا السلوك قد يفسر بوجود بعض النقائص أو العيوب في النموذج.

شكل(١٠-٤) يصور أشكال البواقى عندما تكون : (أ) معادلة المربعات الصغرى لا تحتوى على أى تناقضات. (ب) الأثر التربيعى للمتغير المفسر والذي يجب تضمينه فى النموذج. (ج) تباين الخطأ لا يكون ثابت (في مثل هذه الحالة، يمكن استخدام طريقة المربعات الصغري المرجحة كعلاج لهذه المشكلة). (د) حذف متغير مفسر يظهر إرتباط خطى قوى مع البواقى ويجب أن يضم فى نموذج الإنحدار.



شكل (١٠-٤)
أشكال البواقى

رصد البواقى تساعدنا أيضاً فى إكتشاف المشاهدات المتطرفة والتى تعرف باسم outliers . البواقي المرتبطة بهذه المشاهدات المتطرفة outliers عادة ما تكون كبيرة جداً في الحجم مقارنة بالبواقى الأخرى. ويمكن أن تخلق القيم المتطرفة مشكلة لأن لها أثر غير متكافئ على قيم معاملات المربعات الصغرى المقدرة فى النموذج. وعندما نحدد مشاهدة بأنها outlier ، ويجب إستبعادها من بيانات العينة المستخدمة لتحسين معادلة الإنحدار المقدرة. إذا كانت كل بيانات عينة ممثلة بشكل صحيح، فإن

إزالة أي مشاهدة من العينة تولد أثر صغير على معادلة المربعات الصغرى. ومع ذلك فنحن نحذر، من أنه حتى اذا كانت المشاهدة شبه قيمة متطرفة outliers ، فلايوجد سبب لاستبعادها إلا إذا وجد دليل قوى يدل على أن المشاهدة لاتمت بصلة لموضوع الدراسة. أمثلة للقيم المتطرفة والتي تشمل أخطاء التسجيل والبيانات لحوادث غير العادية مثل الأضرابات، الكوارث الطبيعية، الأعطال غير المتوقعة للآلات.

مثال (١٠-٦)

تريد شركة صناعية أن تتنبأ بتكلفة الوحدة المصنعة Y لواحدة من منتجاتها كدالة فى معدل الإنتاج المتغير X_1 والمواد الخام وتكلفة العمالة X_2 ولقد جمعت البيانات لمدة 20 شهر. إستخدم هذه البيانات فى تحديد أفضل معادلة مربعات صغرى للتنبؤ بتكلفة الوحدة.

Y	X_1	X_2	Y	X_1	X_2
13.59	87	80	15.93	102	116
15.71	78	95	16.45	82	117
15.97	81	106	19.02	74	127
20.21	65	115	18.16	85	133
24.64	51	128	18.57	86	135
21.25	62	128	17.01	90	136
18.94	70	115	18.03	93	140
14.85	91	92	19.22	81	142
15.18	94	93	21.12	72	148
16.30	100	111	23.32	60	150

الحـــل :

فى البداية نفترض النموذج الخطى :

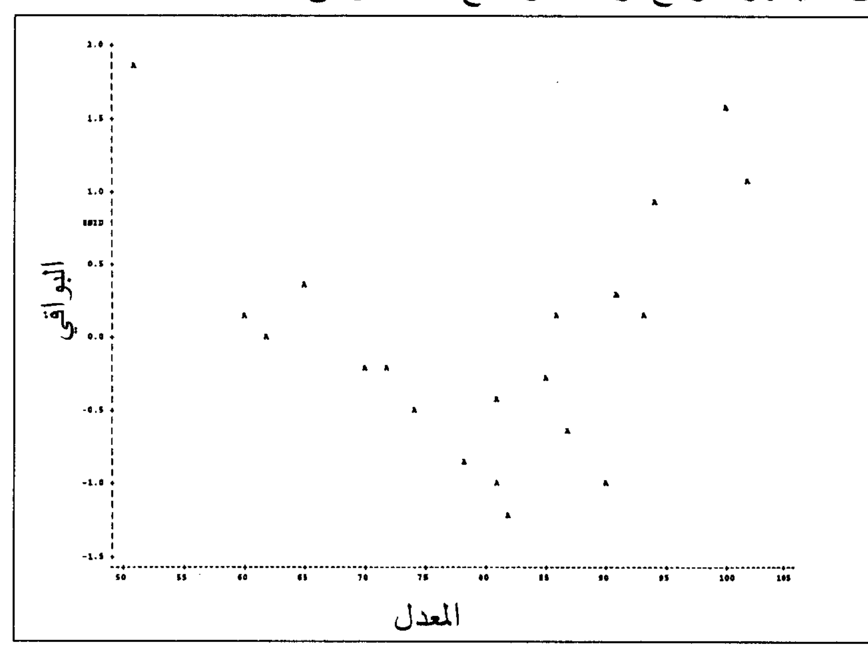
$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

نتائج أو مخرجات برنامج SAS لهذا النموذج معطى فى جدول (١٠-٨). من هذه المخرجات نلاحظ أن ($b_1 = -.1377$) . ($b_2 = .0742$) أى قيمة سالبة لمعامل X_1 وقيمة موجبة لمعامل X_2. الخطأ المعيارى لهذه التقديرات صغير قياساً بقيم المعاملات نفسها. لهذا فإن، β_1 ,β_2 قدرت بدقة معقولة وقيمة R^2 تساوى 914. وهي مرتفعة نسبياً، والأثر المضاف لكل متغير مفسر فى حضور المتغيرات الأخرى واضح تماماً، حيث أن قيم P لإختبار F , T الهامشية تكون صغيرة جداً (كلاهما 001.) وتكون النتيجة اننا نحصل على معادلة تنبؤ جيدة، هل أنت موافق؟ لكن انتظر ماذا عن شكل البواقى؟ وفى شكل (١٠-٥) يظهر شكل البواقى. والجزء (أ) يبين البواقى مقابل X_1 (المعدل)، والجزء (ب) يظهر البواقى فى مقابل X_2 (العمالة). وعلى الرغم من عدم ظهور نمط أو نموذج متعلق بقيمة X_2، فإن نموذج تربيعي محدد يمكن اكتشافه مع المتغير X_1 (المعدل). وبهذا يفضل أن ندخل عنصر تربيعى للمتغير X_1 فى معادلة الإنحدار.

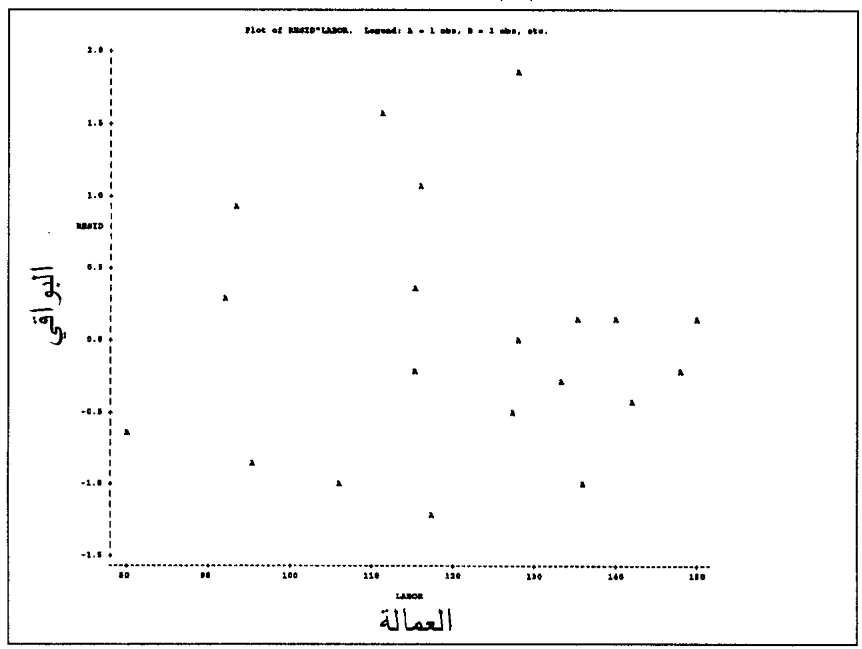
وإذا أردنا الآن محاولة تحسين النموذج عن طريق اضافة العنصر التربيعي للمقدار X_1 ، بالتالي يكون النموذج.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1^2 + \varepsilon$$

ونحصل على نتائج البرنامج الإحصائى SAS المعطاة فى جدول (١٠-٩). بناء على هذه النتائج الجديدة هل تستطيع أن ترى أن ادخال العنصر التربيعى فى النموذج قد ساعد على تحسين التوفيق في معادلة المربعات الصغرى؟ الفرض العدمى $(H_0: \beta_3=0)$ يكون من السهل إنكاره حيث أن (P-value = .0001)، وتكون المعالم β_1, β_2 المقدرة أفضل من ذى قبل من حيث الدقة، لأن قيم T تكون أكبر وتباين S_e^2 البواقي يكون أقل من ذي قبل. (1911. لهذا النموذج في مقابل 7996. للنموذج السابق) وقيمة R^2 تزداد بالتالى من 914. إلى 981. ، وفى النهاية يتم تمثيل البواقى الجديدة فى شكل (١٠-٦) والذى لا يظهر نموذج أو شكل واضح لتلك البواقى .



شكل (١٠-٥)
(أ) البواقى مقابل المعدل



شكل (١٠-٥)
(ب) البواقى مقابل العمالة

جدول (١٠-٨)
مخرجات SAS لمثال (١٠-٦)

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	6	12226767.88076240	2037794.64679375	16.16	0.0001
Error	17	2144200.74423751	126129.45554338		
Corrected Total	23	14370968.62500000			

R-Square	C.V.	Root MSE	Y Mean
0.850796	16.41824	355.14709001	2163.12500000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
X1	1	3180503.76444430	3180503.76444430	25.22	0.0001
X2	1	1355656.00475436	1355656.00475436	10.75	0.0044
X3	1	727758.15719231	727758.15719231	5.77	0.0280
X4	1	4814280.29319091	4814280.29319091	38.17	0.0001
X5	1	2126706.26423271	2126706.26423271	16.86	0.0007
X6	1	21863.39694791	21863.39694791	0.17	0.6824

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
X1	1	1247739.29877925	1247739.29877925	9.89	0.0059
X2	1	1476207.38278585	1476207.38278585	11.70	0.0033
X3	1	566435.02679629	566435.02679629	4.49	0.0491
X4	1	506795.34905793	506795.34905793	4.02	0.0612
X5	1	1758155.66446358	1758155.66446358	13.94	0.0017
X6	1	21863.39694791	21863.39694791	0.17	0.6824

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	7268.399177	3.09	0.0067	2353.287660
X1	0.537548	3.15	0.0059	0.170909
X2	-31.919953	-3.42	0.0033	9.330326
X3	-324.098428	-2.12	0.0491	152.936144
X4	-95.344409	-2.00	0.0612	47.564965
X5	-599.216956	-3.73	0.0017	160.495808
X6	-148.079139	-0.42	0.6824	355.666795

جدول (١٠-٩)
مخرجات SAS المعدلة لمثال (١٠-٦)

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: COST

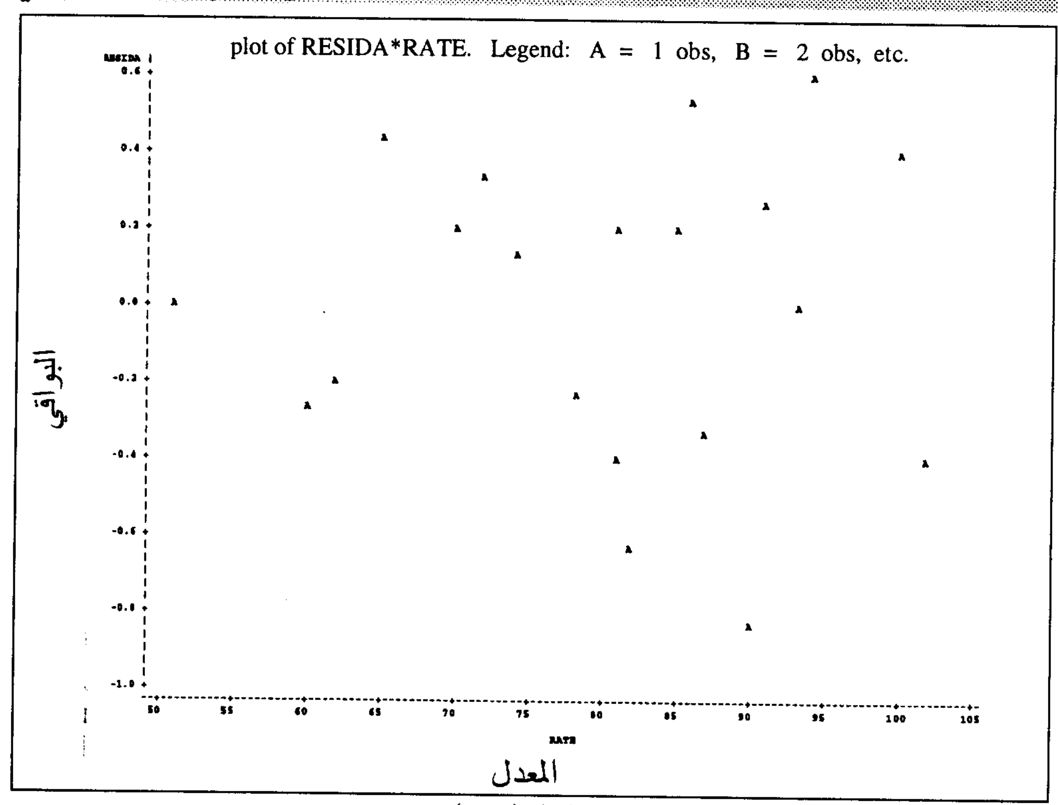
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	154.92332501	51.64110834	270.29	0.0001
Error	16	3.05692999	0.19105812		
Corrected Total	19	157.98025500			

R-Square	C.V.	Root MSE	COST Mean
0.980650	2.405161	0.43710196	18.17350000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
RATE	1	107.72559542	107.72559542	563.84	0.0001
LABOR	1	36.66174860	36.66174860	191.89	0.0001
RATESQRD	1	10.53598099	10.53598099	55.15	0.0001

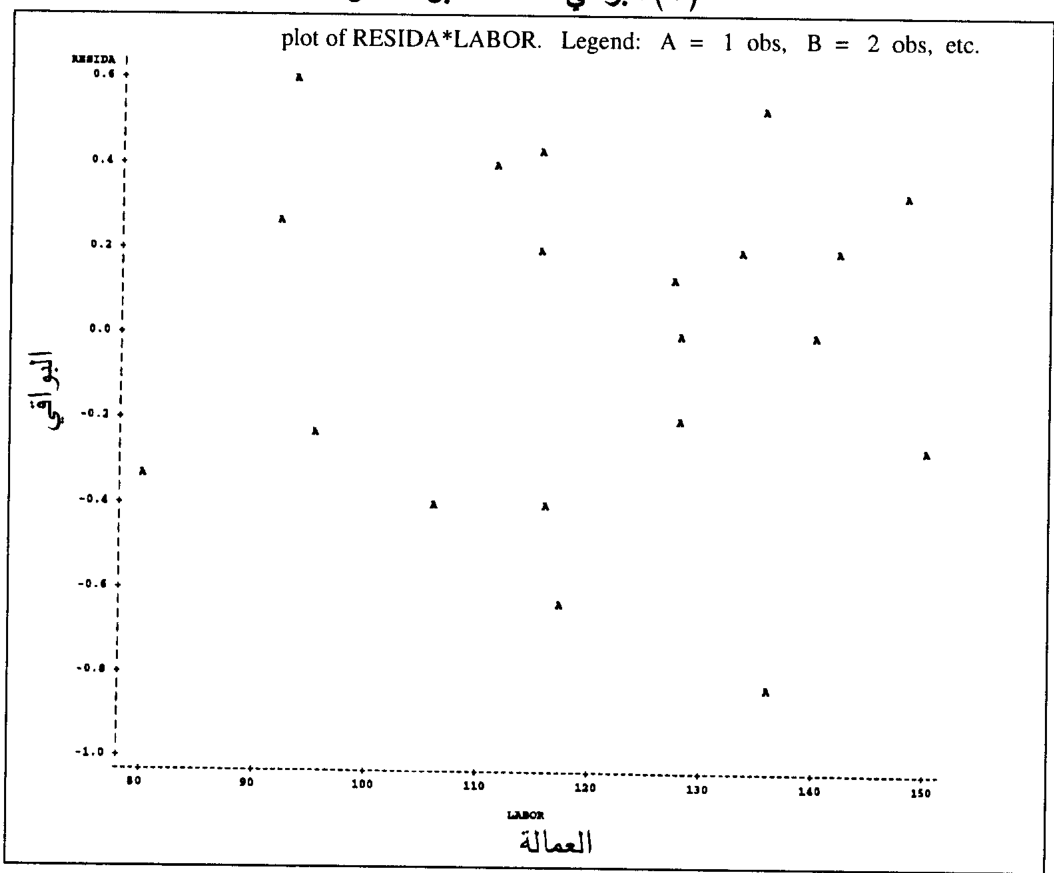
Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
RATE	1	16.15567401	16.15567401	84.56	0.0001
LABOR	1	35.76285262	35.76285262	187.18	0.0001
RATESQRD	1	10.53598099	10.53598099	55.15	0.0001

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	41.55145864	13.64	0.0001	3.04686620
RATE	-0.70027157	-9.20	0.0001	0.07615295
LABOR	0.07334821	13.68	0.0001	0.00536113
RATESQRD	0.00362371	7.43	0.0001	0.00048798



شكل (١٠-٦)

(أ) البواقي معدلة مقابل المعدل



شكل (١٠-٦)

(ب) البواقي معدلة مقابل العمالة

مثال(١٠-٧)

بالإشارة لمثال (١٠-٤) . إستخدم دخل العائلة (X_1) كمتغير مفسر وحيد. إستخدم النموذج ($Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$) لتوفيق بيانات العينة. ثم ارسم شكلا لتوضيح البواقى الناتجة عن معادلة المربعات الصغرى فى مقابل قيم (X_2) حجم العائلة. ماذا ترى؟ إشرح معنى ذلك .

الحل

بإستخدام نتائج البرنامج الإحصائى Minitab والموضحة فى جدول (١٠-١٠) يمكن تحديد الآتى :

١-خط معادلة المربعات الصغرى ($\hat{Y} = .1619 + .1343\ X_1$) وتقدير المربعات الصغرى للميل ($b_1 = .1343$) موجب كما هو متوقع .

٢-الفرض العدمى ($H_0{:}\beta_1 = 0$) يتناقض بوضوح مع دليل العينة (P-value = .000) لهذا تظهر بقوة علاقة خطية بين الإنفاق على الطعام ودخل العائلة .

وشكل الإنتشار للبواقى الناشئة عن معادلة المربعات الصغرى $\hat{Y} = .1619 + .1343X_1$ المرسومة فى مقابل قيم X_2(حجم العائلة)، وشكل (١٠-٧) يشير إلى أن هناك اتجاه خطى لأعلى. وهذا يوضح أن حجم العائلة كمتغير مفسر سوف يحسن معادلة المربعات الصغرى بصورة واضحة، ونحن نعلم أن هذا صحيح من نتائج المثال (١٠-٤) .

جدول (١٠-١٠)
مخرجات ميني تاب لمثال (١٠-٧)

```
The regression equation is
food = 0.162 + 0.134 income

Predictor        Coef        Stdev      t-ratio       p
Constant      0.16190      0.04680        3.46     0.004
income        0.13432      0.01322       10.16     0.000

s = 0.1109    R-sq = 88.8%    R-sq(adj) = 88.0%

Analysis of Variance

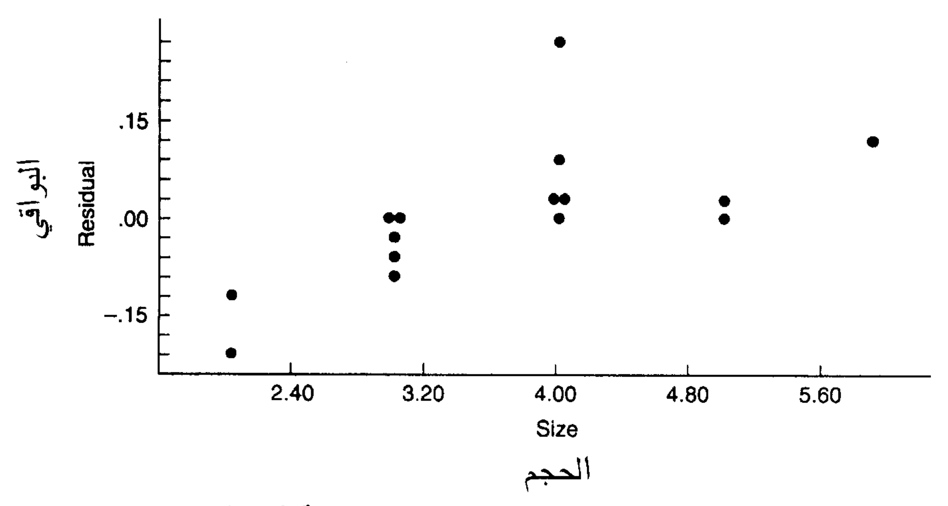
SOURCE        DF        SS         MS          F         p
Regression     1    1.2716     1.2716     103.31     0.000
Error         13    0.1600     0.0123
Total         14    1.4316

Unusual Observations

Obs.  income    food     Fit   Stdev. Fit  Residual  St. Resid

   5    6.20  1.2500  0.9947      0.0533    0.2553      2.62R
   9    8.90  1.2900  1.3574      0.0856   -0.0674     -0.95 X

R denotes an obs. with a large st. resid.
X denotes an obs whose X value gives it large influence.
```



شكل (١٠-٧) : الشكل البيانى للبواقى مقابل لحجم العائلة فى مثال (١٠-٧)

(١٠-٧-٢) مشكلة الأزدواج الخطى : The Problem of Collinearity

المشكلة المتكررة فى الإنحدار الخطى المتعدد هي مشكلة إرتباط المتغيرات التفسيرية. إذا كان هذا الإرتباط قليل فإن التأثير يكون صغير، ولكن إذا كان هناك ارتباط قوى بين متغيرين أو أكثر من المتغيرات التفسيرية فإن النتائج تكون وخيمة. هذا يعنى أن مثل هذه المتغيرات تقدم معلومات زائدة عن الحاجة وبالتالى نتائج الإنحدار يمكن أن تكون غامضة جداً. خاصة المتعلقة بقيم تقديرات المربعات الصغرى.

وينشأ عن الإرتباط القوى بين متغيرين (أو أكثر) من المتغيرات التفسيرية، حالة تسمى الأزدواج الخطى Collinearity، وتعرف أيضاً (بالأزدواج الخطى المتعدد) . وترجع مشكلة الأزدواج الخطى إلى نقص البيانات . وهذا ثمن ندفعه عندما لا نستطيع استخدام تصميم التجارب للحصول على بيانات ونضطر إلى الإعتماد على بيانات ملائمة بديلة .

وسبق أن ذكرنا أن معادلة المربعات الصغرى تساعدنا على تقدير المتوسط للمتغير التابع أو تساعد في التنبؤ بالمتغيرات التابعة الفردية بدقة مناسبة. ولا تمنع الإرتباط الخطى جودة التوفيق ولا من التقدير أو التنبؤ داخل مدى قيم المتغيرات التفسيرية . الأزدواج الخطى يؤثر على تقديرات المربعات الصغرى لأنها تميل لتخفيض الدقة المتعلقة بالآثار الإضافية للأزدواج الخطى للمتغيرات المفسرة. وبعبارة أخرى عندما يكون هناك متغيران مرتبطين خطياً فإن معاملات المربعات الصغرى لا تقيس أثر كل منهما على المتغير التابع. وإلى حد ما فإنها تعكس الأثر التابع الذى يكون معرض لإرتباط قد يحدث للمتغيرات المفسرة فى معادلة المربعات الصغرى .

للتوضيح ، إفترض أننا ندخل المتغير التفسيرى (الرطوبة) "humidity" فى مثال الأيس كريم بالإضافة إلى السعر ودرجة الحرارة (لقد اسقطنا نوع اليوم المتغير الوهمي للخطة حتى يتضح لنا بجلاء تأثير الأزدواج الخطي). ومن الممكن أن الرطوبة ودرجة الحرارة مرتبطان بدرجة كبيرة، لهذا فإن كلاهما يشير ببساطة إلى مستوى الراحة لليوم المعطى (حار ورطب في يوم وبارد جاف فى يوم آخر) . وفيما يلى البيانات التى نتعامل معها :

Day	Daily sales	Price	Temperature	Relative Humidity
1	374	35	74	50
2	386	35	82	72
3	472	35	94	92
4	429	50	93	88
5	391	50	82	70
6	475	50	96	94
7	428	50	91	85
8	412	65	93	89
9	405	65	88	80
10	341	65	78	60

لاحظ أنه فى الأيام التى تكون درجة الحرارة منخفضة فيها ، تكون الرطوبة أيضاً منخفضة. وعندما تكون درجة الحرارة عالية تكون هى أيضاً كذلك. في هذه البيانات لا توجد أيام فيها درجة الحرارة عالية وتكون الرطوبة منخفضة أو العكس. هذا النوع من الحالات يكون أساس الازدواج الخطى، بمعنى يكون هناك إرتباط قوى بين المتغيرين المفسرين. ونموذج الإنحدار الذى يحتوى درجة الحرارة والرطوبة يكون مرجحاً للتعرض لمشكلتين بسبب الازدواج الخطى :

١- إذا كان المتغيران المفسران عاليان في الإرتباط فإنهما لا يعطيا بمعلومات أساسية مضافة غير تلك البيانات التى نحصل عليها بواسطة المتغيرات الأخرى. لهذا فإن الأثر الفردي لا يتضح لكل متغير على الرغم من أن كل متغير بنفسه يكون مفيداً فى شرح الإختلاف بين قيم Y . وقيم P للاحصاء F الهامشية لآخر متغير يدخل فى النموذج (Type I SS in SAS)، ربما يتناقض مع قيم P للاحصاء F الهامشية للأثر الإضافى للمتغير المفسر فى وجود كل المتغيرات التفسيرية الأخرى فى النموذج (الأحصاء T أو Type III SS in SAS). هذا السلوك يمكن توضيحه فى مخرجات SAS فى جدول (١٠-١١) لمثال الأيس كريم للسعر ودرجة الحرارة والرطوبة كمتغيرات مفسرة. لاحظ أن قيم P للأحصاء F الهامشية أو T للأثر الإضافى للحرارة أو للرطوبة في وجود المتغيرين الأخرين تكون .0627 , .2893 على التوالى وهذا يدل على أنه لا يمكن إعتبار أى من التأثيرات مفيدة فى شرح الإختلاف فى قيم Y للعينة. لكن عندما ننظر إلى للأحصاء F الهامشية لدرجة الحرارة فى وجود السعر فقط (Type I SS) نجد أن قيمة P هى .0001. وهذا يدل على أن درجة الحرارة فى وجود السعر فقط تكون مفيدة تماماً فى شرح الإختلاف فى قيم Y . هذا النوع من التناقض يكون سببه راجع إلى الإرتباط بين درجة الحرارة والرطوبة .

جدول (١٠-١١)

مخرجات SAS لمثال الأيس الكريم للمتغيرات الحرارة، السعر، الرطوبة النسبية

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: SALES

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	14775.53863450	4925.17954483	30.01	0.0005
Error	6	984.56136550	164.09356092		
Corrected Total	9	15760.10000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	SALES Mean
0.937528	3.114491	12.80990089	411.30000000

تابع : جدول (١٠-١١)

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRICE	1	912.66666667	912.66666667	5.56	0.0564
TEMP	1	13641.27520776	13641.27520776	83.13	0.0001
HUMID	1	221.59676008	221.59676008	1.35	0.2893

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
PRICE	1	2547.48181406	2547.48181406	15.52	0.0076
TEMP	1	854.12480200	854.12480200	5.21	0.0627
HUMID	1	221.59676008	221.59676008	1.35	0.2893

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	-217.6070310	-1.01	0.3514	215.4286267
PRICE	-1.4123454	-3.94	0.0076	0.3584521
TEMP	10.5048795	2.28	0.0627	4.6044332
HUMID	-2.7621885	-1.16	0.2893	2.3769354

٢- معاملات المربعات الصغرى للمتغيرات المرتبطة تكون عالية التقلب ولها أخطاء معيارية كبيرة. هذا يعنى أنه حتى في حالة حدوث تغيرات طفيفة فى بيانات العينة، فإنها يمكن أن تسبب تغيرات كبيرة فى أحد المعاملات. بالتالى فإن معاملات المربعات الصغرى للمتغيرات المرتبطة خطياً لا يعتمد عليها في تفسير علاقات النموذج. على الجانب الآخر فإنها تميل إلى أن تعوض بعضها البعض. إذا كانت المعاملات كبيرة نسبياً للعينة المعطاة فإن معاملات المتغيرات المرتبطة يمكن أن تعوض وتصبح صغيرة. كنتيجة لذلك فإن، كل الآثار للمتغيرات المرتبطة (كمجموعة) فى التقدير أو التنبؤ تقريباً تكون مستقرة ومتعادلة. وللتوضيح بإستخدام مثال الأيس كريم، فإن معامل المربعات الصغرى لدرجة الحرارة يكون {($b_2 = 5.1953$)} بخطأ معياري (.5839) عندما لا يدخل عامل الرطوبة فى النموذج. لكن يصبح المعامل ($b_2 = 10.5049$) والخطأ المعيارى 4.6044 عندما تكون الرطوبة مضافة للنموذج [انظر جدول (١٠-١١)]. ويكون معامل المربعات الصغرى للرطوبة سالب (-2.7622). ومن الشائع أن معامل المتغير المرتبط خطياً تكون له إشارة خاطئة كما فى هذه الحالة. لذلك، فإن معادلة المربعات الصغرى تكون غير جيدة. وتكون الرسالة أن الإرتباط أو الأزدواج الخطى يسبب معادلات نموذج غير واقعية ولا تكون مفيدة لغرض التفسير حتى لو أن التنبوءات ظلت ثابتة.

ولقد تم إشتقاق طرق إحصائية معقدة لتتبع وجود عمليات الأزدواج الخطى، لعل أبسطها هو ملاحظة تناقض النتائج بين نوعى الأحصاء F الهامشية أو ملاحظة تقلب المعاملات، والذى يساعد فى هذا الخصوص. والحل الأفضل هو تجنب الإرتباط أو الأزدواج الخطى ككل. ويمكن تحقيق ذلك بواسطة إستخدام تجارب مصممة جيدا للحصول على بيانات عينة، ويكون ذلك بأختيار قيم المتغيرات التفسيرية التى تؤكد غياب الإرتباط الخطى. ففى مثال الأيس كريم، يعنى ذلك أن نلاحظ المبيعات للأيام بدرجة حرارة عالية ورطوبة منخفضة أو درجة حرارة منخفضة ورطوبة عالية. بالإضافة للأيام التى يكون فيها كلاهما عالى، أو كلاهما منخفض. لسوء الحظ فإنه عندما تكون البيانات الملائمة هى فقط المصدر الوحيد للمعلومات، فإن هذا الأسلوب يكون غير واضح أو غير مقبول عادة.

كيف إذن نعالج الموقف عندما لا يكتشف الإرتباط أو الأزدواج الخطى؟ يمكن إتباع هذه الطرق المباشرة :

١- إن أمكن، أضف لبيانات العينة قيم المتغيرات المرتبطة التى تميل إلى تقليل شدة أو حدة الإرتباط. فى مثال الأيس، كريم هذا يعنى إضافة المبيعات المشاهدة للأيام ذات درجة الحرارة العالية والرطوبة منخفضة أو العكس.

٢-إحذف واحد أو أكثر من المتغيرات المرتبطة. فى مثال الأيس كريم مثلا، نحذف الرطوبة ويضم السعر ودرجة الحرارة ونوع اليوم، سنحصل على معادلة إنحدار أفضل للتقدير والتنبؤ .

٣- نشكل متغير مفسر جديد والذى يخدم كمؤشر أو دليل للمتغيرات المرتبطة. فى مثال الأيس كريم، يمكن إنشاء متغير جديد عبارة عن متوسط المتغيرات: درجة الحرارة والرطوبة. وبإستخدام المتغير الجديد فى النموذج بدلاً من درجة الحرارة والرطوبة، نحذف الإرتباط أو الأزدواج الخطى بينما يحتفظ النموذج بالمعلومات لكلا المتغيرين درجة الحرارة والرطوبة.

مثال (١٠-٨)

البيانات التالية تمثل متوسط درجة حرارة الجو Y فى يناير لعدد 24 محطة قياس الطقس فى فرجينيا، حيث أن كل محطة تحدد بخط العرض X_1 ، وخط الطول X_2 ، وإرتفاع سطح البحر X_3 على التوالى. بإستخدام X_1 , X_2 , X_3 أوجد النموذج الخطى المناسب لهذه البيانات ثم وفق البيانات بهذا النموذج :

Y(temperature)	X_1(latitude)	X_2(longitude)	X_3(elevation)
37.9	37.35	79.52	975
28.7	38.52	78.43	3.535
38.3	37.08	77.95	440
37.3	37.53	79.68	870
31.5	37.08	81.33	3.300
35.0	37.38	80.08	1.890
36.0	38.03	78.52	870
37.4	36.83	79.37	700
40.4	37.28	75.97	11
35.8	37.77	78.15	300
35.3	38.47	78.00	420
33.2	38.45	78.93	1.400
41.3	36.90	76.20	25
34.7	38.45	77.67	300
38.0	37.33	78.38	450
34.2	36.93	80.30	2.600
35.4	38.30	77.47	100
35.7	37.37	80.00	1.524
39.7	36.68	76.78	80
40.5	37.30	77.30	40
31.6	38.00	79.83	2.238
40.0	37.08	76.35	10
36.1	37.78	79.43	1.060
34.1	39.12	77.72	500

الحل

جدول(١٠-١٢) يوضح مخرجات النموذج ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon$) وعلى الرغم من أن التوفيق يظهر جيداً (متوسط مربعات الخطأ قليلة و R^2 كبيرة)، إلا أن هناك تعارض بين نوعى الأحصاء F الهامشية. على سبيل المثال. الأثر الإضافى لخط الطول فى وجود خط العرض فقط (Type I SS) يكون مفيداً جداً فى شرح الإختلاف فى درجة الحرارة (P-value = .0001) لكن نفس الأثر فى وجود كل من خط العرض وإرتفاع مستوى سطح البحر

غيـر مفـيـد (P-value = .2511) وهذا يدل علـى أن خط الطول وإرتفاع سطح البحـر ربما يكونا مرتبطان. وهذا متوقع إذا أخذنا جغرافية ولاية فرجينيا في الاعتبار. فكلما انتقلنا من الشرق للغرب يتزايد خط الطول ونلاحظ ميل للتزايد فى الارتفاع عن سطح البحر. أي أن هناك إرتباط بين خط الطول والإرتفاع عن سطح البحر.

وحيث أننا لا نستطيع زيادة بيانات العينة بسبب الظروف الجغرافية، دعنا نخرج إما خط الطول أو الإرتفاع عن سطح البحر من نموذج الإنحدار. ويوضح جدول (١٠-١٣) مخرجات SAS لخط العرض وخط الطول فقط. وجدول (١٠-١٤) يوضح مخرجات SAS لخط العرض والإرتفاع عن سطح البحر. ومن الواضح أنه حتى الآن فإن معادلة الإنحدار التى تحتوى فقط على خط العرض وإرتفاع سطح البحر تكون أفضل بكثير عن التى تحتوى على خط العرض والطول. على سبيل المثال، فإن تباين البواقى يكون (.7645) بالمقارنة بالمقدار 2.8939 ومعامل التحديد R^2 تكون .9285 فى مقابل .7293. والأهم من كل هذا فإن دقة تقدير المعالم لخط العرض وإرتفاع سطح البحر يكون أفضل من تقدير معالم خط العرض وخط الطول (قيمة T تساوى 8.91- ، 13.13- فى مقابل 5.31- ، 5.49-) على التوالى :

جدول (١٠-١٢)

مخرجات SAS لمثال (١٠-٨)

خط الطول، خط العرض، الارتفاع عن سطح البحر: متغيرات تفسيرية

Dependent Variable: TEMP

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	209.50414409	69.83471470	93.08	0.0001
Error	20	15.00543924	0.75027196		
Corrected Total	23	224.50958333			

R-Square	C.V.	Root MSE	TEMP Mean
0.933163	2.394699	0.86618241	36.17083333

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
LAT	1	76.65032249	76.65032249	102.16	0.0001
LONG	1	87.08679739	87.08679739	116.07	0.0001
ELEV	1	45.76702422	45.76702422	61.00	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
LAT	1	61.76107570	61.76107570	82.32	0.0001
LONG	1	1.04809648	1.04809648	1.40	0.2511
ELEV	1	45.76702422	45.76702422	61.00	0.0001

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	151.7116876	7.75	0.0001	19.57344896
LAT	-2.5354467	-9.07	0.0001	0.27945148
LONG	-0.2306516	-1.18	0.2511	0.19514853
ELEV	-0.0020749	-7.81	0.0001	0.00026566

جدول (١٠-١٣)

مخرجات SAS لمثال (١٠-٨)

خط الطول، خط العرض: متغيرات تفسيرية

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: TEMP

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	163.73711988	81.86855994	28.29	0.0001
Error	21	60.77246346	2.89392683		
Corrected Total	23	224.50958333			

R-Square	C.V.	Root MSE	TEMP Mean
0.729310	4.703111	1.70115456	36.17083333

تابع : جدول (١٠-١٣)

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
LAT	1	76.65032249	76.65032249	26.49	0.0001
LONG	1	87.08679739	87.08679739	30.09	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
LAT	1	81.73903603	81.73903603	28.25	0.0001
LONG	1	87.08679739	87.08679739	30.09	0.0001

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	252.8595453	8.77	0.0001	28.82433419
LAT	-2.8802143	-5.31	0.0001	0.54194325
LONG	-1.3803345	-5.49	0.0001	0.25162394

جدول (١٠-١٤)

مخرجات SAS لمثال (١٠-٨)

خط العرض والارتفاع عن سطح البحر : متغيرات تفسيرية

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: TEMP

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	208.45604761	104.22802381	136.34	0.0001
Error	21	16.05353572	0.76445408		
Corrected Total	23	224.50958333			

R-Square	C.V.	Root MSE	TEMP Mean
0.928495	2.417226	0.87433065	36.17083333

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
LAT	1	76.65032249	76.65032249	100.27	0.0001
ELEV	1	131.80572512	131.80572512	172.42	0.0001

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
LAT	1	60.71812652	60.71812652	79.43	0.0001
ELEV	1	131.80572512	131.80572512	172.42	0.0001

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	132.1137062	12.58	0.0001	10.49873166
LAT	-2.4894338	-8.91	0.0001	0.27932969
ELEV	-0.0023118	-13.13	0.0001	0.00017606

تمارين

(١٠-٣١) إستخدم بيانات مثال الأيس كريم (والمذكور في الجزء (١٠-٣)) لتوفيق النموذج الخطى مستخدماً السعر (X_1) كمتغير مفسر. ارسم البواقى فى مقابل قيم درجة الحرارة. بناءً على النتائج التي توصلت إليها، هل هي نتائج غير متوقعة، إشرح.

(١٠-٣٢) بالإشارة إلى تمرين (٩-١٤)، (٩-٣٩) فى الفصل التاسع. هذه التمارين تشمل العلاقة بين نسبة الضرائب المدفوعة (Y) وإجمالى الدخل السنوى (X). معتمداً على إجابتك فى الجزء (جـ) من التمرين (٩-٣٩)، أضف إلى النموذج المفترض الحد الذي تعتقد أنه يجب إضافته، ووفق النموذج الجديد للبيانات، وقيم نتائج معادلة المربعات الصغرى.

(١٠-٣٣) شركة بناء كبيرة تريد دراسة العلاقة بين حجم العروض X (بالمليون دولار) وتكلفة أعداد عروض الشركة Y (بالألف دولار) للعروض الاثنتى عشر التالية والتي تمثل عينة :

Y	X	Y	X
20	3.37	20.5	2.43
28.2	3.75	16.1	1.61
47	10.89	67.6	11.4
15	1.5	40.4	6.4
25	4.76	29.9	6
52.5	8.4	33.1	7.31

أ - أنشئ شكل الإنتشار ووفق النموذج الملائم لهذه البيانات .

ب- قيم نتائج معادلة المربعات الصغرى وارسم البواقى فى مقابل قيم X .

ج- بناءً على النتائج التي يظهرها شكل البواقى . هل تُستخدم هذه المعادلة فى التقدير والتنبؤ؟ دعم إجابتك .

(١٠-٣٤) يوجد شك بأن الغياب بسبب مرض المديرين يمكن تقليله بواسطة إخضاعهم لبرنامج ممارسة التمارين الرياضة أو تقليل إستهلاك الكافيين . فى تجربة تشمل 20 مدير من الذين يشربوا القهوة ولا يمارسوا التمارين بإنتظام ، قام 10 مديرين بتقليل إستهلاك القهوة إلى أقل من فنجان واحد فى اليوم وقاموا بالاشتراك في ممارسة التمارين الرياضية ، 10 مديرين مازالوا على عاداتهم . وتم تحصيل أيام الغياب لجميع المديرين لأكثر من سنة . وكانت معادلة الانحدار المناسبة لتوفيق البيانات هي :

$$\hat{Y}= 2.1 - .66X_1 - 15.4X_2$$

حيث Y = عدد مرات الغياب ،

X_1 = متوسط إستهلاك القهوة فى اليوم (بالأوقية)

$X_2 = 1$ إذا كان المدير يمارس الرياضة ، وتساوى صفر إذا كان غير ذلك .

ويبدو أن النموذج تم توفيقه جيداً ، حيث: ($R_a^2= .85$) ، كما كانت (P-value=.001) للاختبار F للفرض العدمي ($H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$) . ومع ذلك يبدو أن إشارة b_1 خطأ والقيمة السالبة لـ b_1 تفيد بأن تناقص إستهلاك القهوة يزيد الغياب - بالإضافة لذلك ($b_2 = -15.4$) تدل على تقليل 15.4 يوم كنتيجة لممارسة الرياضة (التخفيض بهذه القيمة الكبيرة يبدو وغير واقعي) . اشرح هذه النتائج .

(١٠-٣٥) البيانات التالية تحتوى على درجة الحرارة Y (كيفية الشعور بالدفء) ، X_1 درجة حرارة الجو والرطوبة النسبية X_2 .

Y	66	72	77	67	73	78	68	74	79
X_1:°F	70	75	80	70	75	80	70	75	80
X_2 :%	20	20	20	30	30	30	40	40	40

أ - احسب معامل الإرتباط بين X_2 , X_1 . بناءً على هذه النتيجة ما مدى العلاقة الخطية بين X_2 , X_1 ؟

ب- وفق النموذج($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \varepsilon$) لبيانات العينة وقيم المعادلة . هل اكتشفت الازدواج الخطى بين X_1 , X_2 ؟ .

ج - وفق الخط المستقيم لبيانات العينة بإستخدام X_1 فقط ، ثم بإستخدام X_2 فقط ، ثم قارن بين معاملات المربعات الصغرى والتى حددتها فى هذا الجزء وبين التى حددتها فى (ب) ؟

د - بناءً على نتائج الجزء (أ) . هل اندهشت لما اكتشفته فى الأجزاء (ب) ، (ج) ؟ اشرح إجابتك .

(١٠-٣٦) اجريت تجربة لتحديد العلاقة بين متوسط درجات طلاب كلية ما ، (1) عدد ساعات الدراسة فى الأسبوع ، (2) عدد ساعات مشاهدة التليفزيون فى الأسبوع . وتم ملاحظة هذه المتغيرات خلال فصل دراسي لعينة مكونة من 50 طالبا . هل يمكنك توضيح الصعوبات التي يمكن أن تظهر لنتائج معادلة المربعات الصغرى؟ ما اقتراحاتك؟

(١٠-٣٧) اذا فرض وجود متغيرين تفسيريين فى معادلة إنحدار وكانت درجة الإرتباط بينها عالية، بأى طريقة يؤثر ذلك بالضرر على معادلة المربعات الصغرى؟

(١٠-٣٨) تحت أى ظرف يجب إزالة واحدة من المشاهدات من مجموعة بيانات العينة المستخدمة فى تحديد معادلة المربعات الصغرى؟

(١٠-٣٩) إذا كان المطلوب توفيق النموذج : ($Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \varepsilon$) للبيانات التالية :

Y	X_1	X_2	X_3	Y	X_1	X_2	X_3
17	.297	.310	.290	17	.099	.092	.074
17	.360	.390	.369	73	.420	.452	.425
35	.075	.058	.047	17	.189	.178	.153
69	.114	.100	.081	35	.369	.391	.364
69	.229	.213	.198	69	.142	.124	.105
173	.315	.304	.267	35	.094	.087	.072
173	.477	.518	.496	35	.171	.161	.145
17	.072	.063	.047	52	.378	.420	.380

أ - هل اكتشفت العلاقة بين Y والثلاث متغيرات المفسرة كمجموعة ؟ دعم إجابتك .

ب- هل اكتشفت أى ازدواج إرتباط خطى بين المتغيرات الثلاث المفسرة؟ دعم إجابتك .

ج- افترض أنك حذفت X_3 من النموذج . أعد توفيق البيانات وحدد ما إذا كان حذف X_3 حسن الموقف أم لا؟

(١٠-٨) معيار لإختبار أفضل مجموعة من المتغيرات التفسيرية :

Criteria for Selecting The Best Set of Predictor Variables

وكما سبق أن إقترحنا ، فإن مشكلة هامة تظهر فى تحليل الإنحدار وهى تحديد أي المتغيرات المفسرة فى القائمة الأصلية يجب أن تضم إلى نموذج الإنحدار . ونحن نعتقد أنه لكل محلل أو باحث وجهة نظر لشرح القائمة الرئيسية للمتغيرات التفسيرية التى يعتقد أنها تكون ذو أهمية لشرح

الإختلاف فى المتغير التابع . وما نحتاجه هو طريقة لتحديد المتغيرات التفسيرية من القائمة الأساسية لهذه المتغيرات التفسيرية والتى تظهر أفضل مجموعة لشرح معظم الإختلاف فى قيم Y . وكلمة أفضل (best) هنا تعنى أن نتائج معادلة المربعات الصغرى تزودنا بالدقة الكافية للتقدير والتنبؤ داخل نطاق المتغيرات التفسيرية وبدون أى إمكانية لظهور تناقضات .

عند تحديد أفضل معادلة مربعات صغرى ، فإن هناك معيارين شائعين من أهم المعايير المفيدة وهما تباين البواقى (وهذا بمعنى آخر مكافئ لقيمة R^2 المعدلة) ، والأخطاء المعيارية لمعاملات المربعات الصغرى . وربما تكون لاحظت أن هذان المعياران لهما دور كبير فى إرشادنا عند التحليل فى هذا الفصل .

١- تباين البواقى S_e^2 : وتباين البواقى هو نفسه متوسط مربعات الخطأ (MSE) . حيث أن (MSE) هو مجموع مربعات البواقى مقسوما على درجات الحرية للمجموع SSE . وتأخذ MSE في الحسبان عدد الحدود الموجودة فى النموذج من خلال درجات الحرية . بينما لا تزيد قيمة SSE إذا تم السماح لعدد إضافي من المتغيرات التفسيرية بالدخول للنموذج ، S_e^2 يمكن أن تزيد إذا كان الإنخفاض فى SSE صغير جداً ولا يحتمل فقدان درجات حرية إضافية . على سبيل المثال انظر للجداول (١٠-٥) ، (١٠-٦) والتى تكون معادلة المربعات الصغرى تحتوى على متغيرين تفسيريين ، انظر جدول (١٠-٦) وفيها يكون تباين البواقي (1.26) ، أصغر من نظيره في النموذج بالثلاث متغيرات (1.361) جدول (١٠-٥) . مع معيار تباين البواقى نحدد مجموعة المتغيرات التفسيرية التى تقلل إما S_e^2 أو تقللها إلى النقطة التى لا تستطيع إدخال متغيرات تفسيرية أخرى للنموذج لأنها ستكون غير نافعة .

فى الجزء (١٠-٣-٣) نتذكر أن قيمة R^2 المعدلة تأخذ في اعتبارها عدد الحدود فى النموذج . لهذا السبب يعتبر هذا المعيار مكافئ لتباين البواقى . وإستخدام قيمة R^2 المعدلة تحدد لنا مجموعة المتغيرات التفسيرية التى تعظم R_a^2 أو تقريباً تعظمها للنقطة التى تكون إضافة متغيرات تفسيرية أخرى بعدها غير مفيدة .

٢- الأخطاء المعيارية لمعاملات المربعات الصغرى: تعتبر دقة المعلمات أو المؤشرات المقدرة لنموذج الإنحدار المفترض واحدة من أهم الإعتبارات عن تحديد أفضل المتغيرات التفسيرية . وكلما صغرت الأخطاء المعيارية لمعاملات المربعات الصغرى ، كلما كانت الدقة أفضل ، وكلما كان استخدام المربعات الصغرى أفضل للتقدير والتنبؤ . وهذا يعنى أنه كلما صغرت قيمة الأخطاء المعيارية بالنسبة لمقدرات المربعات الصغرى المناظرة ، كلما كبرت قيمة T . وعندما تكون قيم T كبيرة تكون قيم P المقابلة صغيرة . وكنتيجة لهذا فإن الأثر الإضافى لكل متغير مفسر فى وجود المتغيرات المفسرة الأخرى فى المجموعة الأفضل يكون مفيداً تماماً فى شرح الإختلاف فى قيم Y .

إستخدام هذه المعايير ، يمكننا من إيجاد أفضل مجموعة متغيرات تفسيرية وذلك بتحديد وتقييم كل معادلات المربعات الصغرى الخطية المشتملة على القائمة الأساسية للمتغيرات التفسيرية . وإذا كان هناك متغيران تفسيريان فى القائمة الأساسية ، فان هذا يعنى أن إجمالى الثلاث معادلات : معادلتان تحتوى كل منهما على متغير واحد فقط ، ومعادلة تحتوى على المتغيران معاً . إذا كان هناك ثلاث متغيرات تفسيرية ، فإنه يجب أن يكون هناك سبعة معادلات مربعات صغرى: ثلاث معادلات تحتوى كل منهم على متغير واحد فقط وثلاثة تحتوى على متغيرين ومعادلة أخيرة تحتوى على الثلاث متغيرات معاً . بصفة عامة ، إذا احتوت القائمة الأساسية على K متغير مفسر ، فهناك $(2^k - 1)$

من المعادلات الخطية للمربعات الصغرى الممكنة. كل واحدة منها تحتوى على الأقل على متغير واحد مفسر .

أساليب إختيار المتغير Variable Selection Techniques

عندما تكون K كبيرة ($K \geq 5$) . فالتحديد والتقييم لكل معادلات الإنحدار الخطية ربما لا تكون عملية. ولمثل هذه الحالة، فإن أساليب إختيار المتغير المستخدمة يمكن أن تزودنا بمعلومات مفيدة بدون تقييم كل المعادلات الممكنة. وعلى العموم فإن هذه الأساليب لا تعتبر أساليب متساوية مع أساليب التقييم لكل المعادلات الممكنة معا والتي تستخدم المعايير السابقة. وأشهر أسلوب لاختيار المتغيرات هو الإنحدار المتدرج **stepwise regression** لتحديد أفضل مجموعة متغيرة مفسرة. وهناك نوعان أساسيان لهذا الأسلوب: الإختيار الأمامى **forward selection** والحذف الخلفى **backward eliminatin** .

أسلوب الإختيار الأمامى : (في حالة الانحدار المتدرج) Forward Selection

يبدأ أسلوب الإختيار الأمامى بمعادلة لا تحتوى على متغيرات مفسرة ($\hat{Y} = \bar{Y}$). المتغير المفسر الأول الداخل إلى النموذج هو الذى ينتج عنه أكبر تخفيض فى مجموع مربعات الأخطاء. وإذا اعتمد على قيمة P فإن هذا المتغير يكون مفيداً فى شرح الإختلاف فى قيم Y، وبالتالي يبقى في النموذج ويتم البحث عن متغير ثان. المتغير الثانى الذى يتم إدخاله للنموذج هو الذى ينتج عنه أكبر تخفيض فى مجموع مربعات الأخطاء فى وجود المتغير الأول. إذا كان الأثر الإضافى للمتغير الثانى مفيداً حقاً وذلك عن طريق معرفة قيمة P ، فإن المتغير الثانى يبقى بالنموذج ونبحث عن متغير مفسر ثالث. وتستمر العملية بهذا الأسلوب حتى يكون الأثر المضاف للمتغير المفسر الأخير المدخل للنموذج غير مفيد .

وأسلوب الإختيار الأمامى تم تعديله بحيث أن إمكانية إلغاء متغير أخذت في الاعتبار كل مرحلة. هذا التعديل ينتج ما هو معروف فى الحزم الإحصائية بأسلوب الإنحدار المتدرج (**stepwise regression**) . مع هذه الطريقة فإن المتغير المفسر والذي تم إدخاله في مرحلة مبكرة، يمكن حذفه في مرحلة لاحقة. ويكون القرار معتمداً على مدى التخفيض في مجموع مربعات الأخطاء، ويكون معتمدا أيضاً على مزيج خاص من المتغيرات فى نموذج الإنحدار .

أسلوب الحذف الخلفى : (في الانحدار المتدرج) Backward Elimination

عملية الحذف الخلفى تبدأ بنموذج الإنحدار الذى يحتوى على كل المتغيرات التفسيرية فى القائمة الأساسية، ثم يتم حذف المتغيرات الأقل أهمية متغير بعد الآخر، وتحدد هذه الأهمية بمدى مساهمتها فى تخفيض مجموع مربعات الخطأ (أى نحذف المتغيرات الأقل تأثير فى تخفيض مجموع مربعات الأخطاء). على سبيل المثال، المتغير المحذوف الأول يكون المتغير الذى ينتج عنه إنخفاض صغير فى مجموع مربعات الأخطاء فى وجود المتغيرات الأخرى. وتنتهى العملية عندما يكون الأثر الإضافى لكل المتغيرات الباقية مفيداً اعتماداً على قيم P-value المناسبة .

وتزودنا العديد من الحزم الإحصائية مثل Minitab , SAS بهذه الأساليب لإختيار المتغيرات (سواء الاختيار الأمامي، الاختيار الامامي المعدل أو الحذف الخلفي). ويجب أن نلاحظ أن أى إجراء منهم لا يجب إعتباره كبديل لتقييم النموذج. وعموماً فإن العديد من أوجه التقييم والتى تتضمن تحليل البواقى وتناقضات أو عيوب النموذج يظل مسئولية المستخدم وليس على برنامج الحاسب .

مثال (١٠-٩)

بالإشارة إلى مثال الأيس كريم إفترض أن قائمة المتغيرات التفسيرية الأساسية تحتوى على السعر، ودرجة الحرارة ونوعية اليوم والرطوبة النسبية. إستخدم أسلوب الاختيار الأمامي المعدل والحذف الخلفى لتحديد أفضل مجموعة للمتغيرات التفسيرية.

الحل

يوضح جدول (١٠-١٥) وجدول (١٠-١٦) نتائج أو مخرجات البرنامج الإحصائي SAS لعمليات التعديل الأمامية والحذف الخلفى. لاحظ أن كلا الإجرائين يصلا إلى نفس الإستنتاج. وأفضل مجموعة متغيرات مفسرة للعينة المعطاة هى السعر ودرجة الحرارة ونوعية اليوم، لهذا فإنه كما سبق القول فى الجزء (١٠-٥) أن معادلة المربعات الصغرى : ($\hat{Y}= 15.3094 - 1.1012X_1 + 5.039\ X_2 + 20.2452X_3$) تمكننا من التقدير والتنبؤ بدقة كافية.

ومن الجداول (١٠-١٥)،(١٠-١٦) لاحظ العمود المعنون (Type II SS) ، المقادير فى هذا العمود هى مجموع المربعات الناشئة عن مبدأ مجموع المربعات الإضافية. كل كمية تمثل المقدار الذى يمكن أن يزداد بها مجموع مربعات الخطأ، إذا تم حذف المتغير المفسر (رأس الصف) من نموذج الإنحدار. هذا يعنى أنه كلما إرتفعت القيمة فى هذا العمود، كلما صغرت قيمة P ، كلما زادت الأهمية للأثر الإضافى للمتغير المفسر المقابل.

بالإضافة إلى ذلك، شاهد القيمة المعروفة على أنها C (P) . هذه القيمة لإحصاء يسمى الإحصاء C_p، (C_p Statistic). والإحصاء C_p هو معيار آخر لتحديد مدى جودة معادلة المربعات الصغرى فيما يتعلق بالتقدير والتنبؤ. وعلى الرغم أن المناقشة المستفيضة لهذا الإحصاء C_p هي خارج نطاق هذا الكتاب، لكن من الممكن القول بأن معادلة المربعات الصغرى والتي لها قيمة C_p قريبة من عدد المعاملات فى النموذج، شاملة الجزء المتطوع، تكون مرغوبة في التقدير والتنبؤ. من جدول (١٠-١٥)، (١٠-١٦) لاحظ أن ($C_p = 4.19$) لأفضل معادلة مربعات صغرى. وتقرب هذه القيمة من الرقم 4 وهو عدد حدود النموذج بالإضافة إلى الجزء المقطوع من المحور الرأسى.

جدول (١٠-١٥)

مخرجات SAS لمثال الأيس كريم باستخدام أسلوب الاختيار الأمامي المعدل

Stepwise Procedure for Dependent variable Sales

```
Step 1   Variable TEMP Entered      R-square = 0.77326744   C(p) = 66.93862745

                            DF        Sum of Squares     Mean Square          F    Prob>F

          Regression         1        12186.77219117   12186.77219117     27.28    0.0008
          Error              8         3573.32780883     446.66597610
          Total              9        15760.10000000

                       Parameter          Standard          Type II
          Variable      Estimate             Error   Sum of Squares          F    Prob>F

          INTERCEP   -10.80516477      81.08638826       7.93139807       0.02    0.8973
          TEMP         4.84621314       0.92778982   12186.77219117      27.28    0.0008

Bounds on condition number:          1,             1
------------------------------------------------------------------------------------------

Step 2   Variable PRICE Entered     R-square = 0.92346761   C(p) = 20.62005248

                            DF        Sum of Squares     Mean Square          F    Prob>F

          Regression         2        14553.94187442    7276.97093721     42.23    0.0001
          Error              7         1206.15812558     172.30830365
          Total              9        15760.10000000
```

تابع : جدول (١٠-١٥)

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	25.87773161	51.32600406	43.80096790	0.25	0.6296
PRICE	-1.34175131	0.36200155	2367.16968325	13.74	0.0076
TEMP	5.19529086	0.58389598	13641.27520776	79.17	0.0001

Bounds on condition number: 1.026712, 4.106846

Step 3 Variable DAY Entered R-square = 0.98076664 C(p) = 4.18726737

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	3	15456.98030414	5152.32676805	101.99	0.0001
Error	6	303.11969586	50.51994931		
Total	9	15760.10000000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	15.30937021	27.90393324	15.20711073	0.30	0.6030
PRICE	-1.10118194	0.20410657	1470.50695790	29.11	0.0017
TEMP	5.03906542	0.31831702	12660.27582653	250.60	0.0001
DAY	20.24521411	4.78851344	903.03842972	17.87	0.0055

Bounds on condition number: 1.11323, 9.729814

All variables left in the model are significant at the 0.1500 level.
No other variable met the 0.1500 significance level for entry into the model.

Summary of Stepwise Procedure for Dependent Variable SALES

Step	Variable Entered	Variable Removed	Number In	Partial R**2	Model R**2	C(p)	F	Prob>F
1	TEMP		1	0.7733	0.7733	66.9386	27.2839	0.0008
2	PRICE		2	0.1502	0.9235	20.6201	13.7380	0.0076
3	DAY		3	0.0573	0.9808	4.1873	17.8749	0.0055

جدول (١٠-١٦)

مخرجات SAS لمثال الأيس كريم باستخدام أسلوب الحذف الخلفي

Backward Elimination procedure for dependent variable SALES

Step 0 All Variables Entered R-square = 0.98445731 C(p) = 5.00000000

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	4	15515.14558190	3878.78639547	79.17	0.0001
Error	5	244.95441810	48.99088362		
Total	9	15760.10000000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	-112.82158874	120.76038653	42.76128091	0.87	0.3931
PRICE	-1.15426971	0.20681485	1526.04177981	31.15	0.0025
TEMP	7.85847018	2.60643466	445.34605432	9.09	0.0296
DAY	18.92077590	4.86963138	739.60694740	15.10	0.0116
HUMID	-1.46141210	1.34121509	58.16527776	1.19	0.3256

Bounds on condition number: 71.95518, 581.2342

Step 1 Variable HUMID Removed R-square = 0.98076664 C(p) = 4.18726737

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	3	15456.98030414	5152.32676805	101.99	0.0001
Error	6	303.11969586	50.51994931		
Total	9	15760.10000000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	15.30937021	27.90393324	15.20711073	0.30	0.6030
PRICE	-1.10118194	0.20410657	1470.50695790	29.11	0.0017
TEMP	5.03906542	0.31831702	12660.27582653	250.60	0.0001
DAY	20.24521411	4.78851344	903.03842972	17.87	0.0055

Bounds on condition number: 1.11323, 9.729814

تابع : جدول (١٠-١٦)

All variables left in the model are significant at the 0.1000 level.

Summary of Backward Elimination Procedure for Dependent Variable SALES

Step	Variable Removed	Number In	Partial R**2	Model R**2	C(p)	F	Prob>F
1	HUMID	3	0.0037	0.9808	4.1873	1.1873	0.3256

تمارين

(١٠-٤٠) ناقش أهم معيارين لتحديد أى المتغيرت التفسيرية فى مجموعة يجب أن تتضمنها معادلة الإنحدار.

(١٠-٤١) ناقش ما إذا كانت معادلة المربعات الصغرى الناتجة بإستخدام إسلوب إختيار المتغيرات تعتبر أفضل معادلة إنحدار تستخدم فى التقدير أو التنبؤ ؟

(١٠-٤٢) بالإشارة إلى تمرين (١٠-٣٩) إستخدم طريقة الحذف الخلفى والأمامى المعدل لإختيار المتغيرات لتحديد أفضل مجموعة متغيرات مفسرة تستخدم فى معادلة الإنحدار. فسر ما تجده؟

(١٠-٤٣) بالإشارة إلى مثال (١٠-٨) فى الجزء (١٠-٧) . بين ما إذا كانت طريقة الاختيار الأمامى المعدل والحذف الخلفى لإختيار المتغيرات المفسرة، تؤدي إلى أن أفضل معادلة انحدار تحتوى فقط على latitude وكذلك elevation، (خط العرض والارتفاع عن سطح البحر).

(١٠-٩) الإنحدار الخطى المتعدد : مثال شامل :

Multiple Linear Regression: A Comprehensive Example

من القضايا التى فحصت فى هذا الفصل، هناك عدد من الخطوات الضرورية التى يجب إتباعها عند تحسين نموذج الإنحدار الخطى المتعدد. هذه الخطوات هى :

خطوات تحسين نموذج الإنحدار

١-تحديد قائمة المتغيرات المفسرة الأساسية الواجب إعتبارها لتضمينها النموذج .

٢- الحصول على بيانات عينة وتقرير ما إذا كانت البيانات ممثلة للبيئة محل الدراسة .

٣-مبدئياً على الأقل، نفرض أن هناك علاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة والممثلة بواسطة نموذج الإنحدار الخطى المعطي فى المعادلة (10.1) .

٤- توفيق هذا النموذج لبيانات العينة وتقييم معاملات المربعات الصغرى، وهل إشاراتها تتوافق مع العلاقات التى لها معنى؟

٥-تقييم معادلة المربعات الصغرى، ويجب أن يتضمن التقييم الحد الأدنى من تناقضات النموذج (تحليل البواقى) والمشاكل (الإرتباط أو الأزدواج الخطى) وتحديد أفضل مجموعة من المتغيرات المفسرة. وبالتالى تحسين النموذج كنتيجة من نتائج التقييم .

لتوضيح هذه الخطوات نعتبر المثال التالى : مدير شركة مرافق عامة يريد تقديم نموذج للعوامل التى تؤثر على إستخدام الكهرباء فى المنازل السكنية أثناء موسم إستخدام التدفئة (من نوفمبر إلى أبريل لمنطقة جغرافية معينة) .

قائمة المتغيرات المفسرة الممكنة :

يرى المدير أن كميات الكهرباء المستخدمة لهذه المنازل تعتمد على : (1) حجم المساحة التى يتم تدفئتها، (2) كيف يتم عزل حوائط المنازل فى تلك المنطقة، (3) نوعية نظام التدفئة فى المنازل ، (4) برودة الطقس، (5) متوسط الدرجة التى تظهر على مقياس الحرارة (ترموستات) thermostut . ولقد قام المدير بتعريف المتغيرات التالية : Y = عدد الكيلو وات ساعة / شهر ، X_1 = مربع المساحة التى يتم تدفئتها، X_2 = قيمة R التى توضح قوة مواد العزل ، X_3 = 1 إذا كان المنزل يتوافر فيه نوافذ معزولة، 0 إذا لم تكن كذلك، X_4 = متوسط درجة الحرارة، X_5 = 1 إذا تم إستخدام آلة لتوليد درجة الحرارة، 0 إستخدام قوة التيار الكهربائى، X_6 = متوسط عدد الساعات المشمسة فى اليوم . ويستطيع المدير الحصول على هذه البيانات جميعها ما عدا درجات الحرارة التى توجد على الترموستات .

الحصول على بيانات العينة :

يختار المدير عينة ممثلة من 25 فاتورة عميل شهرية مأخوذة من عدة مواسم تدفئة حديثة. يحصل المدير على بيانات المتغيرات من X_1 حتى X_6 من الفاتورة المختارة. ومن سجلات الشركة وبواسطة إجراء إستطلاع للمنازل المختارة ومن معلومات خدمات الطقس القومية تكون البيانات للعينة كما يلى:

Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
2.405	1.400	0	0	40	0	11.0
1.064	1.650	11	1	41	1	11.3
2.203	1.680	19	0	41	0	10.9
2.535	1.820	14	0	36	1	10.5
1.801	1.750	0	0	43	1	11.7
1.068	1.900	30	1	38	1	11.0
2.972	1.880	11	0	38	1	10.8
1.545	1.600	0	1	40	1	10.9
2.141	2.000	25	0	42	0	10.8
1.670	1.850	11	0	43	0	11.2
1.236	2.050	19	1	48	0	11.7
1.912	2.080	14	0	47	0	11.5
1.825	2.140	25	1	39	0	10.7
1.988	2.150	0	0	50	0	12.0
788	2.200	22	0	45	1	11.4
400	2.310	11	0	33	0	9.7
2.072	2.420	19	1	45	0	11.6
2.644	2.480	11	0	38	0	10.4
2.786	2.130	19	1	34	0	9.8
2.704	2.500	24	0	34	1	9.7
3.073	2.300	19	0	33	0	10.2
2.263	2.750	19	1	36	1	9.9
4.075	3.000	11	0	32	0	9.7
1.665	3.100	24	0	41	1	11.1
3.480	3.400	11	1	38	0	10.5

Y = عدد الكيلو وات ساعة/شهر

X_1 = مربع المساحة المراد تدفئتها

X_2 = قيمة R التي توضح قوة مواد العزل

X_3 = وجود/أو عدم وجود نوافذ العزل

X_4 = متوسط درجة الحرارة

X_5 = استخدام آلة توليد/قوة تيار كهربائي

X_6 = متوسط الساعات المشمسة في اليوم

إستخدام نموذج الإنحدار الخطى المتعدد :

مبدئياً يفترض المدير النموذج التالى :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \varepsilon$$

يمثل العلاقة السليمة بين المتغير التابع Y والمتغيرات المفسرة من $X_1 \leftarrow X_6$

توفيق النموذج لبيانات العينة وتقييم معاملات المربعات الصغرى :

يوضح جدول (١٠-١٧) نتائج البرنامج SAS ومن هذه المخرجات أو النتائج تكون معادلة المربعات الصغرى :

$$\hat{Y} = 2268.7 + .6372X_1 - 21.898X_2 - 192.889X_3 - 111.5655X_4 - 437.0679X_5 + 318.6621X_6$$

وإشارات معاملات المربعات الصغرى للمتغيرات X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 تتفق مع توقعات المدير. بمعنى أن المدير يتوقع علاقة موجبة بين X_1 , Y وسالبة بين Y , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 . والإشارة الموجبة لمعامل X_6 غير متوقعة. وهذا يدل على وجود نتيجة غير حقيقية أو غير منطقية وهى زيادة إستهلاك الكهرباء المستعملة فى التدفئة إذا زاد متوسط عدد الساعات المشمسة مع بقاء باقى المتغيرات الأخرى ثابتة .

جدول (١٠-١٧)

مخرجات SAS المبدئية للمثال الشامل

General Linear Models Procedure

Dependent Variable: Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	6	7241298.64550659	1206883.10758443	2.15	0.0976
Error	18	10113935.35449340	561885.29747186		
Corrected Total	24	17355234.00000000			

	R-Square	C.V.	Root MSE	Y Mean
	0.417240	35.82099	749.59008630	2092.60000000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
X1	1	2843552.22280672	2843552.22280672	5.06	0.0372
X2	1	907324.24266437	907324.24266437	1.61	0.2200
X3	1	328823.31140619	328823.31140619	0.59	0.4542
X4	1	2209824.99016773	2209824.99016773	3.93	0.0628
X5	1	847688.07049603	847688.07049603	1.51	0.2352
X6	1	104085.80796555	104085.80796555	0.19	0.6720

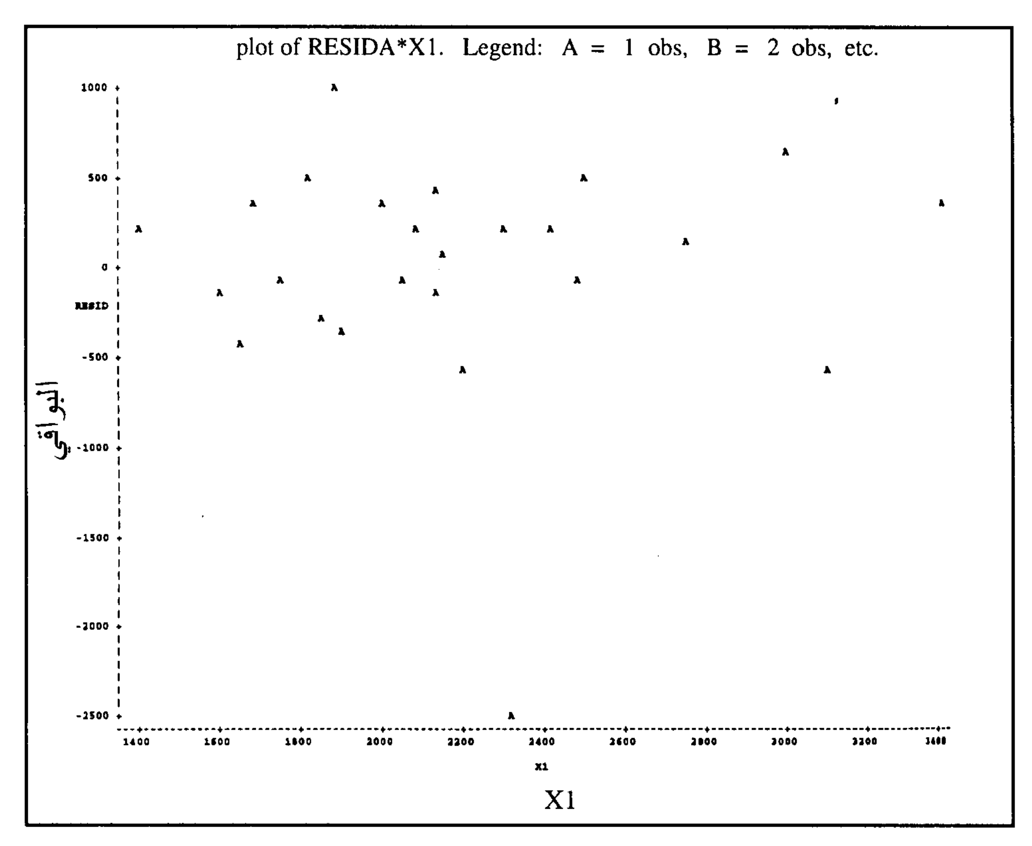
Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
X1	1	1762790.89204180	1762790.89204180	3.14	0.0935
X2	1	707676.33222952	707676.33222952	1.26	0.2765
X3	1	203002.51041771	203002.51041771	0.36	0.5553
X4	1	695187.69761528	695187.69761528	1.24	0.2806
X5	1	950735.59502893	950735.59502893	1.69	0.2097
X6	1	104085.80796555	104085.80796555	0.19	0.6720

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	2268.695657	0.47	0.6412	4786.265029
X1	0.637212	1.77	0.0935	0.359756
X2	-21.897991	-1.12	0.2765	19.512404
X3	-192.889342	-0.60	0.5553	320.908604
X4	-111.565499	-1.11	0.2806	100.300410
X5	-437.067909	-1.30	0.2097	336.002785
X6	318.662114	0.43	0.6720	740.386528

تقييم معادلة المربعات الصغرى

من المعلومات الموضحة فى جدول (١٠-١٧) . تكون معادلة المربعات الصغرى غير مؤثرة. قيمة P للفرض العدمى $(H_0: \beta_0 = \beta_1 ... = \beta_6 = 0)$ هى 0976. والتى تشير إلى أن الدليل مقابل الفرض العدمي هذا غير ملائم أو غير مقنع. بالطبع هذا يعنى أنه لا يوجد أى من المتغيرات المفسرة الستة يساعد فى شرح الإختلاف فى قيم Y . ونصل إلى نفس الإستنتاج بواسطة فحص قيم P المناظرة للإحصاء T أو الإحصاء F الهامشى (Type III SS) . فى الحقيقة المتغير المفسر الوحيد التى يبدو مساعداً وهو X_1 عندما يكون بمفرده فى النموذج (P-value = .0372) .

ولإكتشاف ما هو الخطأ، يرسم المدير البواقى فى مقابل كل متغير مفسر ويكتشف أن بيانات العينة تحتوى على مشاهدات غير مألوفة. والمشاهدات غير المعتادة أو غير المألوفة هذه تكون واضحة عند فحص الشكل البيانى للبواقى مع X_1 (مربع مساحة المكان المراد تدفئته) ، وتتضح في شكل (١٠-٨)، ونجد ذلك فى أسفل الشكل. وتظهر بيانات العينة أن منزلاً واحداً يستخدم فقط 40 كيلووات فى الساعة من الكهرباء. وجد المدير أن العائلة بعيدة عن المنزل لمدة الشهر بأكمله. ولأن المدير يعتقد أن هذه المشاهدات لا تمثل بيئة الدراسة فيستبعدها المدير ويتم توفيق النموذج على أن (n = 24) مشاهمة. وتكون مخرجات SAS الجديدة كما هو موضح(١٠-١٨).



شكل (١٠-٨)

البواقي (مبدائياً) مقابل X_1 في المثال الشامل

جدول (١٠-١٨)
مخرجات SAS المنقحة للمثال الشامل
General Linear Models Procedure

Dependent Variable: Y

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	6	12226767.88076240	2037794.64679375	16.16	0.0001
Error	17	2144200.74423751	126129.45554338		
Corrected Total	23	14370968.62500000			

R-Square	C.V.	Root MSE	Y Mean
0.850796	16.41824	355.14709001	2163.12500000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
X1	1	3180503.76444430	3180503.76444430	25.22	0.0001
X2	1	1355656.00475436	1355656.00475436	10.75	0.0044
X3	1	727758.15719231	727758.15719231	5.77	0.0280
X4	1	4814280.29319091	4814280.29319091	38.17	0.0001
X5	1	2126706.26423271	2126706.26423271	16.86	0.0007
X6	1	21863.39694791	21863.39694791	0.17	0.6824

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
X1	1	1247739.29877925	1247739.29877925	9.89	0.0059
X2	1	1476207.38278585	1476207.38278585	11.70	0.0033
X3	1	566435.02679629	566435.02679629	4.49	0.0491
X4	1	506795.34905793	506795.34905793	4.02	0.0612
X5	1	1758155.66446358	1758155.66446358	13.94	0.0017
X6	1	21863.39694791	21863.39694791	0.17	0.6824

Parameter	Estimate	T for H0: Parameter=0	Pr > |T|	Std Error of Estimate
INTERCEPT	7268.399177	3.09	0.0067	2353.287660
X1	0.537548	3.15	0.0059	0.170909
X2	-31.919953	-3.42	0.0033	9.330326
X3	-324.098428	-2.12	0.0491	152.936144
X4	-95.344409	-2.00	0.0612	47.564965
X5	-599.216956	-3.73	0.0017	160.495808
X6	-148.079139	-0.42	0.6824	355.666795

والآن ، يبدو أن معادلة المربعات الصغرى مشجعة ومبشرة. فالإشارات لمعاملات الانحدار كما هى متوقعة. وإختبار الفرض $(H_0: \beta_1 = \beta_2 = ... \beta_6 = 0)$ يتضح تناقضه (P-value = .0001) . وتكون الآثار المضافة للمتغيرات X_5 , X_2 , X_1 فى وجود كل المتغيرات التفسيرية الأخرى مفيدة فى شرح الإختلاف فى قيمة Y (وتكون قيمة P لكل من T ، F الهامشية هى .0059 , .0033 , .0017 على التوالى) ، الأثر الإضافى للمتغير X_6 فى وجود كل المتغيرات يمكن إهماله ، (P-value = .6824) . والمتغيران X_4 , X_3 يكونا فى المنطقة الرمادية وتكون قيمة P-value عبارة عن .0491 ، .06126 على التوالي. وربما يوجد هناك بعض الأزدواج الخطى يشمل X_4 حيث أن التأثير الإضافى للمتغير X_4 فى وجود X_3 , X_2 , X_1 يكون مفيداً للغاية حيث أن (P-value = .0001) . ولكن تأثير X_4 في وجود كل المتغيرات التفسيرية يكون غير مقنع (P-value=.0612) . ويعتقد المدير أن إختيار المتغير ربما يساعد فى حل الموقف الخاص بالمتغيرات X_6 , X_4 , X_3 فيقرر المدير إستخدام الحذف الخلفى ويوضح جدول (١٠-١٩) مخرجات البرنامج SAS . من معلومات هذا الجدول لاحظ أن التحسين قد حدث. والمتغير X_6 تم حذفه من النموذج. الأخطاء المعيارية لمعاملات المربعات الصغرى أصغر من ذى قبل، تباين البواقى انخفض $(S_e^2 = 120,336.9)$ عن القيمة السابقة: $S_e^2 = 126129.46$. الأثر الإضافي للمتغير X_4 فى وجود كل المتغيرات الأخرى مفيد تماماً. ويظهر بعض الإرتباط الخطى بين X_6 , X_4 ، لهذا فإن ظهور X_6 فى النموذج يزيل الأثر الإضافى للمتغير X_4 . والآن بما أنه تم حذف X_6 ، فقد وضحت أهمية X_4 . إن الأزدواج الخطى بين X_4 ، X_6 يمكن أيضاً أن يشاهد بواسطة عملية الإختيار الأمامى المعدلة المعطاة فى جدول (١٠-٢٠) . لاحظ أنه بإستخدام هذا الأسلوب ، فإن

X_6 هو أول متغير يدخل فى معادلة الإنحدار ، لكنه يحذف فوراً عند دخول X_4 للمعادلة. على الرغم من عدم ظهور الرسم البيانى للبواقى مع المتغيرات التفسيرية ، من X_1 إلى X_5 لأنها لاتكشف عن أية عيوب وتكون معادلة الإنحدار النهائية كما يلى :

$$\hat{Y} = 6356.174 + .5604X_1 - 31.2077X_2 - 327.503X_3 - 113.8952X_4 - 621.4582X_5$$

جدول (١٠-١٩)

مخرجات SAS للمثال الشامل بطريقة الحذف الخلفي

Backward Elimination Procedure for Dependent Variable Y

Step 0 All Variables Entered R-square = 0.85079637 C(p) = 7.00000000

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	6	12226767.880762	2037794.6467937	16.16	0.0001
Error	17	2144200.7442375	126129.45554338		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	7268.39917674	2353.28766000	1203217.1876926	9.54	0.0067
X1	0.53754815	0.17090852	1247739.2987793	9.89	0.0059
X2	-31.91995251	9.33032584	1476207.3827858	11.70	0.0033
X3	-324.09842825	152.93614357	566435.02679629	4.49	0.0491
X4	-95.34440947	47.56496521	506795.34905793	4.02	0.0612
X5	-599.21695561	160.49580751	1758155.6644636	13.94	0.0017
X6	-148.07913902	355.66679485	21863.39694791	0.17	0.6824

Bounds on condition number: 10.06899, 145.1055

Step 1 Variable X6 Removed R-square = 0.84927501 C(p) = 5.17334093

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	5	12204904.483815	2440980.8967629	20.28	0.0001
Error	18	2166064.1411854	120336.89673252		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	6356.17398265	838.70144171	6911552.0204922	57.44	0.0001
X1	0.56037727	0.15811300	1511557.4703703	12.56	0.0023
X2	-31.20767520	8.95904711	1460151.7793736	12.13	0.0027
X3	-327.50300255	149.16934379	580056.39758100	4.82	0.0415
X4	-113.89524228	16.26040224	5904014.3421837	49.06	0.0001
X5	-621.45823581	147.82830473	2126706.2642327	17.67	0.0005

Bounds on condition number: 1.190054, 27.9493

All variables left in the model are significant at the 0.1000 level.

Summary of Backward Elimination Procedure for Dependent Variable Y

Step	Variable Removed	Number In	Partial R**2	Model R**2	C(p)	F	Prob>F
1	X6	5	0.0015	0.8493	5.1733	0.1733	0.6824

جدول (١٠-٢٠)

مخرجات SAS : الانحدار المتدرج للمثال الشامل

Stepwise Procedure for Dependent Variable Y

Step 1 Variable X6 Entered R-square = 0.46500207 C(p) = 40.95672402

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	1	6682530.2130470	6682530.2130470	19.12	0.0002
Error	22	7688438.4119530	349474.47327059		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	11011.74505084	2027.13955118	10312416.862195	29.51	0.0001
X6	-815.85432662	186.57346835	6682530.2130470	19.12	0.0002

تابع : جدول (١٠-٢٠)

Bounds on condition number: 1, 1

Step 2 Variable X5 Entered R-square = 0.59936476 C(p) = 27.64767530

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	2	8613452.1921840	4306726.0960920	15.71	0.0001
Error	21	5757516.4328160	274167.44918171		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	11349.95309408	1800.01070306	10900686.507193	39.76	0.0001
X5	-575.46238274	216.84155965	1930921.9791370	7.04	0.0149
X6	-824.92989024	165.28866608	6829105.4957554	24.91	0.0001

Bounds on condition number: 1.000428, 4.001713

Step 3 Variable X2 Entered R-square = 0.71543302 C(p) = 16.42306147

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	3	10281465.534196	3427155.1780655	16.76	0.0001
Error	20	4089503.0908036	204475.15454018		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	13092.09145440	1669.87654601	12568685.985735	61.47	0.0001
X2	-32.36554326	11.33191775	1668013.3420124	8.16	0.0098
X5	-546.27893444	187.54279075	1734877.0571193	8.48	0.0086
X6	-942.16496764	148.52760338	8227731.3376228	40.24	0.0001

Bounds on condition number: 1.086352, 9.518733

Step 4 Variable X1 Entered R-square = 0.77915256 C(p) = 11.16296945

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	4	11197176.987919	2799294.2469798	16.76	0.0001
Error	19	3173791.6370808	167041.66510951		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	10907.96262573	1774.31772477	6313196.5562753	37.79	0.0001
X1	0.44928090	0.19188942	915711.45372280	5.48	0.0303
X2	-37.61269324	10.48456915	2149772.4741806	12.87	0.0020
X5	-490.70026816	171.16294115	1372896.8865486	8.22	0.0099
X6	-825.85362012	143.14195988	5560284.9134963	33.29	0.0001

Bounds on condition number: 1.262722, 18.62257

Step 5 Variable X3 Entered R-square = 0.81553115 C(p) = 9.01805706

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	5	11719972.531705	2343994.5063409	15.92	0.0001
Error	18	2650996.0932954	147277.56073864		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	10831.35915199	1666.54315151	6221131.3280929	42.24	0.0001
X1	0.46372804	0.18034323	973786.13561346	6.61	0.0192
X2	-34.31277902	9.99937887	1734212.5380407	11.78	0.0030
X3	-311.08282670	165.11190545	522795.54378534	3.55	0.0758
X5	-478.88165385	160.84078029	1305571.4326521	8.86	0.0081
X6	-815.92623151	134.51053808	5419082.3900737	36.80	0.0001

Bounds on condition number: 1.265009, 28.69316

تابع : جدول (١٠-٢٠)

Step 6 Variable X4 Entered R-square = 0.85079637 C(p) = 7.00000000

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	6	12226767.880762	2037794.6467937	16.16	0.0001
Error	17	2144200.7442375	126129.45554338		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	7268.39917674	2353.28766000	1203217.1876926	9.54	0.0067
X1	0.53754815	0.17090852	1247739.2987792	9.89	0.0059
X2	-31.91995251	9.33032584	1476207.3827858	11.70	0.0033
X3	-324.09842825	152.93614357	566435.02679629	4.49	0.0491
X4	-95.34440947	47.56496521	506795.34905792	4.02	0.0612
X5	-599.21695561	160.49580751	1758155.6644636	13.94	0.0017
X6	-148.07913902	355.66679485	21863.39694791	0.17	0.6824

Bounds on condition number: 10.06899, 145.1055

Step 7 Variable X6 Removed R-square = 0.84927501 C(p) = 5.17334093

	DF	Sum of Squares	Mean Square	F	Prob>F
Regression	5	12204904.483815	2440980.8967629	20.28	0.0001
Error	18	2166064.1411854	120336.89673252		
Total	23	14370968.625000			

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Type II Sum of Squares	F	Prob>F
INTERCEP	6356.17398265	838.70144171	6911552.0204922	57.44	0.0001
X1	0.56037727	0.15811300	1511557.4703703	12.56	0.0023
X2	-31.20767520	8.95904711	1460151.7793736	12.13	0.0027
X3	-327.50300255	149.16934379	580056.39758100	4.82	0.0415
X4	-113.89524228	16.26040224	5904014.3421837	49.06	0.0001
X5	-621.45823581	147.82830473	2126706.2642327	17.67	0.0005

Bounds on condition number: 1.190054, 27.9493

All variables left in the model are significant at the 0.1500 level.
No other variable met the 0.1500 significance level for entry into the model.

Summary of Stepwise Procedure for Dependent Variable Y

Step	Variable Entered	Variable Removed	Number In	Partial R**2	Model R**2	C(p)	F	Prob>F
1	X6		1	0.4650	0.4650	40.9567	19.1217	0.0002
2	X5		2	0.1344	0.5994	27.6477	7.0429	0.0149
3	X2		3	0.1161	0.7154	16.4231	8.1575	0.0098
4	X1		4	0.0637	0.7792	11.1630	5.4819	0.0303
5	X3		5	0.0364	0.8155	9.0181	3.5497	0.0758
6	X4		6	0.0353	0.8508	7.0000	4.0181	0.0612
7		X6	5	0.0015	0.8493	5.1733	0.1733	0.6824

- الملخص (١٠-١٠) Summary

فى هذا الفصل تم التوسع فى الطرق الإحصائية والتى سبق ذكرها فى الفصل التاسع بإستخدام أكثر من متغير واحد فى نموذج الإنحدار .

فى نموذج الإنحدار الخطى المتعدد، يمكن أن يتضمن النموذج متغيرات تفسيرية تكون وصفية أو تكون فى شكل علاقة غير خطية . ويكون مفتاح الأسئلة والتى تحتاج إلى إجابة هى نفس الأسئلة المطلوب الإجابة عنها فى الفصل التاسع . مع ذلك، فإن وجود العديد من المتغيرات التفسيرية فى النموذج يمكن أن يعقد من الإستنتاجات الإحصائية إلى حد ما، وهذا إلى حد كبير يسبب الإرتباط بين المتغيرات التفسيرية . والإرتباط بين متغيرين أو مجموعة من المتغيرات يسمى الإرتباط الخطى بين المتغيرات التفسيرية . والتحليل الإنحدارى المتعدد، يتعرض لإنتقاضات كبيرة للنموذج مثل الازدواج الخطى وإنشاء معيار لاختيار أفضل مجموعة متغيرات مفسرة لإستخدامها فى نموذج الإنحدار .

المراجع References

1. N. Draper and H. Smith. *Applied Regression Analysis,* 2nd ed. NeW York: Wiley, 1981.
2. W. Mendenhall and T. Sincich. *A Second Course in Business Statistics: Regression analysis*, 4th ed. San Francisco: Dellen, 1993.
3. R. B. Miller and D. W. Wichern. *Intermediate Business Statistics: Analysis of Variance, Regression, and Time Series.* New York: Holt, Rinehart, and Winstion, 1977.
4. J. Neter, W. Wasserman, and M. Kutner. *Applied Linear Statistical Models,* 2nd ed. Homewood, IL: Richard D. Irwin, 1985.
5. M. Younger. *A Handbook for Linear Regression,* nd ed. Boston: Duxbury Press, 1985.

تمارين إضافية

(١٠-٤٤) مدير أفراد يريد تكوين نموذج للمتغير (Y) والذي يعبر عن الرضاء عن وظيفة المدير وتأخذ الأرقام (من 1 : 10) كدالة فى , (X_1) العمر (X_2) معدل الأداء (من 1 إلى 5) ، (X_3) تمثل المرتب (بالألف دولار فى الشهر) ، (X_4) الوقت الذى تستغرقه الوظيفة (بالسنوات) . وكانت معادلة الإنحدار المعدلة كما يلى :

$$\hat{Y} = 3 + .05X_1 + 1.1X_2 - 6X_3 + .11X_4$$

أ - ما هى درجة الرضاء المتنبأ بها بواسطة النموذج لموظف عمره 40 سنة والذى معدلة 4 فى تقييم الأداء ويكسب 3950 دولار فى الشهر وخبرته الحالية 3 سنوات ؟

ب- هل المعاملات المقدرة صحيحة ؟ حدد لكل واحد من هذه المعاملات ما إذا كانت إشارته ملائمة أم لا . إذا بدا أن أحد هذه الاشارات خاطئة، هل يمكنك اقتراح السبب ؟

(١٠-٤٥)مدير برنامج دراسات عليا بأحد كليات التجارة يريد الحصول على أفضل تنبؤ للأداء فى برنامج MBA للكلية . إستخدم عينة مكونة من 25 طالب فى برنامج MBA وكون نموذج الإنحدار المتعلق بـ(GPA = Y) للطالب (تحول إلى رقم 4 كحد أقصى) ، ($GPA = X_1$)

لطالب جامعى (يحول إلى رقم حده الأقصى 4) ، X_2 = درجة الطالب فى GMAT.
معادلة المربعات الصغرى هي :

$$\hat{Y} = -.25 + .5X_1 + .0085X_2 - .0000081X_2^2$$

أ – العينة المكونة من 25 طالب لهم مدى GPAs من 2.8 إلى 3.85 ودرجات GMAT مداها من 475 إلى 650. الآن يوجد لدى المدير متقدمين من الطلبة الجامعيين يتعدى GPA لـ 3.71 ودرجة GMAT لـ750 . هل نستخدم النموذج فى التنبؤ بقيمة GPA , MBA لهذا المتقدم؟ اشرح مدعماً إجابتك .

ب– حاول أن تستخدم النموذج فى التنبؤ بأداء المتقدمين فى الجزء (أ) وبالمتقدمين الآخريين الذين يكونوا طلبة GPA بتقدير 3.6 ودرجة الـ650 GMAT . بماذا تخبرك هذه النتائج عن العلاقة بين X_2 , Y فى النموذج ؟

فى التمارين التالية سوف يكون هدفك النهائى هو تحديد ما إذا كان هناك علاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة. إذا كانت هناك علاقة يكون المطلوب منك هو تقييم نموذج الانحدار بالكامل بهدف الحصول على أفضل معادلة إنحدار لإستخدامها فى التنبؤ والتقدير .

(١٠–٤٦) قام فريق من المحللين في مستشفى بتحليل درجة توقف طول فترة اقامة المريض بالمستشفى على عمر المريض ، أيضاً فإنه لوحظ أن الرجل يقيم في المستشفى لمدة أطول من المرأة.

Women		Men	
Age	Length of stay (days)	Age	Length of stay (days)
63	3	66	9
66	16	70	8
67	6	72	10
68	9	77	17
68	3	77	18
69	4	78	12
69	8	78	9
69	19		
70	9		
70	6		
72	7		
73	10		
74	7		
83	16		
84	21		
85	8		
88	10		

(١٠–٤٧) شركة XRX تدير برنامج أبحاث مستمر لتحسين جودة الطباعة لطابعتها ومن المهم تحديد خصائص مساهمة الطباعة على إحساس العملاء بجودة الطباعة. وفى مسح أو استقصاء، قدر العملاء جودة الطباعة لعينة من المطبوعات. كل مطبوع حلل فى مختبر وكانت المعدلات من 0 إلى 10 لـ grceyness (X_1) الخلفية ، X_2 = عدد البقع فى الخلفية ، X_3 = حدة التصوير ، X_4 = تحبير التصوير. فإذا كانت بيانات العينة كما يلي حدد أفضل معادلة إنحدار .

Y	X_1	X_2	X_3	X_4	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
6	10	8	5	4	6	6	4	7	5
2	8	1	2	5	4	8	4	3	5
6	5	9	5	4	4	5	5	3	3
6	4	9	4	5	6	3	7	5	6
8	0	6	9	6	3	7	0	3	5
7	10	5	5	8	5	1	2	6	5
5	5	4	4	6	7	4	6	8	5
5	7	2	6	6	4	3	4	5	4
8	5	7	9	6	4	5	1	7	2
5	1	6	4	4	4	1	2	2	6

(١٠-٤٨) فى تمرين (٩-٦٨) طلب منك تحليل غياب الموظفين فى كل من مصنعين Richmond, Lousville . افترض أنه بالإضافة إلى سنوات الخدمة تم أخذ نوع الجنس للموظفين في الاعتبار . حدد للبيانات التالية معادلة الإنحدار الملائمة .

Richmond			Louisville		
Absences	Year of Service	Gender	Absences	Year of Service	Gender
18	9	M	24	9	M
14	9	M	0	31	M
24	21	M	18	17	M
5	15	F	28	19	M
7	15	F	30	19	F
0	15	M	51	16	M
8	17	F	48	24	M
13	21	M	3	30	F
2	18	F	14	17	M
0	16	M	19	19	F
5	15	M	50	7	M
11	9	M	9	13	M
10	14	F	13	7	M
1	8	M	9	7	M
7	10	F	4	20	M
2	15	M	50	16	F
21	9	M	49	9	M
18	12	M	15	12	M
2	15	M	11	11	M
12	16	F	15	18	F
9	14	F	9	7	F
5	14	M	13	24	M
9	14	F	5	18	F
13	8	M	6	12	M
16	8	M	33	7	F
11	15	F	64	7	M
9	13	M	12	16	F
23	10	F	8	14	M
5	8	M	0	15	M
13	14	M	3	17	M

(١٠-٤٩) قام محلل فى شركة تليفون بدراسة العلاقة بين زيادة خط التليفون السنوى فى منطقة ما والحالة السنوية للتوظيف فى مصانع البناء. وتكون الزيادة ممثلة في التغير فى عدد التليفونات فى المكان من سنة إلى أخرى. ويعتقد المحلل بأن الرقم القياسي للأسعار (CPI) ربما يرشد إلى الزيادة السنوية. فاذا تم تسجيل الزيادة السنوية للعشرة سنوات الأخيرة مع مؤشر الحالة السنوية الكلية للتوظف فى مصنع البناء ومؤشر الرقم القياسي للأسعار. حدد أفضل معادلة إنحدار .

CPI	Construction Employment	Area Gain	CPI	Construction Employment	Area Gain
195.4	130.2	446	298.4	113.9	688
217.4	138.4	591	.311.1	132.8	667
264.8	128.3	569	322.2	152.0	757
272.4	116.3	490	328.4	168.1	899
289.1	103.8	262	340.4	173.6	741

(١٠-٥٠) فى العديد من الشركات . تعتبر مشكلة تحديد أهم عوامل التنبؤ بكفاءة العمل للمستخدمين الحاليين عملية مستمرة، والإجراء الدائم يكون بعمل إختبارات ملائمة، وإتخاذ قرار التعيين الملائم يعتمد على درجات الاختبار. والسؤال المبدئي هو معرفة أي الاختبارات يساعد في التنبؤ بأداء الأفراد. افترض أن مكتب الأفراد في إحدى الشركات الكبيرة أجرى أربعة إختبارات لوظائف معينة. هذه الإختبارات أديت لـ 20 فرد تم تعينهم بواسطة الشركة وبعد سنتين تم وضع درجات لكل واحد من الموظفين بحسب كفاءته فى الوظيفة. ودرجات كفاءة الوظيفة ودرجات الإختبارات الأربعة مسجلة تم تسجيلها كما يلى : حدد معادلة الإنحدار الملائمة .

Employee	Score	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4
1	94	122	121	96	89
2	71	108	115	98	78
3	82	120	115	95	90
4	76	118	117	93	95
5	111	113	102	109	109
6	64	112	96	90	88
7	109	109	129	102	108
8	104	112	119	106	105
9	80	115	101	95	88
10	73	111	95	95	84
11	127	119	118	107	110
12	88	112	110	100	87
13	99	120	89	105	97
14	80	117	108	99	100
15	99	109	125	108	95
16	116	116	122	116	102
17	110	104	83	100	102
18	96	110	101	103	103
19	126	117	120	113	108
20	58	120	77	80	74

(١٠-٥١) كما في مثال (١٠-٨) تمثل البيانات التالية متوسط درجات الحرارة فى يناير لـ 26 محطة رصد فى Virginia . كل محطة رصد حددت بناء على خط العرض ومستوى سطح البحر. وبتجميع الـ 26 محطة مع الـ 24 فى المثال (١٠-٨) . حدد نموذج الإنحدار الملائم.

Temperature	Latitude	Longitude	Elevation
39.3	36.58	79.38	410
36.1	38.03	78.00	420
33.9	38.67	78.38	1,200
36.6	37.33	79.20	916
37.1	36.70	79.88	760
28.6	38.42	79.58	2,910

29.3	39.07	77.88	1,720
37.4	37.70	78.30	300
40.5	36.90	76.20	22
38.9	37.58	75.82	300
34.4	36.75	83.03	1,510
35.3	38.50	77.32	12
37.5	37.50	77.33	164
36.4	37.32	79.97	1,149
35.0	36.88	81.77	1,375
34.0	38.15	79.03	1,385
33.3	38.65	78.72	1,000
38.6	37.65	76.57	25
37.5	37.75	77.05	50
36.2	37.85	75.48	9
32.1	38.95	77.45	291
35.6	38.85	77.03	10
39.3	37.30	76.70	70
33.7	37.20	78.17	760
34.4	38.88	78.52	887
34.4	36.93	81.08	2,450

(١٠-٥٢) يدرس أحد طلاب الدراسات العليا أسعار كتب إدارة الأعمال في الفصل الدراسي لربيع 1992، ولقد حدد الطالب المتغيرات التفسيرية التالية وهي عدد الصفحات ، نوع غطاء الكتاب (غلاف مقوى - غلاف خفيف) وتخصص الادارة (اقتصاد - محاسبة - إدارة، نظم المعلومات الادارية وغيرها) وكانت البيانات المجمعة كما يلي :

Price	Pages	Cover	major	Price	Pages	Cover	major
$20.65	486	S	Acc	**$51.65**	668	H	Mgt
18.95	522	S	Acc	50.00	440	H	Mgt
52.50	826	H	Acc	48.95	888	H	Mgt
55.65	810	H	Acc	50.65	690	H	Mgt
64.95	1,336	H	Acc	45.95	1,011	H	Mgt
56.25	857	H	Acc	30.00	507	H	Mgt
16.95	417	S	Econ	45.00	814	H	Mgt
13.95	207	S	Econ	19.95	182	S	MIS
35.15	460	S	Econ	29.95	731	S	MIS
48.75	826	H	Econ	44.95	866	S	MIS
42.95	828	H	Econ	56.25	826	H	MIS
48.75	644	H	Econ	44.95	797	H	MIS
50.90	986	H	Other	48.75	308	H	MIS
18.30	558	S	Other	37.95	585	H	MIS
46.90	1,398	H	Other	27.20	340	S	Other
25.95	518	S	Mgt	48.75	792	H	Other
50.00	1,070	H	Mgt	45.00	829	H	Other
48.50	586	H	Mgt	50.00	1,100	H	Other
47.95	732	H	Mgt	54.95	1,181	H	Other
47.85	679	H	Mgt	15.00	354	S	Other

(١٠-٥٣) فى دراسة حديثة تم دراسة تأثير العوامل المؤثرة على عدد الشكاوى عن العلاج طويل المدى لكبيرى السن في ولاية فريجينيا. ومن العوامل المحتملة كيفية التعامل مع الشكاوى وحلها. ففى الوقت الحالى يتم التعامل مع الشكاوى إما عن طريق برامج محلية أو بواسطة الولاية. كما أن هناك العديد من العوامل الإضافية والتى يمكن أن تؤثر على عدد الشكاوى وهى عدد الأسرة المتاحة فى المدى الطويل، سهولة وإمكانية الرعاية ومكان تقديم الرعاية «الخدمة» (ريف – حضر – . . .) والبيانات التالية قائمة على الشكاوى المستقصاة في خلال 1990 .

Area	Complaints	Number of beds	Location	Program
1	36	412	Rural	Local
2	22	280	Rural	Local
3	211	989	Rural	Local
4	5	650	Rural	State
5	77	1,789	Urban	Local
6	1	1,259	Rural	State
7	15	820	Rural	State
8	176	3,388	Mixed	Local
9	13	582	Rural	State
10	64	800	Urban	Local
11	28	648	Rural	State
12	3	1,364	Rural	State
13	3	494	Rural	State
14	0	475	Rural	State
15	273	3,117	Mixed	Local
16	14	698	Urban	State
17	8	801	Rural	State
18	4	810	Mixed	State
19	17	3,292	Mixed	State
20	5	356	Mixed	State

(١٠-٥٤) إهتمت احدى الدراسات الحديثة بتقدير تكاليف التصنيع الشهرية لشركة صناعية ، وتم اعتبار أربعة كميات لمتغيرات مفسرة :

١ – قيمة الإنتاج المصنع والذى يمثل تجميع تكلفة كل الوظائف فى الشهر (X_1) .

٢–صافى المبيعات الشهرية (X_2) .

٣–تكلفة جدول الرواتب (X_3) .

٤ – نسبة أجر الموظفين فى الساعة والتى تطبق مباشرة على وظيفة العميل (X_4) وقد جمعت البيانات التالية معتمدة على 18 شهر .

Month	Actual Manufacturing Expenses	X_1	X_2	X_3	X_4
1	765,715	736,932	1,070,857	431,313	70.9%
2	866,646	868,731	1,166,572	488,672	76.0
3	795,762	768,923	1,084,584	466,110	75.4
4	880,175	802,044	1,152,015	471,759	73.7
5	840,308	768,753	1,102,914	466,955	74.5

6	813,588	738,084	1,209,486	442,674	75.5
7	215,828	830,697	1,093,130	518,724	72.7
8	844,200	772,550	1,178,449	473,927	72.6
9	939,497	865,235	1,246,947	540,264	73.3
10	857,316	778,727	1,026,848	478,457	72.5
11	867,235	835,969	1,283,029	489,242	74.4
12	871,289	814,294	1,421,233	475,405	75.8
13	875,872	862,820	1,006,106	487,189	75.4
14	945,866	**1,005,529**	1,258,522	544,505	75.5
15	875,960	887.690,	1,177,637	489,028	77.0
16	1,014,107	**1,031,243**	1,252,445	578,567	75.3
17	939,557	978,892	1,227,701	525,516	76.9
18	850,136	816,093	1,221,124	478,830	75.6

(١٠-٥٥) هذا التمرين يعتبر تعميم لتمرين (٧-٦٤) حيث تم دراسة فائدة حضور المحاضرة قبل أخذهم الإمتحان. كان هناك اعتقاد بوجود عامل آخر لأداء الطلبة فى الإمتحان. بجانب المحاضرة وهو كفاءة الطالب. وقد استُخدم متوسط درجات الكلية (GPAs) كمعيار لهذه الكفاءة. فى النهاية كان تصنيف مستوى الطلبة (أولى، ثانية، ... الخ). يمكن أن يشرح بعض الإختلافات المشاهدة فى درجات الإمتحان وكانت البيانات كما يلى :

Grade:	75	88	75	95	95	75	75	75	85	65	75	95
Attend?	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
GPA:	3.02	3.2	2.2	2.9	4.0	2.4	2.0	2.5	1.5	2.5	2.29	3.0
Class:	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	2

Grade:	85	88	72	82	82	82	85	92	98	78	85	78
Attend?	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
GPA:	2.75	2.2	2.1	3.9	2.3	2.0	2.27	2.75	3.23	3.16	2.15	2.5
Class:	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Grade:	95	95	85	75	72	78	65	75	72	95	98	88
Attend?	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
GPA:	3.62	3.56	2.0	2.4	2.72	2.8	2.6	2.4	1.93	3.0	3.5	1.5
Class:	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Grade:	75	82	85	78	88	92	65	78	88	82	88	78
Attend?	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
GPA:	2.5	3.2	2.1	2.8	3.2	2.1	2.2	2.75	3.0	3.0	2.0	3.4
Class:	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Grade:	75	75	85	95	92	75	95	75	88	85	82	95
Attend?	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
GPA:	2.9	2.75	2.01	2.82	2.7	3.4	3.7	2.8	2.8	2.7	1.9	2.35
Class:	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Grade:	85	95	65	82	75	98	65	98	75	85	85	78
Attend?	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
GPA:	3.3	3.4	2.7	2.1	1.96	2.6	2.2	3.65	2.6	2.7	2.9	2.4
Class:	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Grade:	85	85	75	88	95	92	95	92	88	78	72	75
Attend?	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
GPA:	2.2	3.2	2.3	2.75	2.25	2.4	3.2	3.2	3.4	3.0	3.02	2.9
Class:	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4

Grade:	92	72	78	92	92	82
Attend?	0	0	0	1	1	1
GPA:	2.7	2.8	2.8	3.7	3.45	3.1
Class:	4	4	4	4	4	4

Note: For Attend? : 1 = attended the study session; = did not attend.
For Class: 1 = freshman; 2= sophomore; 3=Junior; 4=senior

(١٠-٥٦) هذا التمرين يعتبر تعميم لتمرين (٢-٨٦)،(٨-٤٨) والذى يتعامل مع أسلوب العمل لزملاء العمل تحت قانون شركة Noknvp Bavers ويعتقد أن عدد الـ billable فى الساعة ترتبط مع عدد سنوات الخبرة لزملاء العمل وقسمهم الإدارى . وكلما زادت الخبرة كلما كان هنا الكثير من billable hours والبيانات التالية توضح billable ساعة لأكثر من 9 أشهر لكل 43 زميل حسب القسم الإدارى وعدد سنوات الخبرة .

Hre.:	802	1,287	1,225	1,178	1.275	767	1,424	1,328	1,223	790	1,399	1,434
Yrs.:	3	10	5	9	7	4	9	7	2	4	4	7
Dept.:	1	1	1	2	1	1	3	2	1	1	4	4

Hre.:	1,050	796	1,308	1,464	1,389	1,316	1,325	1,494	1,096	1,482	1,493	1,452
Yrs.:	3	5	5	8	5	6	6	7	3	15	2	7
Dept.:	5	6	6	6	7	4	8	1	1	3	7	3

Hre.:	1,060	1,407	1,067	934	901	1,400	1,320	1,321	1,256	858	1,346	885
Yrs.:	3	12	5	5	4	6	4	10	4	2	6	4
Dept.:	6	6	8	3	1	1	7	1	3	1	8	1

Hre.:	1,084	1,065	1.211	1,379	1,340	1,098	1,407
Yrs.:	5	4	4	10	8	7	5
Dept.:	5	5	1	3	6	5	1

Dept . Code :
1 = Business / commercial Litigation
2 = Labor relations
3 = Real estate
4 = Banking / finance
5 = Administrative
6 = Corporate
7 = Insurance / product liability
8 = Trusts / estates

حال دراسية (١٠-١) : فاعلية أحد الأجهزة الطبية :

قامت إحدي شركات إنتاج الأجهزة الطبية بتطوير شاشة Monitor أحد الأجهزة - قادر على تزويد الجراح بمعلومات جديدة عن حالة المريض أثناء إجراء العملية الجراحية. وتعتقد الشركة وكذلك بعض الأطباء اعتقاداً كبيراً بأن الجهاز يحسن من حالة المريض. فعلى سبيل المثال فانهم يعتقدون بأن الجهاز وإستخدامه قد يؤدي إلي التقليل من عمليات النزيف، ينتج عن إستخدامه قليل من الدماء التي تلوث وتقلل من التعقيدات التي يتعرض لها المريض من اجراء العملية، وهذا يؤدى إلى اختصار وقت إجراء العملية الجراحية. فاذا حصل أحد الدارسين بالمصنع (المحللين) على بعض بيانات عن العمليات التي تم إجرائها (بيانات كافية)، بعضها تم استخدام الجهاز في العمليات، وبعضها لم يتم استخدامه. وكان أمامه هدفين هما:

١ - تحديد بعض البيانات والتصريحات الايجابية والتي تقوم بها الشركة عن الجهاز المنتج.

٢ - تحديد تلك القضايا التي يجب أخذها في الاعتبار في ربع العام التالي عندما يبدأوا في عمل خطط دراسة خاصة بالمنتج في المستقبل (Prospective).

ولقد طلب منك مساعدة المحللين بعمل إستشارة لهم، المحلل يصر على أن هذه البيانات تتوقف على أحداث الماضى (retrospective) بمعنى أنه لم يتم جمعها كنتيجة عمل تجربة مصممة إحصائياً (بإستخدام العشوائية أو التعشية، والقطاعات، وهكذا . . .) ولكنها جمعت من الأداء الفعلي للعمليات في فترتين زمنيتين مختلفتين في الماضي.

١- بيانات من الفترة 1، والتي تعبر عن النتائج للعمليات الجراحية قبل استخدام الجهاز (أو قبل وجود هذا الجهاز).

٢ - بيانات من الفترة 2، والتي تعبر عن النتائج للعمليات الجراحية بعد استخدام الجهاز (أي بعد استخدام المستشفى للجهاز).

وتكون مساعدتك عن طريق فحص وتحليل البيانات آخذا في إعتبارك الأهداف:

١ - تحديد وتعريف التصريحات الايجابية الصحيحة والتي تقوم بها الشركة عن الجهاز المنتج.

٢ - فهم المواقف التي يساعد فيها هذا الجهاز في العمليات والتي لا يساعد فيها (في حالة وجود الجهاز).

يجب عليك استخدام الأساليب المناسبة والملائمة التي درستها في هذا الكتاب من الفصل الأول حتى الفصل العاشر.

وتوجد البيانات الخاصة بهذه الحالة على القرص المرن Disk في الملف المعنون Case 1001. وعموماً فإن المتغيرات التالية هي متغيرات البيانات - أيضاً الأعمدة المصاحبة وكذلك تعليقات مختصرة عن البيانات يمكن تلخيصها فيما يلي:

متغيرات المريض Patient Variables

C1 : نوع المريض (ذكر = 0، انثى = 1)

C2 : حجم المريض (مساحة مسطح الجسم بالبوصة المربعة)

C3 : سن المريض (بالسنوات)

متغيرات اسلوب العمل Operative Procedure Variables

C4 : بطاقة الجراح (ويعنون ذلك بالأرقام 1 ، 4 ، 5)

C5 : نوع الأسلوب المستخدم (حالات عادية = 0، حالات طوارئ = 1)

C6 : استخدام الجهاز (لايستخدم = 0، يستخدم = 1)

بعض المقاييس الداخلية للعمليات

C7 : الوقت الاجمالي لإجراء العملية (بالدقيقة)

C8 : تعداد كرات الدم (قبل اجراء العملية)

متغيرات ما بعد العملية ٢٤ ساعة بعد إجراء العملية

C9 : تعداد كرات الدم

متغيرات خاصة بالعملية (أثناء إجراء العملية)

C10 : الدم المسحوب أو المبذول من الصدر (بالوحدات)

C11 : نقل الدم المطلوب (حالة عدم النقل = 0، حالة النقل = 1)

تعليقات على المتغيرات

* C1، C2: نوع المريض وحجم الجسم. يعتقد الأطباء المعالجون بأن الإناث ذو الحجم الأصغر يكونون أكثر عرضة للنزيف خلال العملية.
* C3 عمر المرضى: المرض الأكبر سنا يكونون أكثر عرضة لصعوبات أكثر أثناء أداء العملية.
* C4 الاطباء: قد يختلف الأطباء في اسلوبهم، ودرجة معرفتهم وايلافهم للجهاز ومجتمع المرضى.
* C5 نوع الأسلوب المستخدم: حالات الطوارئ عادة ما تكون حالات غير جيدة عن استخدام الجهاز.
* C6 الجهاز: يفترض المصنع أن استخدام الجهاز يحسن من حالة المريض.
* C7 طول فترة إجراء العملية. حالات الطوارئ والحالات التي ينتج عنها مضاعفات تأخذ وقت أطول في اجراء العملية.
* C8: عدد كرات اليوم قبل إجراء العملية. وهذا يعطي الأساس في المقارنة والتغير في تعداد كرات الدم والذي يرجع إلى النزيف خلال إجراء العملية. بالاضافة إلى ذلك إذا كانت عدد كرات الدم تبدأ منخفضة بصورة كبيرة، فإن هذا يعنى أن المريض ليس في حالة جيدة في بداية اجراء العملية.
* C9: مستوى الكرات في الدم بعد ٢٤ ساعة من إجراء العملية. يعتقد بعض الأطباء أن انخفاض كرات الدم بشكل كبير غير مرغوب فيه.
* C10: سحب أو بذل الدم. كلما زادت كمية الدماء النازفة من صدر المريض أثناء اجراء العملية أو بعدها، كلما كانت حالة المريض سيئة.

* C11 عمليات نقل الدم. وخصوصا نوع من نقل الدم والذي يسمى هذه الأيام HIV ولاتتم عملية نقل الدم إلا إذا كانت ضرورية.

تعليق عن البيانات :

* أحياناً، تكون قيم البيانات غير الموجودة missing.
* جميع البيانات تم ترتيبها بترتيب زمنى يتفق مع وقت إجراء العملية.

حالة دراسية (١٠-٢) تحليل مزايا الفريق المحلي: في مسابقة الدوري المحلي كرة القدم الأمريكية

هناك اعتقاد كبير أن الفريق المحلي له مزايا في جميع الأحداث الرياضية. وهذه الحالة الدراسية تعتبر فرصة لك في تحليل ما إذا كانت هذه المزايا موجودة في الدورى المحلي لكرة القدم الأمريكية National Football League (NFL)، وإذا كان الأمر كذلك، فإن الأهمية ترجع إلى الاختلاف في نوع المظهر الخارجي لملاعب الفريق المحلي، أيضاً تمتد الأهمية إلى القوة النسبية للفرق المنافسة.

والبيانات المتاحة تمثل حوالى 224 مباراة من مباريات (NFL) في موسم ١٩٩٢، وتم أخذ هذه البيانات من سجلات الرياضة، وتوجد على القرص المرن المرفق والذي يرافق هذا الكتاب تحت ملف اسمه Casel 1002. ويحتوى الملف 224 سطر من البيانات، سطر لكل مباراة تمت. و المتغيرات (الأعمدة) هي:

C1 : مؤشر عن ترتيب المباراة المحلية (1 إلى 18).

C2 : اسم الفريق المحلي .

C3 : اسم الفريق الزائر.

C4 : المخرجات ويعبر عنها (0 = حالة فوز الفريق الزائر، 1 = في حالة فوز الفريق المحلي).

C5 : النقاط للفريق المحلي.

C6 : النقاط للفريق الزائر.

C7 : هامش فوز الفريق المحلي أو المنزلي (أو خسارته) أي (C5 - C6).

C8 : مظهر ومساحة ملعب الفريق المحلي أو المنزلي.

C9: مظهر ومساحة ملعب الفريق الزائر.

C10: نسبة الفوز للفريق المنزلي أو المحلي في نهاية موسم الدوري.

C11: نسبة الفوز للفريق الزائر في نهاية موسم الدوري.

والمطلوب منك أن تتبع وتحلل البيانات باستخدام التفكير الاحصائي والاساليب التي درستها في الفصول من الأول حتى العاشر.

يجب أن تطور وتحدد نموذج يوضح العلاقة بين مزايا ملعب الفريق المحلي (إن وجدت) ومايلي: (١) ومساحة ومظهر ملعبى للفريقين، (٢) القوة النسبية للفريق المنافس في تقريرك لابد من ذكر نتائجك وان تبررها آخذ في الاعتبار وجود وكذلك حجم ملاعب الفريقين، التأثير على مزايا الفريق

المحلي با للعب علي النجيل الصناعي (الأرض الصناعية) مع زيادة العيوب عندما يلعب علي أرض بها نجيل طبيعي أو حشائش طبيعية، وكذلك العلاقة بين مزايا الفريق المحلي والقوة النسبية للفرق المنافسة كما تقاس بالنسبة المئوية للفوز لهم في نهاية موسم الدوري.

وبأيجاد النموذج المناسب، سوف تستخدم الانحدار المتعدد. يجب أن تفكر في متغير الاستجابة. فلابد أن يكون فترة أو نسبة لتأكيد الفروض الضرورية، ولذلك فإنك لا نستطيع استخدام C4 (الخسارة أو المكسب) كمتغير استجابة.

ملحق ١٠ : Appendix -10

تعليمات الحاسب لإستخدام Minitab , SAS

سوف نستخدم مثال الأيس كريم (انظر جداول ١٠-٢، ١٠-٤، ١٠-١١، ١٠-١٥، ١٠-١٦) ومثال (١٠-١٦) (انظر جداول ١٠-٦، ١٠-٩) وأشكال (١٠-٥، ١٠-٦) لتوضيح تعليمات (إرشادات) الـ Minitab , SAS . لإيجاد مخرجات الحاسب لهذه التمارين .

مثال الأيس كريم ICE Cream parlor example

SAS:

تولد التعليمات الآتية المخرجات المعطاة فى جدول(١٠-٢) . لاحظ أن لدينا نوع اليوم والرطوبة كمتغيرات مفسرة فى جملة INPUT وبياناتها. حيث ستستخدم هذه المتغيرات التفسيرية بشكل مختصر.

```
DATA:
INPUT SALES PRICE TEMP DAY HUMID;
CARDS'
374   35   74   1   50
386   35   85   0   72
472   35   94   1   92
429   50   93   0   88
391   50   85   1   70
475   50   96   1   94
428   50   91   1   85
412   65   93   0   89
405   65   88   1   80
341   65   78   0   60
PROC GLM;
MODEL SALES = PRICE TEMP;
```

للحصول على المخرجات المعطاة فى جدول (١٠-٤) نعدل فقط جملة MODE كما يلى :

```
MODEL SALES = PRICE TEMP DAY;
```

للحصول على المخرجات المعطاة في جدول (١٠-١١) . والتى تتضمن الرطوبة كمتغير مفسر لكن لا تحتوى على نوع اليوم . نعدل أيضاً جملة MODEL كما يلى :

```
MODEL SALES = PRICE TEMP HUMID;
```

للحصول على المخرجات المعطاة فى جدول (١٠-١٥) للإنحدار STEPWISE سنستخدم PROC STEPWISE مع جملة MODEL كما يلى :

```
PROC STEPWISE;
MODEL SALES = PRICE TEMP DAY HUMID;
```

فى النهاية للحصول على مخرجات الجدول (١٠-١٦) لحذف الخلفى نستخدم PROC STEPWISE لكن نعدل فى جملة MODEL كالتالى :

```
MODEL SALES = PRICE TEMP DAY HUMID / B;
```

Minitab:

تستخدم أوامر Name ، READ لإدخال البيانات ويتضمن لنوعية اليوم والرطوبة كما يلى :

```
MTB >  name c1 = 'sales' c2 = 'price' c3 = ' temp' c4 = 'day' c5 = 'humid'
BTB >  read c1 - c5
DATA >  347  35  74  1  50
DATA >  386  35  82  0  72
DATA >  472  35  94  1  92
DATA >  429  50  93  0  88
DATA >  391  50  82  1  70
DATA >  475  50  96  1  94
DATA >  428  50  91  1  85
DATA >  412  65  93  0  89
DATA >  405  65  88  1  80
DATA >  341  65  78  0  60
DATA >  end
```

للحصول على مخرجات Minitab فى جدول (١٠-٢) نستخدم الأمر REGRESS ونشير إلى عدد المتغيرات التفسيرية التى نهتم بها والأعمدة التى تحتوى على بياناتهات كالتالى :

```
MTB > regress  Y c1  2  c2   c3
```

إذا أردنا طباعة قيم Y والبواقى نحدد العمود فى جملة REGRESS للقيم Y ونستخدم الأمر الفرعى RESIDUAL مع العمود المعمم للبواقى .

للحصول على معادلات الـMinitab للجداول (١٠-٤) ، (١٠-١١) سوف نعدل ببساطة أمر REGRESS كما يلى :

```
MTB > regress  Y  c1  3  c2  c3  c4
MTB > regress  Y  c1  3  c2  c3  c5
```

للحصول على معادلات الـ Minitab وإنحدار stepwise للـ SAS المعطى فى جدول (١٠-١٥) سنستخدم أمر stepwiese مع الأمر الفرعى F Enter ، Fremove حيث أن كلا الأمران الفرعيان يكونوا مساويان للقيمة 4 . هذه التعليمات تنسجم مع مخرجات الـ Minitab كما يلى :

من المخرجات نلاحظ أن المعلومات فى أخر عمود تحتوى على معادلات المربعات الصغرى للمتغيرات المفسرة الموجودة فى معادلة الإنحدار المنسجمة مع قيم T . أخر صفين فى العمود يكون

إنحراف البواقى المعيارية وقيمة R2 لأفضل معادلة إنحدار .

```
MTB > stepwise  Y  c1  c2  - c5 ;
SUBC > fenter = 4 ;
SUBC > fremove = 4.

STEPWISE REGRESSION OF sals ON 4
PREDICTORS, WITH N = 10

    STEP          1        2       3
CONSTANT      -10.81    25.88   15.31

temp           4.85     5.20    5.04
T-RATIO        5.22     8.90   15.83

price                  -1.34   -1.10
T-RATIO                -3.71   -5.40

day                    20.2
T-RATIO                 4.23

S             21.1     13.1     7.11
R -SQ         77.33    92.35   98.08
```

للحصول على معادلات Minitab للحذف الخلفى المعطى فى جدول (١٠-١٦) نستخدم مرة أخرى الأمر STEPWISE المنسجم مع الأمر FENTER ، FREMOVE , ENTER . والآن جملة الأمر الفرعى FENTER تكون مجموعة من 10000 والأمر الفرعى ENTER لتحديد كل المتغيرات المفسرة التى نريد إدخالها. هذه الإرشادات تنسجم مع مخرجات 1 (MINITAb) كما يلى وكما من قبل المعلومات فى العمود الأخير يحتوى على النتائج المتعلقة بأفضل معادلة إنحدار :

```
MTB > stepwise   Y   c1   c2 - c5 ;
SUBC > fenter = 100000 ;
SUBC > fremove = 4 .
SUBC > enter c2 - c5 .

SATEPWISE REGRESSION OF sales
ON 4 PREDICTORS , WITH N = 10

    STEP           1        2
CONSTANT      -112.85    15.31

price          -1.15     -1.10
T-RATIO        -5.58     -5.40

temp            7.86      5.04
T-RATIO         3.02     15.83

day            18.9      20.2
T-RATIO         3.89      4.23
```

```
humid        -1.5
T-RATIO      -1.09

S             7.00      7.11
R -SQ        98.45     98.08
```

مثال (١٠-٦)

الإرشادات المتبعة للحصول على النتائج فى جدول (١٠-٨) ورسومات (١٠-٥) أ ، ب (a or b):

```
DATA;
INPUT COST RATE LABOR;
CARDS;
13.59    87     80
15.71    78     95
15.97    81     106
20.21    65     115
24.64    51     128
21.25    62     128
18.94    70     115
14.85    91     92
15.18    94     93
16.30    100    111
15.93    102    116
16.45    82     117
19.02    74     127
18.16    85     133
18.57    86     135
17.01    90     136
18.03    93     140
19.22    81     142
21.12    72     148
23.32    60     150
PROC GLM;
MODEL COST = RATE LABOR;
OUTPUT OUT = A
RESIDUAL = RESID;
PROC PLIT DATA = A;
PLOT RESID * RATE;
PLOT RESID * LABOR;
```

لتفسير العنصر المربع المشتمل على المعدل. نشكل العمود المحتوى على المعدلات المربعة بواسطة أمر الإدراج .

```
RATESQRD = RATE * RATE;
```

بين الجمل INPUT , CARDS ثم نتبع الإرشادات للحصول على نتائج جدول (١٠-٩) والأشال فى (١٠-٦).

```
DATA;
INPUT COST RATE LABOR;
RATESQRD = RATE * RATE;
CARDS;
13.59    87     80
15.71    78     95
15.97    81     106
20.21    65     115
24.64    51     128
21.25    62     128
18.94    70     115
14.85    91     92
15.18    94     93
16.30    100    111
15.93    102    116
16.45    82     117
19.02    74     127
18.16    85     133
18.57    86     135
17.01    90     136
18.03    93     140
19.22    81     142
21.12    72     148
23.32    60     150
PROC GLM;
MODEL COST = RATE LABOR ;
OUTPUT OUT = A
RESIDUAL = RESID;
PROC PLIT DATA = A;
PLOT RESID * RATE;
PLOT RESID * LABOR;
MINITAB
```

التعليمات المتبعة للحصول على معادلات الـ Minitab للجداول (١٠-٨)، (١٠-٩) والأشكال (١٠-٥)، (١٠-٦).

```
MTB > name c1 = `cost` c2 = `rate` c3 = `labor` c4 = `ratesqrd`
MTB > read c1 - c3
DATA > 13.59    87     80
DATA > 15.71    78     95
DATA > 15.97    81     106
DATA > 20.21    65     115
DATA > 24.64    51     128
DATA > 21.25    62     128
DATA > 18.94    70     115
DATA > 14.85    91     92
DATA > 15.18    94     93
DATA > 16.30    100    111
DATA > 15.93    102    116
```

```
DATA > 16.45    82    117
DATA > 19.02    74    127
DATA > 18.16    85    133
DATA > 18.57    86    135
DATA > 17.01    90    136
DATA > 18.03    93    140
DATA > 19.22    81    142
DATA > 21.12    72    148
DATA > 23.32    60    150
DATA > end
MTB >  let c4 = c2 * c2
MTB > regress Y c1  2 c2 c3;
SUBC > residual c5
MTB > plot c5  c2
MTB > plot c5  cE
MTB > regress Y c1 E c2 c3 c4;
SUBC > residual c6.
MTB > plot c6  c2.
MTB > 1pot c6 cE.
```



الفصل الحادي عشر

تحليل السلاسل الزمنية وعمليات التنبؤ

TIME SERIES ANALYSIS AND FORECASTING

محتويات الفصل :

(١١-١) نظرة عامة على محتويات الفصل .

(١١-٢) نماذج السلاسل الزمنية .

(١١-٣) التنبؤ بإستخدام التمهيد الأسى .

(١١-٤) التنبؤ بإستخدام نماذج الإنحدار .

(١١-٥) ملخص .

ملحق ١١ : تعليمات الحاسب الآلى عند بإستخدام SAS , Minitab .



الفصل الحادي عشر

تحليل السلاسل الزمنية وعمليات التنبؤ

TIME SERIES ANALYSIS AND FORECASTING

(١١-١) نظرة عامة على محتويات الفصل : Bridging To New Topics

الآن وقد انتهينا من الفصول من ١ إلى ١٠ والتى تعتبر العمود الفقرى للطرق والتفكير الإحصائى، فإن هذا الفصل والفصول التى تليه تتعامل مع بعض الموضوعات الهامة والمتخصصة. فلقد جاء الفصل الحادى عشر خصيصاً لكى يخدم عملية التخطيط التى تحدث فى جميع النواحى الإدارية .

وعملية التخطيط هى النشاط الرئيسى للإدارة، فتقريباً فى كل الشركات يبذل الكثير من الجهد فى القرارات الخاصة بتخطيط الطاقة البشرية مثل عدد الموظفين المطلوبين لكى يدعموا الوظائف المختلفة وفى القرارات الخاصة بتخطيط الإنتاج (مثل عدد الوحدات المطلوبة من إنتاج سلعة ما كل شهر) واستضافة الآخرين. إن القرار الملائم غالباً يعتمد على بعض المتغيرات التى ليست تحت سيطرة الإدارة. على سبيل المثال عدد مندوبي المبيعات المطلوبين للسنة القادمة يعتمد على الطلب المستقبلى لمنتجات الشركة، ومستوى الإنتاج الملائم للشهر القادم يعتمد على عدد الطلبات المقدمة. وقبل إتخاذ الكثير من قرارات التخطيط يجب أن يكون هناك تنبؤ لهذه المتغيرات غير المتحكم فيها. لذلك يعتبر التنبؤ أهم عنصر فى عملية التخطيط .

وتنقسم طرق (وسائل) التنبؤ إلى نوعين: تقديرية (تحكمية) أو كمية. التنبؤات التقديرية (التحكمية) ترجع إلى رأى القائم بالتقدير. أما الكثير من النماذج الكمية فتكون نماذج إحصائية فى طبيعتها . وبواسطة الوسائل الإحصائية يعبر عن التنبؤ بمعادلة مشتقة من المعلومات الملاحظة، ومعظم وسائل التنبؤ الإحصائية مبنية على تحليلات السلاسل الزمنية. معلومات السلاسل الزمنية تتكون من ملاحظات مأخوذة بإنتظام عبر الزمن. هناك بعض الأمثلة العملية مثل المبيعات الشهرية، والإستخدام اليومى للحاسب الآلى، وطلبات الخدمة الأسبوعية، ومتطلبات الإسكان الفصلى (الربع سنوى) .

وبالرغم من أن تحليلات السلاسل الزمنية يمكن أن تشمل التحليلات المتزامنة لسلسلة زمنية متعددة، سوف نركز على التطبيق الأكثر شيوعاً والذى يشتمل على متغير واحد فقط فى الزمن. فى هذا الفصل سوف نقدم الوسائل المتنوعة البسيطة نسبياً لتنبؤ السلاسل الزمنية والتى تستخدم غالباً بواسطة القائمين بالتنبؤ. وعموماً فإن الإبحاث الحديثة تشير إلى أن تلك الأساليب تكون دقيقة مثل الوسائل التى تحتاج عمليات رياضية معقدة. علاوة على ذلك فإن إستخدام متوسط التنبؤات للوسائل البسيطة المتعددة يكون أكثر دقة من إستخدام التنبؤات المعقدة. ويتضح الآن أنه فى المستقبل سوف

تكون جهود التنبؤ بواسطة الإستخدام الذكى للوسائل البسيطة كتلك الوسائل التى تناقش فى هذا الفصل حيث سوف تكون أكثر فاعلية من الوسائل التى تتطلب خبرة مهنية كبيرة .

إن الإفتراض القاطع وراء تنبؤ السلاسل الزمنية هو أن المستقبل سوف يشبه الماضى . ويفترض أيضاً أن بعض النماذج الأساسية توجد فى المعلومات التاريخية وأن الإستراتيجية هى أن تحدد النموذج ، وتقدره مستقبلياً . وهذا يعنى أن وسائل التقدير المستقبلى للسلاسل الزمنية أكثر فاعلية عندما تظل البيئة مستقرة . وإذا لم تظل البيئة مستقرة لن يشبه المستقبل الماضى ، وبالتالى تكون وسائل التقدير المستقبلى للسلاسل الزمنية أكثر فاعلية للتنبؤ قصير المدى . وفى التطبيقات العملية التجارية تستخدم وسائل السلاسل الزمنية الأكثر شيوعاً فى التنبؤ وعادة تستخدم بيانات تصل مددها إلى حوالى سنتين .

(١١-٢) نماذج السلاسل الزمنية : Time Series Patterns

نفترض أن بيانات السلاسل الزمنية تتكون من نموذج أساسى مصحوب بتقلبات عشوائية . ويمكن التعبير عن ذلك بالشكل التالى :

$$Y_t = (\text{نموذج})_t + \varepsilon_t \qquad (11.1)$$

القيمة الحقيقية (الفعلية) عند t	القيمة المتوسطة عند t	الإنحراف العشوائي عند المتوسط عند t

حيث Y_t هو متغير التنبؤ عند الفترة الزمنية t و$(\text{نموذج})_t$ هو القيمة المتوسطة لمتغير التنبؤ عند الفترة t ويمثل النموذج الأساسى ، وتمثل ε_t الخطأ العشوائي أو الإنحراف عن النموذج الذى يحدث لمتغير التنبؤ عند الفترة t .

(١١-٢-١) العناصر المحددة لنماذج السلاسل الزمنية :
Specific Elements of Time Series Patterns

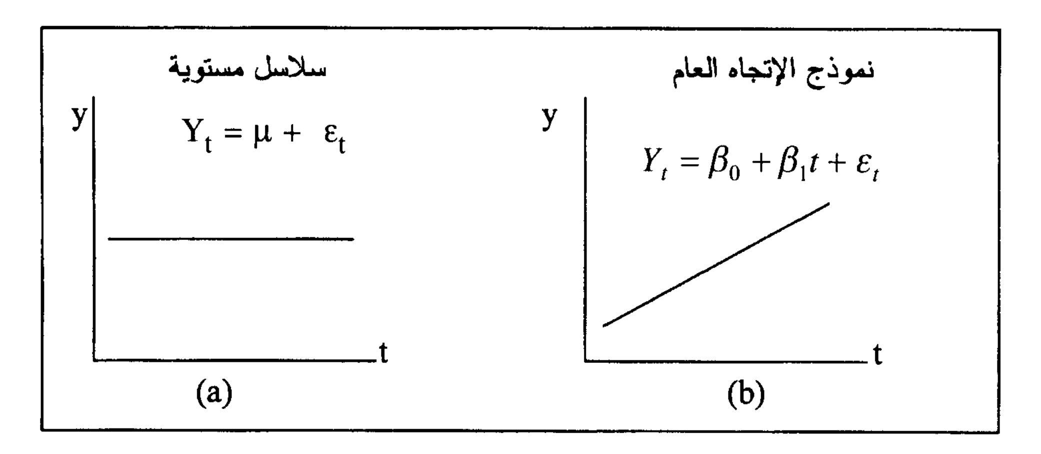
عادة ما تتكون نماذج السلاسل الزمنية من مزيج من العناصر المتنوعة البسيطة إلى حد ما . والعناصر الأساسية لنماذج السلاسل الزمنية هى : الإتجاه **trend** ، الدورية **cycle** ، الموسمية **Seasonality** .

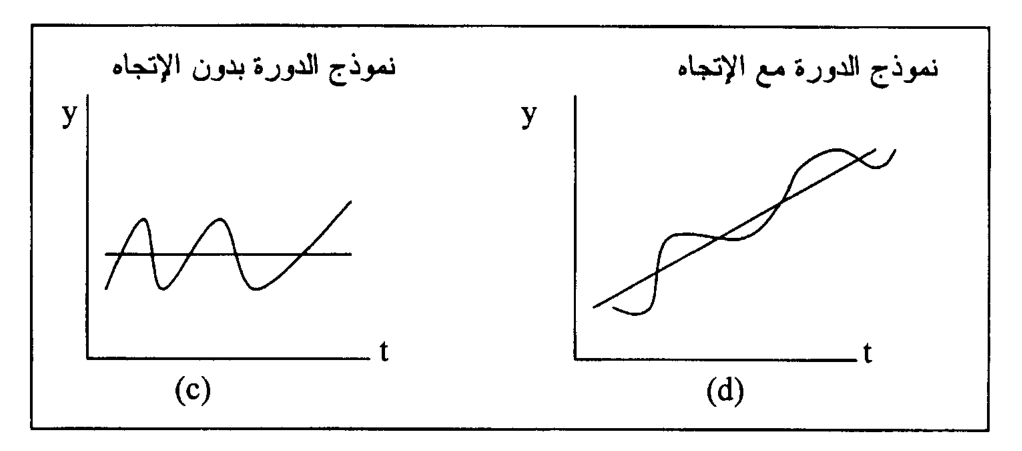
(١) **الإتجاه trend :** هو الزيادة أو النقص فى متوسط متغير التنبؤ عبر الزمن . ونمو الإتجاه يمكن أن يكون طويل المدى أو مؤقت .

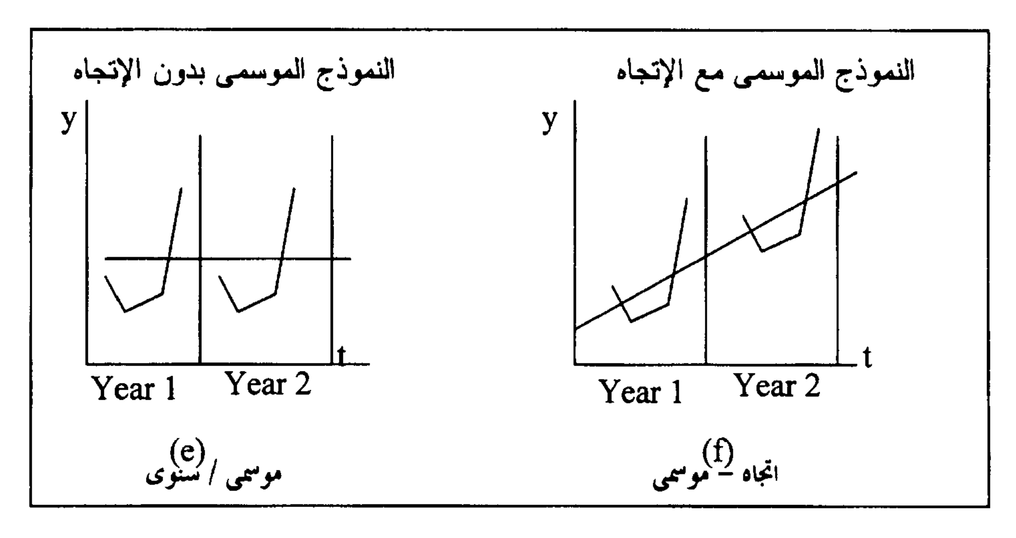
(٢) **الدورات (الدورية) cycles :** هى التقلبات للأعلى وللأسفل لمدة ومقدار غير معينين على سبيل المثال تتكون دورة العمل من فترات رخاء تتبعها فترات كساد ومدى وخطورة كل منهما يمكن أن تختلف . ودورات العمل عادة تكون أطول من سنة واحدة ولكن أقل من 5 إلى 7 سنوات .

(٣) **الموسمية Seasonality :** هى حالة خاصة من الدورة (الدورية) والتى فيها لا يختلف مقدار وحدة الدورة ولكن تتكرر بأسلوب منتظم كل سنة . وعلى سبيل المثال متوسط المبيعات لمتجر يبيع بالتجزئة يمكن أن يزيد بطريقة كبيرة فى فترة إجازات أعياد الميلاد (ديسمبر من كل عام) .

وأبسط نموذج هو نموذج ثابت أو مسطح flat pattern حيث أنه فى غياب الإتجاه أو الدورة أو الموسمية يظل متوسط قيمة Y ثابتة على امتداد الزمن فى هذا النموذج والأنواع الأساسية للنموذج مشتملة على النموذج المسطح (المستوى) انظر شكل (١١-١).







شكل رقم (١١-١)

نحن غالباً ما نستخدم التعبيرات الرياضية لنصف أو لنميز هذه النماذج:

(١) المعادلة التى تمثل النموذج المسطح بدون الإتجاه تكون $Y_t = \mu + \varepsilon_t$ ، حيث μ هى متوسط متغير التنبؤ والذى يكون ثابت على طول الوقت، ε_t هى التقلبات العشوائية فى الفترة t .

(٢) يمكن التعبير عن نموذج الإتجاه الخطى بالمعادلة التالية $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ لاحظ أن هذه المعادلة تشبه خط الإنحدار والذى فيه متغير التنبؤ (t) هو المؤشر للفترة الزمنية . ومعدل نمو

الإتجاه (ميل الخط) يكون β_1 وحدات للفترة. والمؤشر β_0 يمثل مستوى السلسلة عندما $(t = 0)$.

(٣) عادة لا يمكن التعبير عن الدورات أو الدورية بمعادلة رياضية بسيطة، بل بواسطة معادلة معقدة مثل التحليل الطيفي (والتى تخرج عن نطاق هذا الموضوع فى هذا الكتاب) للدورات التاريخية ولكنها لا تكون دقيقة عندما يخطط لها فى المستقبل.

(٤) الدورات الموسمية يمكن أن تصاغ ببساطة. لكل فترة من السنة، تحسب عامل الموسمية (SF) الذى يفسر لماذا Y_t يميل لأن يكون ثابتاً فوق أو تحت المتوسط أثناء هذه الفترة السنة. على سبيل المثال $(SF_4 = 0.90)$ يمثل عامل الموسمية لشهر أبريل. وهذا يعنى أن بيانات أبريل يميل لأن يكن أقل 10% من المتوسط. النموذج الذى يدمج الموسمية داخل مستوى، أي سلسلة الزمنية بدون اتجاه هو : $(Y_t = (\mu \times S\,F_t) + \varepsilon_t)$ كما أن العوامل الموسمية يمكن أن تجمع ونحصل على النموذج $(Y_t = \mu + S\,F_t + \varepsilon_t)$ولكننا سوف نتعامل مع الشكل المتضاعف الأول (حاصل الضرب) فى هذا الفصل وهو الشكل الشائع.

هذه المعادلات بسيطة رياضياً إلى حد ما والصعوبة فى التنبؤ تأتى في الحقيقة من أن هذه النماذج تتغير. إن معنى نموذج عديم الإتجاه هو أن معدل الإتجاه للنمو يمكن أن يتغير وعوامل الموسمية يمكن أن تنتقل أو تنحرف. إن وسائل التنبؤ يجب أن تركز على الأحوال المصاحبة لكل حالة – ما هو المستوى – ومعدل النمو – وعوامل الموسمية الآن ؟ إن طبيعة الديناتيكية في نظام السلاسل الزمنية، يجعل التعرف عليها صعب، لكنه مهم.

(١١-٢-٢) التعرف على النموذج : التقسيم التقليدي :

Identifying the Pattern: Classical Decomposition

إن هدف طرق التقسيم، هو تقسيم السلاسل الزمنية إلى محتوياتها (مكوناتها) : الإتجاه، الدورية، الموسمية، وبالطبع العشوائية. ووسائل التجزئة تؤدى إلى فهم السلاسل وتقدم قواعد (أسس) صلبة للتنبؤ.

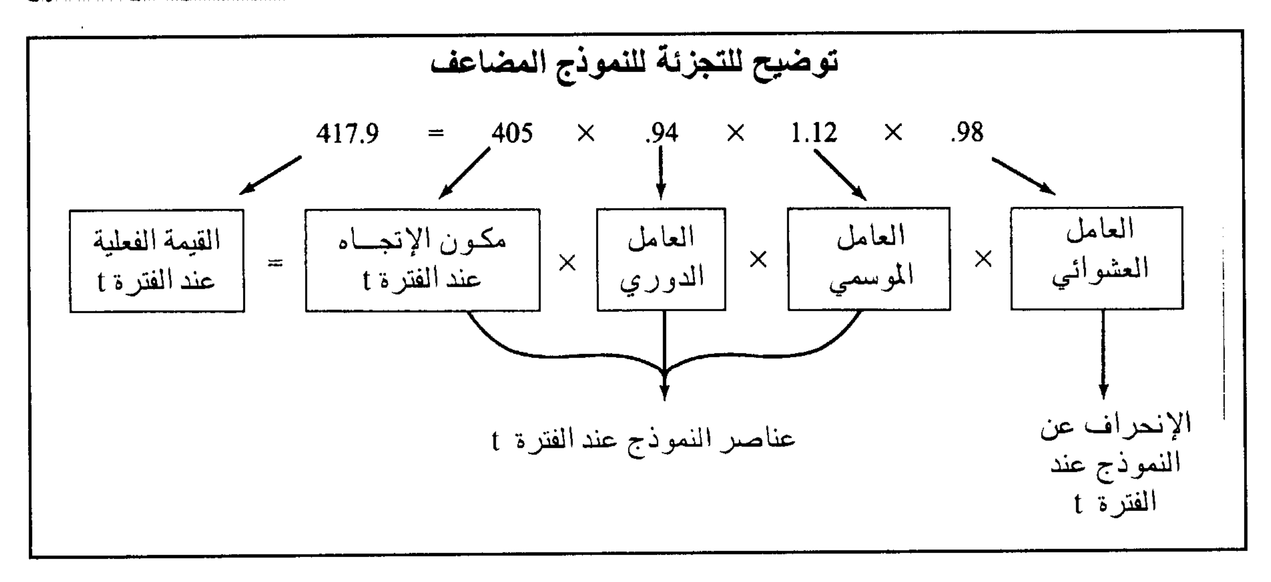
ويفترض أن محتويات (مكونات) السلاسل الزمنية تتفاعل طبقاً لنموذج المضاعف (حاصل الضرب).

$$Y_t = T_t \times C_t \times S\,F_t \times \varepsilon_t \qquad \textbf{(11.2)}$$

حيث T_t تمثل مكون الإتجاه عند الفترة t ، SF_t , C_t ، ε_t تمثل على التوالى تأثيرات الدورية والموسمية والعشوائية عند الفترة t.

إعتبر أن هناك سلاسل زمنية تتكون من قيم المبيعات الشهرية لفترات متعددة. إفترض أن قيمة المبيعات الفعلية (الحقيقية) للفترة 23 هى $(Y_{23} = 417.9)$ هذه القيمة يمكن أن تتجزأ كما هو موضح فى الصندوق (المربع) التالى.

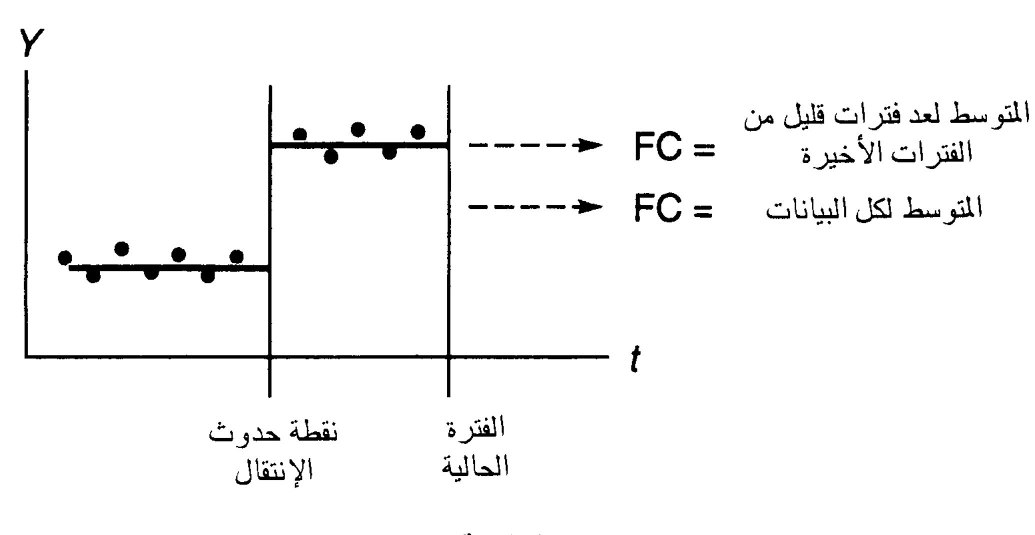
فى هذا المثال، متوسط المبيعات عند الفترة 23 هو 405. افترض أن تأثير الدورة الحالية (0.94) وهو يخفض المبيعات بنسبة 6% والموسمية للسلسلة عند الفترة 23 هى (1.12) أى أن المبيعات تزيد بنسبة 12%. وبالتالى فإنه باستثناء التقلبات العشوائية فإن متوسط المبيعات المتوقعة للفترة 23 هى : $(405 \times .94 \times 1.12 = 426.4)$ وبفرض أن التقلبات العشوائية خفضت المبيعات بنسبة 2% فى هذه الفترة، فإن قيمة المبيعات الحقيقية (الفعلية) $(426.4 \times .98 = 417.9)$. المكونات في المعادلة (11.2) يمكن التعبير عنها كمصطلحات مضافة ولكن هذه ليست شائعة ولن نأخذها فى الإعتبار هنا.



أنه من المهم أن تتحقق من أن عوامل الموسمية تمثل الإنحرافات التي يمكن تفسيرها من وقت لآخر خلال السنة. عموماً يجب على المواسم أن يعوضوا (يوازنوا) بعضهم البعض وهكذا متوسط العوامل الموسمية للسنة يجب أن يساوى 1 . إن الهدف من التجزئة هو أن النعرف على المكونات $(T_t , C_t , S F_t , \varepsilon_t)$ لكل فترات السلسلة، ويوجد العديد من وسائل التجزئة الشائعة . وهنا نقدم التجزئة التقليدية **classical decomposition** والتي تعتبر من أقدم وأبسط الطرق، ولكنها ما تزال تستخدم بجانب بقية الطرق. وهذه الوسيلة مبنية على فكرة المتوسطات المتحركة .

- المتوسطات المتحركة :

إذا كانت السلسلة عبارة عن نموذج مستوى (مسطح)، ذات متوسط ثابت، فإن أفضل تقدير للمتوسط هو$\overline{Y}$ وهو متوسط العينة للسلسلة الزمنية بأكملها، ومع ذلك إذا انتقل المتوسط أو إذا كان هناك إتجاه عام، فسوف تتعدل قيمة $\overline{Y}$ أيضاً ببطء للمستوى الحالى. هذه المشكلة موضحة فى الشكل (١١-٢) الذى تم فيه إستخدام الرمز F_c ليدل على كلمة Forecast (التنبؤ).

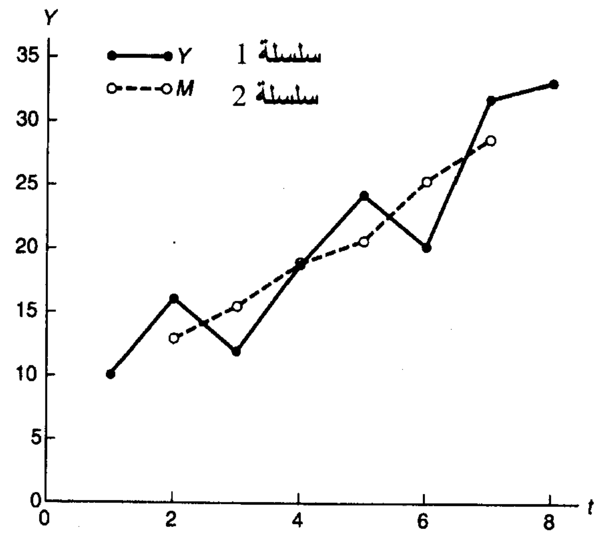


شكل رقم (١١-٢)

لكى نتأكد من أن المتوسط المتنبئ به يعكس القيمة الحالية لمتوسط السلسلة، يمكن أن نحسب متوسط معظم قيمة n من البيانات الحديثة (recent) فقط بدلاً من إستخدام كل البيانات القديمة، فإذا كانت (n = 3) فإن قيمة أحدث ثلاث بيانات فقط هى التى تستخدم لكى تقدر قيمة المتوسط الحالى للسلسلة وهذا يسمى المتوسط المتحرك لأن قيم البيانات المعنية التى نستخدمها تتغير كلما أتيحت بيانات جديدة. ويوضح الشكل (١١-٢) هذه العملية للنموذج المسطح بإزاحة فى المستوى. وأيضاً توضيح لمجموعة ذات إتجاه كما فى الجدول (١١-١) حيث أن M_t تمثل قيمة المتوسط المتحرك عند الفترة الزمنية t. المتوسط المتحرك في جدول (١١-١) يسمى المتوسط المتحرك المركزى لأن M_t توضع فى الفترة الوسطى لحساب المتوسط، وهكذا فإن : ($M_5 = 21.33$) هى المتوسط للفترات 4 , 5 , 6 والمركزية ضرورية للتأكد من أن المتوسط المتحرك لا يتأخر Lag بطريقة منتظمة عن القيمة الحقيقية للمتوسط عندما يكون الإتجاه موجود. وشكل (١١-٣) يوضح التأثير التمهيدى للوسط المتحرك المركزى للبيانات فى جدول (١١-١).

جدول (١١-١) : الوسط المتحرك المركزى (عندما n = 3)

t	Y_t	$M_t(n=3)$
1	10	-
2	15	13.67
3	16	16.33
4	18	18.67
5	22	21.33
6	24	24.33
7	27	28.00
8	33	-



شكل (١١-٣) : يوضح تأثير التمهيد بواسطة طريقة المتوسطات المتحركة المركزى

- طريقة التجزئة التقليدية :

فى التجزئة التقليدية فإن مكونات الإتجاه والدورية للسلاسل الزمنية تدمج فى مكون واحد يسمى (الإتجاه trend – الدورة cycle) . هذا يحدث لأنه لاتوجد وسيلة إحصائية فعالة لكى تفرق بين الدورة والإتجاه الذى معدل نموه يمكن أن ينتقل على طول الوقت. إن الإختلاف الأساسى هو أن

الدورة فى أخر الأمر تعود إلى نموذج الإتجاه طويل المدى ، ومع أن الإتجاه المزاح لا يمكن أن يعود للمعدل السابق للنمو . إن الإتجاه – الدورة فى الفترة المعطاة يمثل مستوى السلسلة بعد أن أزيلت التأثيرات العشوائية والموسمية . وسوف نعرض فيما يلى وصف لكيفية تحقيق هذا بواسطة التجزئة التقليدية خطوة – خطوة وبعد ذلك سوف نشير إلى مثال خاص بالتجزئة التقليدية المقدم فى جدول (١١–٣) فى نهاية هذا الجزء .

خطوة 1 : تقدير الإتجاه – الدورة Estimate the trend-cycle :

لكى نقدر الإتجاه – الدورة (TC) يجب أن نحسب المتوسط المتحرك الذى فيه n هى عدد الفترات فى السنة. بالنسبة للبيانات الشهرية نستخدم (n=12) – بالنسبة للبيانات الربع سنوية (الفصلية) تستخدم (n=4). الآن إذا كان المتوسط المتحرك يمثل الإتجاه – الدورة ، فإنه يجب أن يكون خالى من كل الإختلافات العشوائية والموسمية فى البيانات . والمتوسط المتحرك عندما تكون عدد الفترات فى السنة تساوى n يزيل العشوائية والموسمية بالطرق التالية :

١– **إزالة التأثيرات الموسمية Removal of seasonal effects** : وحيث أن n هى عدد الفترات فى السنة ، فإن كل متوسط متحرك محسوب يستخدم قيمة واحدة من البيانات فى كل فترة من السنة . وهكذا ، كل متوسط متحرك محسوب يتأثر بالتساوى بكل التأثيرات الموسمية .

٢–**إزالة العشوائية Removal of randomness** : كل قيمة من قيم البيانات المستخدمة فى المتوسط المتحرك تساهم فى التأثير العشوائى ويكون بعض التأثيرات إيجابية والبعض الآخر تأثيرات سلبية . التأثيرات العشوائية الموجبة والسالبة تميل إلى إلغاء بعضها البعض فى عملية إيجاد المتوسط . وعلى الرغم من أن المتوسط المتحرك الناتج لا يكون خالياً تماماً من التأثيرات العشوائية (لأن التأثيرات الموجبة والسالبة لا تتوازن تماماً فى العينة) لكن الكثير من العشوائية يزال .

إعتبر البيانات الفصلية (الربع سنوية) فى جدول (١١–٢) التى تعرض اتجاه خطى تام بدون عشوائية . المتوسط المتحرك المحسوب بالنسبة لـ (n = 4) موضح فى العمود الثالث .

جدول (١١–٢)

مثال لمتوسط متحرك ومتوسط متحرك مزدوج عندما يتواجد اتجاه

t	Y_t	$M_t\,(n=4)$	$M'_t\,(2\times4)$
1	10	–	–
2	20	–	–
3	30	25	30
4	40	35	40
5	50	45	50
6	60	55	60
7	70	65	–
8	80	–	–

لاحظ أنه لسوء الحظ فإن المتوسط المتحرك لا يمكن أن يتمركز عند الفترات لأن عدد الأرباع فى السنة هو عدد زوجى . نقطة التمركز تكون عند الفترة 2.5 وهي فترة غير موجودة . وحيث اننا وضعنا المتوسط المتحرك M_t في نصف الفترة بعيداً عن الفترة المرغوبة ، أي أنها تبتعد عن القيمة الفعلية الاتجاهية . لذا سنعوض عن هذا التأخير بواسطة حساب المتوسط المتحرك المزدوج للمتوسط

المتحرك الأصلى. للمتوسط المتحرك الثانى يستخدم القيمتان الحديثتان للمتوسط المتحرك الأول. لذلك يشار له (2 X n) متوسط متحرك ويرمز له بالرمز M_t' ويوضع المتوسط المتحرك (2 x n) لكى يتمركز للفترة t كما هو موضح فى العمود الرابع لجدول (١١-٢) .

دعنا نأخذ نظرة أدق على (2 x n) متوسط متحرك. افترض أن هناك بيانات فصلية (ربع سنوية) لذلك فإن (n = 4) أول متوسط متحرك M_3 (يوضع عند الفترة 3) هو متوسط لأول أربع قيم بيانات. والمتوسط المتحرك الثانى M_4 هو المتوسط لقيم البيانات من 2 وحتى 5 .

$$M_3 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} \quad \text{and} \quad M_4 = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{4}$$

أول حساب لـ 2 x 4 متوسط متحرك هو :

$$\begin{aligned} M_3' &= \frac{M_3 + M_4}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} + \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{8}Y_1 + \frac{1}{8}Y_2 + \frac{1}{8}Y_3 + \frac{1}{8}Y_4\right) + \left(\frac{1}{8}Y_2 + \frac{1}{8}Y_3 + \frac{1}{8}Y_4 + \frac{1}{8}Y_4\right) \end{aligned}$$

بدمج الحدود نرى أن M_3' هو المتوسط المرجح لأول خمس قيم من البيانات والتى تكون:

$$M_3' = \frac{1}{8}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2 + \frac{1}{4}Y_3 + \frac{1}{4}Y_4 + \frac{1}{8}Y_5 \quad \text{...............} \qquad (11.3)$$

وكمثال عن التجزئة التقليدية ببيانات فعلية موضح في جدول (١١-٣). وسوف نستخدمه لتأكيد النتيجة السابقة.

$$M_3' = \frac{1}{8}(245) + \frac{1}{4}(431) + \frac{1}{4}(535) + \frac{1}{4}(672) + \frac{1}{8}(1212) = 591.625$$

وهى أيضاً متوسط ($M_3 = 470.75$) , ($M_4 = 712.5$) الموضحة فى الجدول.

M_3' متمركزة عند الفترة 3 لأنها متوسط قيم Y_t للفترات من 1 حتى 5 . لاحظ أن أكبر وزن يوضع على الثلاث فترات فى المركز وهذا يبدو معقول . والآن فإن تقديرنا (للإتجاه - الدورة) هو المتوسط لخمسة قيم من البيانات. ولكن هل التأثيرات الموسمية ما زالت متوازنة؟ الإجابة، نعم. وفى الصيغة (11.3) لاحظ أن مشاهدات الربع الأول تظهر مرتين (Y_1 and Y_5) بينما مشاهدات الأرباع الأخرى تظهر مرة واحدة فقط (لأننا نتعامل مع بيانات ربع سنوية، المشاهدات (Y_1 , Y_5) كلاهما يمثل الربع الأول) لكن قيم البيانات فى الربع الأول أعطى لها نصف الوزن المحدد للآخرين. ومن ثم فإن إجمالى الوزن المعطى لكل ربع من الأرباع هو $\frac{1}{4}$ ، وهكذا نحافظ على توازن الموسمية .

جدول (١١-٣)

(a) مثال على التجزئة التقليدية

t	Y	(n=4) MA M	TC (2x4) MA M'	العوامل الموسمية المبدئية $\frac{Y}{M'}$	العوامل الموسمية النهائية*	تقديرات مكونات العشوائية e	Y بعد إزالة الموسمية
1	245	--	--	--	1.184	--	207
2	431	--	--	--	1.105	--	390
3	535	470.75	591.62	.904	.911	.992	587
4	672	712.5	818.62	.821	.800	1.026	840
5	1,212	924.75	1,015.75	1.194	1.184	1.008	1,024
6	1,280	1,106	1,178.75	1.086	1.105	.983	1,158
7	1,260	1,251.5	1,367.25	.922	.911	1.012	1,383
8	1,254	1,483	1,603.5	.782	.800	.978	1,567
9	2,138	1,724	1,811.5	1.180	1.184	.997	1,805
10	2,244	1,899	1,984,62	1.131	1.105	1.023	2,031
11	1,960	2,070.25	--	--	.911	--	2,151
12	1,939	--	--	--	.800	--	2,424

* ثم تكوين الرقم الخاص بهذا العمود فى الجدول التالى :

جدول (١١-٣)

(b) العوامل الموسمية النهائية

	الربع				
	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الإجمالى
عوامل الموسمية الأولية			.904	.821	
	1.194	1.086	.922	.782	
	1.180	1.131			
العوامل النهائية المؤقتة	1.187	1.108	.913	.802	4.010
العوامل الموسمية النهائية	1.184	1.105	.911	.800	4.000

على سبيل المثال نلاحظ أن عامل الموسمية للربع الثانى النهائى 1.105 ، في البداية حصلنا على العامل المؤقت بايجاد متوسط: $\left(\frac{1}{2}(1.086 + 1.131) = 1.108\right)$. بعد ذلك تم تعديل هذا الرقم بضربه في ($\frac{4}{4.010}$) للحصول علي العامل النهائى 1.105.

خطوة 2 : حساب العوامل الموسمية المبدئية (التمهيدية)
Compute Preliminary Seasonality Factors

تقدر عوامل الموسمية بقسمة كل مشاهدة على قيمة الإتجاه – الدورة المقدر M_t' المناظر لها هذه الحسابات توفر التقدير المبدئى (الأولى) للعامل الموسمي الخاص بكل فترة. ويعبر عن ذلك كما يلى :

العوامل الموسمية المقدرة (estimate) Preliminary Seasonality =

$$\frac{Y_t}{M_t'} = \frac{TC_t \times SF_t \times \varepsilon_t}{TC_t} = SF_t \times \varepsilon_t \quad .... \quad (11.4)$$

على سبيل المثال انظر إلى التجزئة التقليدية الموضحة فى جدول (١١-٣). التقدير الأولى (المبدئى) لموسم الربع الثالث($\frac{535}{591.625} = .904$) ، وحيث أن المقدار 535 أقل من الإتجاه – الدورة المقدر ، يكون لدينا إشارة مبكرة بأن الموسم الثالث سيخفض البيانات. لكن هذه خلاصة إستنتاجية لا يعول عليها لأن القيمة المنخفضة يمكن أن تنتج (توجد) بواسطة العشوائية. عموماً فإن قسمة Y_t على M_t' تزيل مكون (الإتجاه – الدورة) من Y_t ، لكن يستمر أثر كل من عوامل الموسمية والعشوائية. لذلك ، التقديرات المبدئية الموسمية Y_t / M_t' لتقديرات غير دقيقة لأن العشوائية لم تُزال نهائياً .

خطوة 3 : تقدير العوامل الموسمية النهائية : Estimate Final Seasonality Factors

العوامل النهائية الموسمية يمكن الحصول عليها بواسطة أخذ متوسط العوامل الموسمية الأولية على كل الفترات التى تمثل نفس الموسم. وفى جدول (١١-٣) على سبيل المثال تم توضيح عامل الموسمية النهائى للربع الثالث ويمكن الحصول عليه بواسطة أخذ المتوسط لعوامل الموسمية الأولية الخاص بكل بيانات الربع الثالث (للفترات 3 ، 7 أي {913. = 2 / (922. + 904.)} . وأخيراً فإن العوامل النهائية التجريبية يتم تعديلها للتأكد من أن هذا يطابق الإشتراط بأن عوامل الموسمية يجب أن تأخذ المتوسط 1 . هذا يعنى أن مجموعهم يجب أن يساوى 4 للبيانات الربع سنوية (الفصلية) ويساوى 12 للبيانات الشهرية. إن العوامل التجريبية الموسمية الموجودة فى جدول (١١-٣) مجموعها = 4.010 وهكذا يتم ضربهم فى عامل التعديل (9975. = 4.000 / 4.010) لكى نحصل على العوامل الموسمية النهائية. بالتالي يكون مجموع العوامل الموسمية النهائية ، SF_t يساوى 4 كما هو مرغوب. وعموماً فإن عامل التعديل هو :

$$\text{عامل التعديل} = \frac{\text{عدد الفترات في السنة}}{\text{مجموع العوامل النهائية التجريبية الموسمية}} \quad (11.5)$$

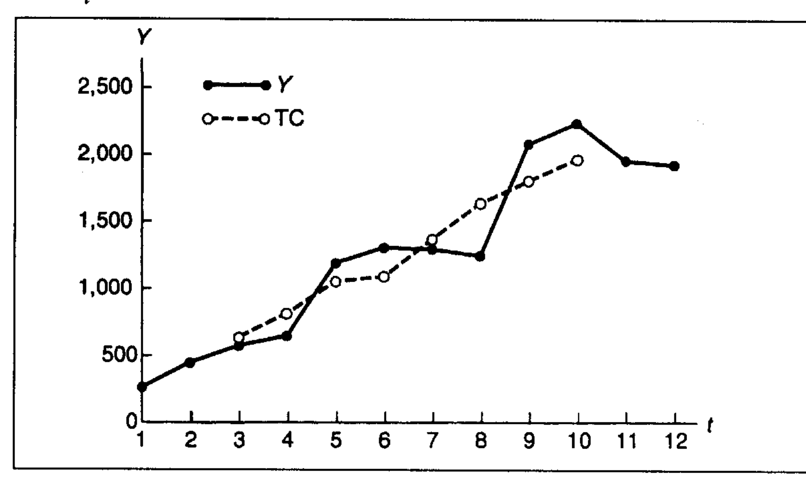
يوضح شكل (١١-٤) البيانات الأصلية وبيانات (الإتجاه – الدورة) للبيانات التى فى جدول (١١-٣) بالإضافة إلى تقديم مثال على التجزئة التقليدية وجدول (١١-٣) يوضح كيفية الحصول على البيانات الموسمية المعدلة والموضحة فى الجزء التالى .

- البيانات الموسمية المعدلة Seasonally Adjusted Data

إن طريقة التجزئة التقليدية المقدمة هنا لا توفر بنفسها عملية التنبؤ. ونمطياً نحصل أولا على التنبؤات عن طريق إزالة الموسمية من البيانات بالتجزئة التقليدية، ثم التنبؤ بالبيانات الموسمية المعدلة الناتجة بوسيلة أخرى مثل التمهيد الأسى (سيقدم فى الجزء (١١-٣) إستبعاد الموسمية تسمى غالباً

deseasonalizing . وتتحدد البيانات الموسمية المعدلة عن طريق قسمة القيمة الأصلية على العوامل الموسمية النهائية المقابلة لها. اجعل Y_t' القيمة الموسمية المعدلة، وافترض أن e_t تقدير مكون العشوائية وبالتالى فإن :

$$Y_t' = \frac{Y_t}{SF_t} = \frac{TC_t \times SF_t \times e_t}{SF_t} = TC_t \times e_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11.6)$$



شكل (١١-٤)
توضيح البيانات الأصلية وبيانات (الإتجاه - الدورة) معاً للبيانات فى جدول (١١-٤)

كما بينا في الصيغة (11.6) ، تتكون البيانات من مكونات الموسمية المعدلة من (الإتجاه - الدورة) والعشوائية فقط، والمكون الموسمى قد أزيل.

طالما حصلنا على تنبؤ لبيانات الموسمية المعدلة فإنه يمكن إعادة الموسمية لها عن طريق ضربها فى عوامل الموسمية الملائمة. وفي المثال المذكور فى جدول (١١-٣) إفترض أن تنبؤ البيانات الموسمية المعدلة الخاصة بالفترة 13 (أول ربع فى السنة الرابعة) كان 2500، إذن تنبؤ النتيجة الفعلية لهذه الفترة يكون: (F_{13} = 1.184 (2,500) = 2,960) حيث 1.184 هو العامل الموسمي الخاص بأول ربع فى كل سنة .

تمارين

(١١-١) وضح الهدف من أسلوب التجزئة التقليدية ؟

(١١-٢) ما هى مكونات السلاسل الزمنية ، طبقاً لطريقة التجزئة التقليدية ؟

(١١-٣) إستخدم طريقة التجزئة التقليدية للسلسلة الربع سنوية التالية :

Quarter	Data	Quarter	Data
1	15	7	15
2	11	8	9
3	15	9	13
4	13	10	9
5	14	11	14
6	10	12	8

(أ) حدد العوامل الموسمية النهائية .

(ب) اشرح لغوياً نموذج الموسمية .

(ج) تخلص من الموسمية للبيانات الأصلية .

(١١-٤)لماذا نعتبر حساب المتوسط المتحرك مرتين أمر هام عند تقدير (الإتجاه - الدورة) ؟ بمعنى ، لماذا نعتبر أن حساب المتوسط المتحرك مرة واحدة غير مناسب؟ .

(١١-٥) إشرح لماذا يتم التخلص من عنصر أو مكون الموسمية والعشوائية فى حالة إستخدام طريقة المتوسطات المتحركة إذا كانت قيمة n تساوى عدد الفترات خلال السنة .

(١١-٦) إفترض أن عامل الموسمية لمبيعات يناير والذى تم تقديره بالطريقة التقليدية يساوى (1.25). أما التنبؤ بقيمة المبيعات المعدلة الموسمية لشهر يناير فهو: 750. ما هو التنبؤ المناظر لمبيعات يناير الفعلية ؟

(١١-٧) إن أسلوب المتوسطات المتحركة يسمح لنا بالتركيز على البيانات الحديثة. افترض أن هناك إختيارين: ($n = 3$ ، $n = 10$). ما هي خصائص السلسلة الزمنية عندما تكون $n = 3$، اذا كانت هي الاختيار الأفضل؟ (ملحوظة: ماهي المكونات التي تسيطر على هذه السلسلة؟) من ناحية أخرى ، ماهي خصائص السلسلة الزمنية عند ($n = 10$)، اذا كانت هي الاختيار الأفضل؟

(١١-٣) التنبؤ بواسطة التمهيد الأسى Forecasting With Exponential Smoothing

فى هذا الجزء نفترض أن السلاسل الزمنية المراد التنبؤ بها اما أن تكون غير موسمية أو أزيلت منها الموسمية. هنا تقدم طريقتين للتنبؤ بالتمهيد الأسى ، التمهيد الأسى البسيط المصمم للنماذج المستوية أو عديمة الإتجاه والتى يكون فيها المتوسط غير مستقر (يمكن أن ينتقل بمرور الوقت) والتمهيد الأسى الخطى المصمم لتنبؤ السلاسل ذو الإتجاه الخطى والتى فيها يكون معدل النمو أو الهبوط غير مستقر ، أى تلك السلاسل التى تنمو خطيا عند معدل معين لبعض الوقت ، ولكن عند أى نقطة فى هذه السلاسل يمكن أن يتغير معدل النمو. وعندما يصبح المتوسط أو الميل غير مستقر يكون من المهم أن نعرف ما قيمتها المؤخرة بهدف التنبؤ .

(١١-٣-١) التمهيد الأسى البسيط Simple Exponential Smoothing

التمهيد الأسى مبنى على نفس المبادئ الخاصة بالمتوسط المتحرك: فإذا كان النموذج غير مستقر ، فإن تقديرات النموذج يجب أن تكون مبنية على بيانات حديثة، كلما كانت قيمة البيانات حديثة كلما كانت ذو أهمية (أو معنى) . لكن بدلاً من إيجاد متوسط معظم قيم n من البيانات الحديثة وبالتالى إعطاء كل منهم تأثير متساوى ، نحسب المتوسط المرجح Weighted average والذى فيه يكون الوزن المعطي لكل قيمة من قيم البيانات يتناسب مع درجة حداثة هذه البيانات. ومصطلح التمهيد Smoothing يشير إلى التمهيد خارج التقلبات العشوائية التى تحدث عندما نحسب المتوسط، كما أن الأسى exponential يشير إلى نوع التعبير الذى بواسطته سنحدد الأوزان المختلفة .

المعادلة المحدثة للتمهيد الأسى البسيط :

فى حالة التمهيد الأسى البسيط ، فإن المتوسط المرجح عند الفترة t يعطى بالمعادلة:

$$A_t = W\,Y_t + (1-W)\,A_{t-1} \qquad (11.7)$$

حيث A_t تمثل المتوسط المرجح المحسوب عند الفترة t . المعادلة (11.7) تشير إلى أن المتوسط المرجح الحالى A_t ، يمكن التعبير عنه كمتوسط مرجح للمشاهدة الحالية Y_t والمتوسط السابق A_{t-1} ، الذى تم

تحديده فى الفترة t-1 . والوزن النسبى المعطى لأحدث مشاهدة يرمز له بالرمز W ويمكن أن يكون أى قيمة بين الصفر والواحد الصحيح. كلما كانت قيمة W أقرب للواحد الصحيح، كلما زاد التأكيد الملقى على المشاهدة الحالية وقل التأكيد الملقى على المتوسط المرجح السابق .

إفترض أن F_{t+m} تمثل التنبؤ عند الفترة t لقيمة Y لعدد m من الفترات فى المستقبل، فعلى سبيل المثال إذا كانت (m = 2) فإن F_{t+2} هى التنبؤ لقيمة Y لفترتين أبعد من الفترة t . حيث أننا افترضنا نموذج مستوى أو مسطح Flat Pattern عندما إخترنا التمهيد الأسى البسيط، يكون التنبؤ الخاص بـ (m = 1 , 2 , 3 ....) هو :

$$F_{t+m} = A_t \qquad (11.8)$$

كمثال، إفترض أننا نرغب فى أن نتنبأ بالطلب الخاص بكل من الشهرين القادمين بإستخدام التمهيد الأسى البسيط عندما (W = .5). إذا كان لدينا بيانات طلب شهرية للعشرة شهور الماضية، نجد أن التنبؤ واضح فى الجدول التالى :

جدول (١١-٤)
مثال عن التمهيد الأسي البسيط

t	Y_t	A_t	F_t	$e_t = Y_t - F_t$	e_t^2
1	19	19.0	–	–	–
2	25	22.0	19.0	6.0	36.0
3	17	19.5	22.0	-5.0	25.0
4	22	20.75	19.5	2.5	6.25
4	22	20.75	19.5	2.5	6.25
5	32	26.38	20.75	11.25	126.56
6	41	33.69	26.38	14.62	213.74
7	49	41.35	33.69	15.31	234.40
8	40	40.68	41.35	-1.35	1.82
9	48	44.34	40.68	7.32	53.58
10	42	43.17	44.34	-2.34	5.48
11	؟	.	43.17		$\Sigma e_i^2 = 702.83 \Rightarrow MSE = \frac{702.83}{9} = 78.09$
12	؟		43.17		

١- لحساب A_t . لاحظ من الصيغة (11.7) أنها متكررة، بمعنى أن كل قيمة تعتمد على القيمة السابقة لها. لذا يجب أن نجد قيمة A_1 لكى نبدأ. والاختيار المعتاد هو أن نختار $A_1 = Y_1$ أي أول قيمة فى البيانات. وهكذا فإن: $A_1 = 19$.

إذا :

$$A_2 = .5(25) + (1-.5)\,(19.0) = 22.0$$

$$A_3 = .5(17) + (1-.5)(22) = 19.5 \quad , \quad \text{and so on.}$$

٢- حساب F_t . التنبؤ بخطوة واحدة لأي فترة يساوى المتوسط الممهد من الفترة السابقة. أى أن :

$$F_2 = A_1 = 19.0$$

$$F_3 = A_2 = 22.0 \quad , \quad \text{and so on.}$$

٣- حساب خطأ التنبؤ . إن خطأ التنبؤ بخطوة واحدة فى الفترة t هو :

$$e_t = Y_t - F_t$$

لا يوجد خطأ فى الفترة 1 لأنه لا يوجد تنبؤ .

$$e_2 = 25 - 19.0 = 6.0$$

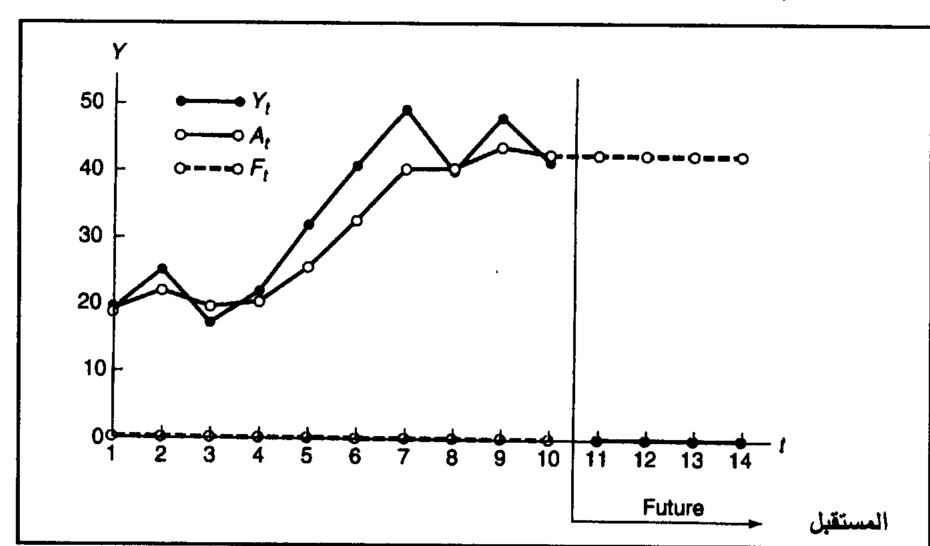
$$e_3 = 17 - 22 = 5.0 \quad , \quad \text{and so on.}$$

كما تعاملنا مع نموذج الإنحدار فى الفصول (٩، ١٠) تستطيع أن تميز أداء النماذج فى هذا السياق بواسطة معيار متوسط مربع الخطأ (MSE) . هنا حددنا MSE بناء على أخطاء الفترة الواحدة للتنبؤ خلال البيانات التاريخية بإستخدام الصيغة :

$$MSE = \frac{\sum e_i^2}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(11.9)}$$

حيث k هو عدد تنبؤات الفترة الواحدة مباشرة. وهكذا بالنسبة للبيانات فى جدول (١١-٤) ، نجد أن متوسط مربعات الأخطاء: MSE = 78.09

شكل (١١-٥) يوضح الرسم البيانى للبيانات الأصلية Y_t والمتوسط المرجح A_t والتنبؤ F_t . لاحظ أن التنبؤ يكون دائماً مستوى (مسطح) بالنسبة للتمهيد الأسى البسيط (بناء على الإفتراض أن النموذج مستوى Flat Pattern) .



شكل (١١-٥)

شكل يوضح المتوسط المرجح للبيانات وكذلك التنبؤ بالبيانات الواردة بجدول (١١-٤)

صياغة تصحيح الخطأ للتمهيد الأسى البسيط

The Error Correction Formulation of Simple Exponential Smoothing

بإعادة ترتيب الحدود فى معادلة التمهيد الأسى البسيط، يمكن أن نحصل على إدراك أوسع لطريقة التمهيد الأسى. وحيث أن $A_{t+1}\ F_t$ = يمكن أن نعيد كتابة المعادلة (8-11) كما يلى :

$$F_{t+1} = W\ Y_t + (1-W)\ F_t$$

أو

$$F_{t+1} = W\ Y_t + F_t - W\ F_t$$

بأخذ W كعامل مشترك

$$F_{t+1} = F_t + W\ (Y_t - F_t) = F_t + We_t \qquad \textbf{(11.10)}$$

حيث $(e_t = Y_t - F_t)$ هى خطأ التنبؤ الذى حدث فى الفترة t (أي أنه الفرق بين القيمة الفعلية فى الفترة t والتنبؤ للفترة t الذى قدر فى فترة واحدة سابقة). وتوضح المعادلة (11.10) أن تنبؤ الفترة المقبلة يمكن الحصول عليه بتعديل التنبؤ الحالى وذلك بتصحيح خطأ التنبؤ الحالى. ولهذا السبب فإن التمهيد الأسى يعتبر وسيلة مناسبة للتنبؤ .

يمكن أن نستخدم المعادلة (11.10) لتحديث التنبؤات أيضاً. على سبيل المثال. يمكن تحديث التنبؤات فى جدول (١١-٤) بإستخدام المعادلة (11.10) كالتالى :

$$F_3 = F_2 + .5\ (e_2) = 19 + .5\ (6) = 22$$

$$F_4 = F_3 + .5\ (e_3) = 22 + .5\ (-5) = 19.5$$

إختيار قيمة W : Choosing the value of W

إن صياغة الخطأ المعدل المعطى فى المعادلة (11.10) يقدم رؤية فى إختيار قيمة W . كلما كانت قيمة W أكبر كلما كانت إستجابة النموذج لأخطاء التنبؤ أكبر. وتنتج أخطاء التنبؤ من :

١- الإنتقالات فى المتوسط Shifts in the mean. ٢- التقلبات العشوائية فى البيانات. إذا كان الإهتمام الأساسى على المتوسط غير المستقر، فإن نموذج الإستجابة يكون مرغوب فيه. هنا يفضل اختيار قيمة كبيرة للوزن W . ولكن إذا كانت البيانات مزعجة بكثير من التقلبات العشوائية، فإن النموذج الأقل إستجابة لأخطاء التنبؤ هو النموذج المرغوب فيه. ونكون فى حاجة إلى تمهيد أكثر ويمكن تحقيق ذلك بإستخدام أو بإختيار وزن (W) أصغر. إن إختيار W يحتوى على مقارنة بين رغباتنا لأن نستجيب للإزاحات فى المتوسط واحتياجنا لتمهيد التقلبات العشوائية. فإذا كان هناك ظهور واضح للعشوائية، فإن W يجب أن تكون صغيرة. وإذا كان هناك وجود قليل للعشوائية، فإن W يجب أن تكون كبيرة، وبصفة عامة فإن قيمة W عادة تختار فى المدى (.05 ، .3) . وتحذر الدراسات الحديثة من إستخدام قيم أكبر من ذلك .

إن الأسلوب الشائع عملياً هو أن تختار قيمة W والتى تجعل متوسط مربع الخطأ لتنبؤات الخطوة الواحدة أقل ما يمكن . إن حساب MSE ثم توضيحه فى مثال تنبؤ الطلب فى جدول (١١-٤) . فى هذا المثال، لاحظ الإزاحة الكبيرة فى المتوسط، الذى يبدو حدوثها فى الفترات 5 ، 6 . وهذا يوضح

لنا أن W الكبيرة نوعاً ما هي الأفضل لهذه السلسلة. في الواقع إذا كانت (W = .1) يكون (MSE = 234.8) أما إذا كانت (W = .5) يكون متوسط مربع الخطأ (MSE = 78.09)، أى إذا كانت (W = .1) فإنها تجعل النموذج يستجيب ببطء جداً للإزاحة التى حدثت فى المتوسط. ويمكن اكتشاف القيم التي تقلل من قيمة MSE وذلك بمحاولة عدة قيم للوزن W.

التمهيد الأسى البسيط كمتوسط مرجح للبيانات التاريخية

Simple Exponential Smoothing As a Weighted Average of Historical Data

جزء من جمال ومميزات التمهيد الأسى البسيط هو سهولته. إفترض قيم جديدة من البيانات، فإن المتوسط الجديد يمكن الحصول عليه بواسطة عمل تعديل بسيط للمتوسط السابق. وربما يكون من غير الواضح لك أن الصيغ (11.7) , (11.10) تقدم المتوسط المرجح لكل البيانات التاريخية كما ذكر سابقاً. ولكى نوضح هذه الخاصية، إفترض التمهيد الأسى البسيط عندما (W = .4)، بالتالي فإن التعبير (11.7) يمكن كتابته بصورة مختصرة كما يلي:

$$A_t = .4\ Y_t + .6\ A_{t-1} \qquad \textbf{(11.11)}$$

هذا التعبير يطبق عند أى فترة. وبتطبيقه عند الفترة t-1 يمكن أن نعبر عن A_{t-1} كمتوسط مرجح لقيمة Y_{t-1} والمتوسط السابق A_{t-2} بمعنى :

$$A_{t-1} = .4\ Y_{t-1} + .6\ A_{t-2} \qquad \textbf{(11.12)}$$

بإحلال الجزء الأيمن من المعادلة (11.12) الخاص بالمقدار A_{t-1} فى المعادلة (11.11) نجد إن :

$$A_t = .4\ Y_t + .6\ (.4\ Y_{t-1} + .6\ A_{t-2})$$
$$= .4\ Y_t + .4\ (.6)\ Y_{t-1} + .6^2\ A_{t-2}$$

الآن وبتكرار هذه العملية بإحلال هذه المرة A_{t-2} سوف نجد :

$$A_t = .4\ Y_t + .4\ (.6)\ Y_{t-1} + .6^2\ (.4\ Y_{t-2} + .6\ A_{t-3})$$
$$= .4\ Y_t + .4\ (.6)\ Y_{t-1} + .4\ (.6)^2\ Y_{t-2} + .6^3\ A_{t-3}$$

لاحظ ما حدث. الوزن لأحدث قيمة من البيانات Y_t يكون .4، والوزن على Y_{t-1} هو (.24 = (.6).4) ، والوزن للقيمة Y_{t-2} هو ($.4(.6)^2 = .144$) وإذا استمرت هذه العملية سوف نرى أن الوزن الخاص بالمقدار Y_{t-3} هو ($.4(.6)^3$) ، الوزن عند Y_{t-4} هو ($.4(.6)^4$) وهكذا . . .

وبناء على ذلك يكون الوزن المعطى لقيمة البيانات للفترة t-k هو ($.4(.6)^k$) حيث k= صفر ، 1 ، 2. . عموماً الوزن Weight المعطى لكل قيمة من البيانات للفترة t-k يكون:

$$Weight_{t-k} = W(1-W)^k \qquad \textbf{(11.13)}$$

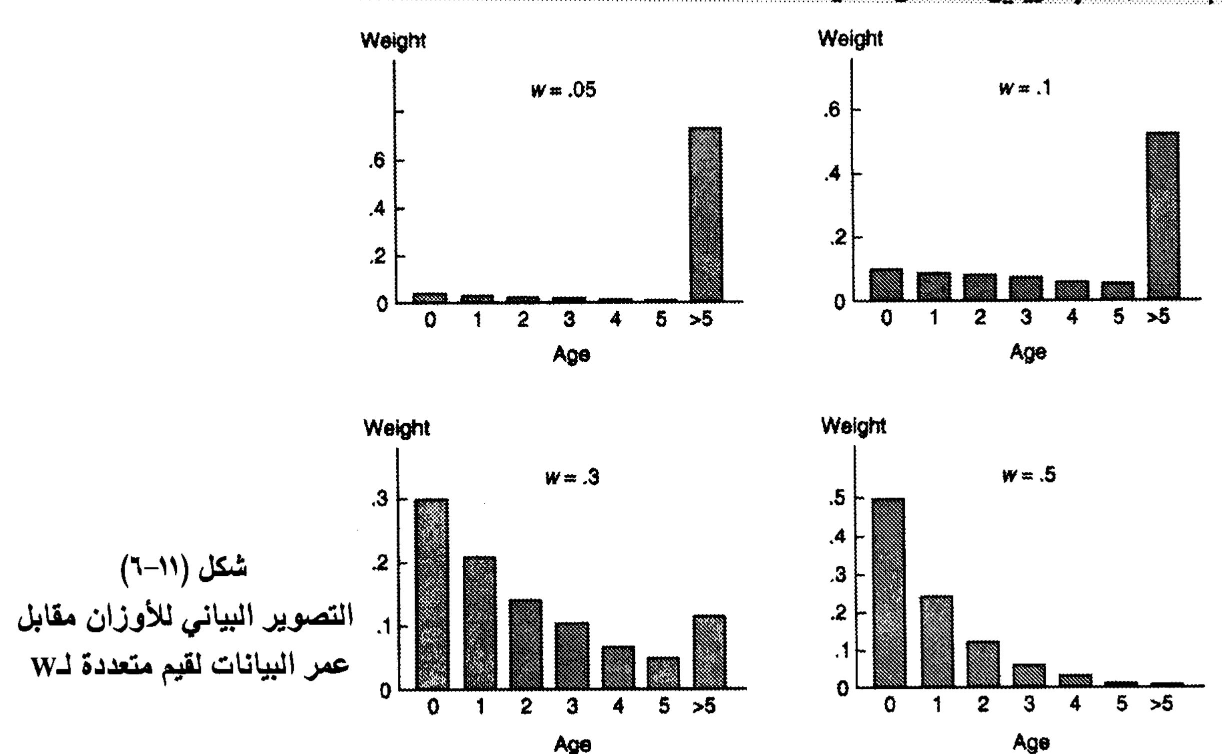
جدول (١١-٥)

الأوزان المستخدمة للبيانات الحديثة لمختلف قيم W

الفترة	عمر المشاهدات	الوزن المشاهدات			
		W = .05	W = .1	W = .3	W=.5
t	0	.05	.1	.3	.5
t –1	1	.048	.09	.21	.25
t-2	2	.045	.081	.147	.125
t-3	3	.043	.073	.103	.063
t-4	4	.041	.066	.072	.031
t-5	5	.039	.059	.050	.016
t-5 فيما بعد ذلك	> 5	.734	.531	.118	.015 ⇓
هذا هو مجموع الأوزان المعطاة لقيم البيانات الأقدم من فترة (t-5)					

وحيث أن وزن كل مشاهدة من البيانات الأقدم – المتتالية هو $(1-W)^k$، فإن الأوزان تقل كلما زاد الأس k (عمر قيم البيانات). هذه الخاصية هي الأساس في تسمية التمهيد الأسي. ويمكن أن نوضح رياضياً أن مجموع الأوزان يساوي 1 ، وهو أمر هو ضروري للمتوسط المرجح، طالما أن W بين الصفر، الواحد الصحيح.

جدول(١١-٥) يوضح الأوزان الموضوعة لست مشاهدات حديثة والشكل (١١-٦) يوضح التمثيل البياني لهذه الأوزان للعديد من قيم W. لاحظ أن الوزن الكلي المعطى للبيانات الأقدم (أي الأكثر من خمس فترات ماضية) يصبح أكبر كلما أصبحت W أصغر. هذا يتوافق مع تعليقنا السابق علي إختيار W. عندما نريد تمهيد أكبر في التقلبات العشوائية بدلاً من الإستجابة للإزاحة في المتوسط فإننا نختار قيمة صغيرة للمقدار W. وهكذا نجد أن الأوزان للمشاهدات السابقة تتناقص ببطء، أما المشاهدات الأقدم فإن الأوزان لها تكون مساوية تقريبا للأوزان للمشاهدات الحديثة. ولكن عندما تكون W كبيرة، وتريد نقل أو ازاحة shif المتوسط، فإن الوزن لمعظم المشاهدات الحديثة يحسب غالباً لمجموع الأوزان.



شكل (١١-٦)
التصوير البياني للأوزان مقابل عمر البيانات لقيم متعددة لـ W

(١١-٣-٢) تنبؤ الإتجاهات: التمهيد الأسي الخطي لهولت

Forecasting Trend Holt's Linear Exponential Smoothing

إذا احتوت السلاسل الزمنية على اتجاه عام فيكون التمهيد الأسي البسيط غير ملائم، لأن تنبؤاته تتأخر خلف المستوى الحقيقي للسلاسل [تمارين (١١-٨)، (١١-٩) تقدم توضيح لهذه الظاهرة]. إذا كان الإتجاه موجب، فإن تنبؤات التمهيد الأسي البسيط تكون عادة منخفضة جدا وإذا كان الإتجاه سالب، تكون تنبؤاته عادة مرتفعة جدا. طريقة هولت تصحح المشكلة عن طريق تقدير كل من المستوى الحالي للسلسلة والمعدل الحالي لاتجاه النمو أو الإنخفاض عند كل فترة. وتتحقق التنبؤات (بطريقة هولت) بواسطة تخطيط الإتجاه المقدر باستخدام المستوى الحالي كنقطة انطلاق. ويكون المستوى عند الفترة المعطاه هو القيمة التي تتخذها السلسلة لو لم تكن للعشوائية.

طريقة هولت تطبق التمهيد الأسي البسيط منفصلا لكل من المستوى ومعدل نمو الإتجاه. حيث أن المستوى ومعدل نمو الإتجاه تم تمهيدهم بطريقة منفصلة، فلانحتاج إلى إستخدام نفس التمهيد الثابت لكل منهما. سوف يستخدم الرمز W لكي يمثل الجزء الثابت لتمهيد المستوى، والرمز V ليمثل الجزء ثابت لتمهيد الإتجاه.

وسنقدم الآن التعبير العام الحديث لطريقة هولت. أولا: لاحظ أن الفكرة العامة للتمهيد الأسي البسيط يمكن التعبير عنها كما يلي:

المتوسط الممهد عند الفترة t	=	الوزن	×	المشاهدة الجديدة عند الفترة t	+	(1 - الوزن)	×	التنبؤ لـ t المحسوب عند t-1

بمعنى عند الفترة t-1 المستوى المقدر للفترة t هو ببساطة تنبؤنا للفترة t. النتيجة الفعلية عند الفترة t تقدم معلومات إضافية عن المستوى عند الفترة t. بهذه المعلومات الجديدة نحدث المستوى المقدر

بواسطة تشكيل المتوسط المرجح للنتيجة الفعلية الحالية والمستوى المتنبئ عنه سابقا. الآن دعنا نرى كيف نطبق هذه الفكرة لطريقة هولت Holt's method. افترض أن A_{t-1} تمثل المستوى المقدر للسلسلة عند الفترة (t-1)، B_{t-1} تمثل معدل نمو الإتجاه المقدر عند الفترة t-1. بالتالي عند الفترة t-1 ، نجد أن المستوي المتنبئ عنه للفترة t هو $(A_{t-1} + B_{t-1})$ (أي المستوى عند الفترة(t-1) بالإضافة إلى فترة نمو واحدة). المشاهدة الحالية Y_t توفر معلومات إضافية عن المستوى عند الفترة t. المستوى المقدر الجديد عند الفترة t يكون متوسط مرجح للمشاهدات الجديدة عند الفترة t والمستوى عند الفترة t التي سبق التنبؤ عنها من الفترة (t-1):

$$A_t = W\,Y_t + (1-W)\,(A_{t-1} + B_{t-1}) \quad \dots \qquad \textbf{(11.14)}$$

(مشاهدة جديدة لمستوى المتوسط)

(مستوى المتوسط المتنبأ به عند t والذي تم حسابه عند (t-1))

الآن أنظر كيف يستخدم التمهيد الأسي البسيط لتحديث الإتجاه المقدر. معدل نمو الإتجاه المقدر عند الفترة (t-1) هو B_{t-1}. وعند الفترة t نحصل على معلومات جديدة عن الإتجاه. هذه الملاحظة الجديدة لنمو الإتجاه هي التغير في المستوى من الفترة (t-1) إلى (t) والتي تكون $(A_t - A_{t-1})$. لذلك يكون التقدير المهد الحديث لمعدل نمو الإتجاه هو متوسط مرجح للمشاهدة الجديدة للاتجاه $(A_t - A_{t-1})$ والتقدير السابق للاتجاه B_{t-1}، حيث V تمثل الوزن المحدد للمشاهدة الجديدة للإتجاه:

$$B_t = V\,(A_t - A_{t-1}) + (1 - V)\,(B_{t-1}) \qquad \textbf{(11.15)}$$

(مشاهدة جديدة لنمو الاتجاه)

(التقدير السابق لنمو الاتجاه المحسوب عند الفترة t-1)

والتنبؤات يجب أن تظهر نمو الاتجاه خلال زمن التنبؤ. والتنبؤ بفترة واحدة مباشرة هو المستوى الحالي A_t بالإضافة إلى نمو الاتجاه لفترة واحدة B_t والتنبؤ بفترتين مباشرة هو $(A_t + 2B_t)$ وبالنسبة لثلاث فترات $(A_t + 3B_t)$وهكذا. التنبؤ لـ m من الفترات مباشرة يصبح:

$$F_{t+m} = A_t + m\,B_t \dots\dots\dots \qquad \textbf{(11.16)}$$

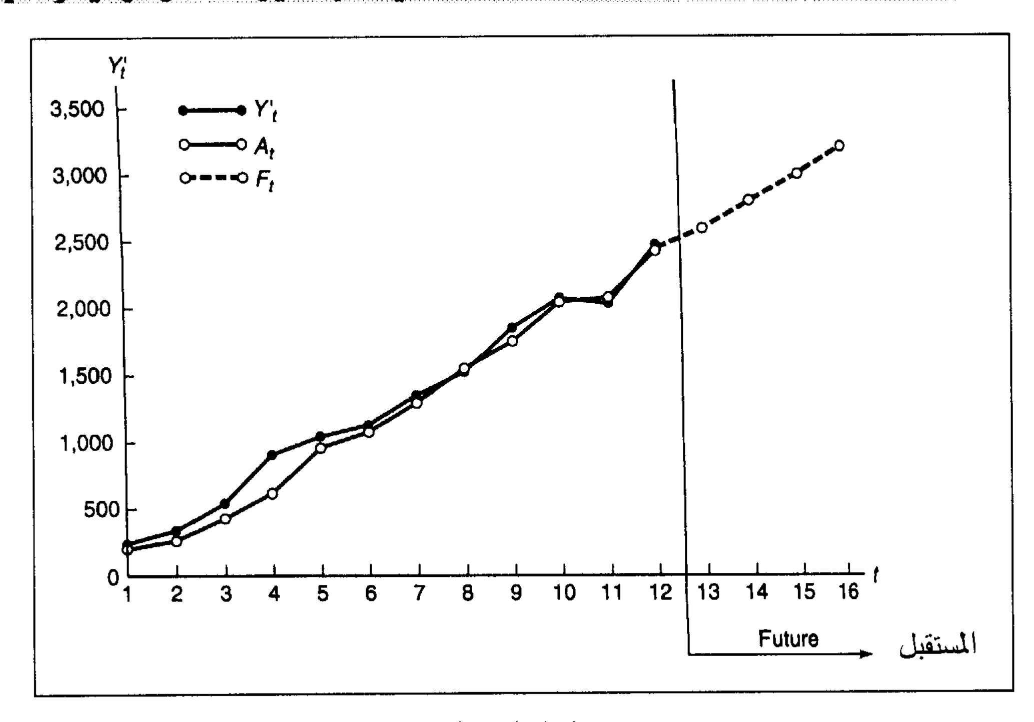
جدول (١١-٦) يوفر مثال لطريقة هولت وهذا المثال يواصل مشكلة التنبؤ في جزء(١١-٢) المقدم في جدول(١١-٣) وفي ذلك المثال طبقنا التجزئة التقليدية وفي النهاية قدمنا البيانات الموسمية المعدلة. والآن نكون تنبؤ للبيانات بعد إزالة التأثيرات الموسيمية بإستخدام طريقة هولت مستخدمين(W=.5)، (V=.4) (اختيار تحكمي أو اعتباطي) والبيانات موضحة في العمود Y_t' . [هكذا Y_t' تناظر المعادلة (14-11)]وحيث أن المعادلات متكررة، فإننا نحتاج إلى طريقة ما كى نبدأ. الطريقة الأبسط والأكثر شيوعا هي أن نضع A_t تساوي Y_t' ونضع β_1 تساوى صفر. لاحظ أن هناك

جدول (١١-٦)

مثال للتنبؤ بواسطة التمهيد الأسي لهولت

t	Y'_t	A_t	B_t	F_t	e_t	e^2*
1	207	207.00	0.00			
2	390	298.50	36.60	207.00	183.00	33,489.00
3	587	461.05	86.98	335.10	251.90	63,453.61
4	840	694.02	145.37	548.03	291.97	85,246.48
5	1,024	931.69	182.30	839.39	184.61	34,081.22
6	1,158	1,136.00	191.10	1,113.99	44.01	1,936.82
7	1,383	1,355.05	202.28	1,327.09	55.91	3,125.55
8	1,567	1,562.16	204.21	1,557.33	9.67	93.58
9	1,805	1,785.69	211.94	1,766.38	38.62	1,491.72
10	2,031	2,014.31	218.61	1,997.63	33.37	1,113.74
11	2,151	2,191.96	202.23	2,232.93	− 81.93	6,712.02
12	2,424	2,409.10	208.19	2,394.19	29.81	888.56
13				2,617.29		231,632.29⇒
14				2,825.47		$MSE = \frac{231,632.29}{11}$
15				3,033.66		
16				3,241.85		= 21,057.48

مجازفة تصاحب استخدام هذا المدخل البسيط ولأن البيانات لديها اتجاه، فإنها تحتاج حوالي6 فترات بالنسبة (B_t) لتعدل من الصفر إلى معدل النمو الحقيقي. وأخطاء التنبؤ الكبيرة نسبيا والتي تحدث أثناء الانتقال من الأوضاع المبدئية يمكن أن تحرف أو تشوه حسابات MSE. فمثلاً أول أربع أخطاء في جدول (١١-٧) ستكون مسئولة عن 93.4% من مجموع مربع الأخطاء فإذا كان MSE هو موضع إهتمام ، يكون من الأفضل أن نصرف النظر عن الأخطاء التي تحدث قبل أن تخفف آثار الظروف الأولية. شكل (١١-٧) يوضح البيانات الأصلية ، الاتجاه، التنبؤ للبيانات الواردة في جدول (١١-٦).



شكل (١١-٧)

تمثيل للبيانات الأصلية ، متوسطات ممهدة والتنبؤ لبيانات جدول (١١-٦)

تمارين

(١١-٨) فيما يلي بيانات غير موسمية للفترة من 1 إلى 5، إستخدم أسلوب التمهيد الأسي البسيط حيث أن (W=.2)، للتنبؤ بالفترات الزمنية 7,6 ثم كرر عملية التنبؤ بإستخدام (W=.7)

Period	Data
1	10
2	25
3	35
4	40
5	55

(١١-٩) بإستخدام ما تم عمله في التمرين (8-11):

(أ) حدد قيمة مربع متوسط الخطأ mean square error (MSE) لطريقة التنبؤ بإستخدام خطوة واحدة، إذا كانت (W=.2) وكذلك (W=.7).

(ب) لماذا يكون مربع متوسط الخطأ أصغر عندما كانت (W=.7)؟ إشرح ذلك؟

(ج) هل تجد أي دليل لتقترح أنه لا يوجد نموذج مناسب من أي من النموذجين للتنبؤ بهذه السلسلة؟ وإذا كان الأمر كذلك وضح لماذا؟ (أنظر إلى أول جملة من الفصل ١١-٣-٢).

(د) إذا إستخدم التمهيد الأسي البسيط، حيث أن (W=.2). حدد الوزن الذي يستخدم مع البيانات للفترات 1, 2, 3, 4, 5, لحساب قيمة A_5.

(١١-١٠) مايلي مجموعة بيانات شهرية مستبعد منها الآثار الموسمية:

Period	Data
1	20
2	50
3	10
4	70
5	20
6	40

(أ) أوجد التنبؤ للفترات 8,7 بإستخدام طريقة التمهيد الأسي البسيط حيث أن (W=.2). ثم كرر المطلوب إذا كانت (W=.7).

(ب) حدد متوسط مربع الخطأ للتنبؤ بخطوة واحدة مباشرة عندما كانت (W=.2), (W=.7)

(ج) لماذا يكون متوسط مربع الخطأ أصغر عندما كانت (W=.2)؟ اشرح ذلك.

(د) تنبأ بالنتيجة الفعلية للفترات 8,7 مفترضاً أن عواملها الموسمية لهم هي 1.10,.75 على التوالي.

(١١-١١) إفترض أننا نقوم بعملية التنبو بإستخدام عمليات التمهيد الأسي البسيط (W=.15). وكان التنبؤ للشهر الحالي والذي تم حسابه الشهر الماضي يساوي 150. إفترض أن القيمة الفعلية لهذا الشهر تقل 40 وحدة عن القيمة المتنبأ بها. إستخدم قانون الخطأ لتحديد التنبؤ الجديد للشهر القادم.

(١١-١٢) بفرض حرية قيمة W. وضح خصائص السلسة الزمنية والتي فيها (W=.2) والتي تكون أفضل من السلسة إذا كانت (W=.6).

(١١-١٣) أحد طرق إختيار قيمة W، هي إيجاد القيمة التي تخفض متوسط مربع الأخطاء إلى أقل درجة ممكنة. فما هي مميزات هذا الأسلوب مقارنا بطريقة الإختيار الشخصي للمقدار W ؟ هل هناك أي حالات يكون إستخدام MSE فيها كأسلوب للاختيار يكون هذا الاختيار غير حكيم؟

(١١-١٤) إفترض أننا نجري تنبؤ بإستخدام التمهيد الأسي البسيط حيث (W=.3)، وكان التنبؤ للشهر الحالي والذي تم حسابه الشهر الماضي يساوي 220. ووجدت لقيمة الفعلية بهذا الشهر أنها تساوي 227. المطلوب تحديث النموذج وعمل تنبو جديد للشهر التالي ؟

(١١-١٥) بإفتراض البيانات الموضحة في التمرين (١١-٨):

(أ) تنبأ بالفترات 7,6 بإستخدام طريقة هولت إذا كانت (W=.2) ثم (W=.1). إستخدم الطريقة التقليدية للقيم المبدئية $(A_1=Y_1),(B_1=0)$.

(ب) أحسب قيمة متوسط مربع الخطأ في الجزء (أ).

(ج) كيف يمكن مقارنة متوسط مربع الخطأ هذا مع طريقة التمهيد الأسي البسيط، إذا كانت (W=.2) من التمرين (١١-٨)؟

(د) كرر الجزء (أ) بإستخدام العوامل المبدئية $(A_1=10)$, $(B_1=12.5)$.

(هـ) أحسبMSE للجزء (د). ولماذا تكون قيمةMSE هنا أصغر من القيمة التي تم الحصول عليها في الجزء(ب) ؟

(و) إذا كان MSE هي المعيار في إختيار النموذج، هل أسلوب وضع القيم المبدئية هام؟

(١١-١٦) بإفتراض البيانات الموضحة في التمرين (١١-١٠):

(أ) إستخدم طريقة هولت في التنبؤ إذا كانت (W=.2), (V=.1)

(ب) أحسب قيمة MSE للجزء (أ).

(ج) قارن قيمةMSE المحسوبة في الجزء (ب) مع قيمةMSE التي يمكن حسابها بإستخدام طريقة التمهيد الأسي البسيط(W=.2) والتي تم الحصول عليها في التمرين (١١-١٠) ثم بالاعتماد فقط على مقارنة MSE ما هو النموذج المفضل منهما؟

(١١-١٧) متى يجب النصح بالاستفادة من القيمة الكبيرة للمقدارV في طريقة هولت ؟ بمعنى ماهى خصائص النظام الذي يفضل عنده النموذج إذا كانت (V= .3) منه إذا كانت(V= .1)؟.

(١١-٤) التنبؤ بواسطة نماذج الإنحدار : Forecasting With Regression Models

إن نماذج الإنحدار يمكن أن تكون مفيدة جدا في التنبؤ. ويستخدم أحيانا تحليل الإنحدار ليطور نموذج الإتجاه الخطي طويل المدى ليصبح مشابها لنموذج هولت إلى حد كبير، فيما عدا أن معدل نمو الإتجاه يعتبر ثابت طول الوقت. والنماذج السببية شائعة الاستخدام تم تطويرها لكى توضح العلاقة بين متغير التنبؤY_t والعديد من المتغيرات المستقلة. والجزء القادم يوضح هذه التطبيقات.

(١١-٤-١) نماذج الإنحدار للاتجاه طويل الأجل Regression Models For Long Term Trend

عندما يستخدم تحليل الإنحدار لتقدير الإتجاهات طويلة المدى، يكون المتغير المتنبأ به هو الدليل الوقتي أو الزمني ويشار له بالرمز T (وهو مختلف عن الإحصاء T المستخدم في الفصول من الخامس إلى العاشر). ولكي تمثل الفترات 1,2,......t ، عرفنا قيمة T ‏(T=1,2,....t) ثم ننشئ معادلة الإنحدار بالمربعات الصغرى التي يأخذ الشكل التالي:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 T \qquad \text{.........} \qquad (11.17)$$

علي سبيل المثال، إفترض البيانات الآتية والتي تمثل نصيب الفرد من المبيعات النهائية السنوية من سنة 1958 حتى سنة 1989 (ولقد تم التعبير عن المجاميع القومية عن طريق قيمة الدولار عام 1982 حتى يتم أخذ التضخم في الحسبان)

السنة	T	المبيعات	السنة	T	المبيعات
1958	1	8,375	1974	17	12,215
1959	2	8,632	1975	18	12,120
1960	3	8,654	1976	19	12,581
1961	4	8,746	1977	20	13,056
1962	5	9,052	1978	21	13,681
1963	6	9,317	1979	22	13,998
1964	7	9,664	1980	23	13,902
1965	8	10,092	1981	24	13,968
1966	9	10,471	1982	25	13,742
1967	10	10,710	1983	26	14,002
1968	11	11,104	1984	27	14,551
1969	12	11,258	1985	28	15,137
1970	13	11,179	1986	29	15,426
1971	14	11,382	1987	30	15,773
1972	15	11,898	1988	31	16,309
1973	16	12,412	1989	32	16,665

ويكون خط المربعات الصغرى لهذه البيانات:

$$\hat{Y} = 7{,}954.75 + 256.67\,T \qquad \textbf{(11.18)}$$

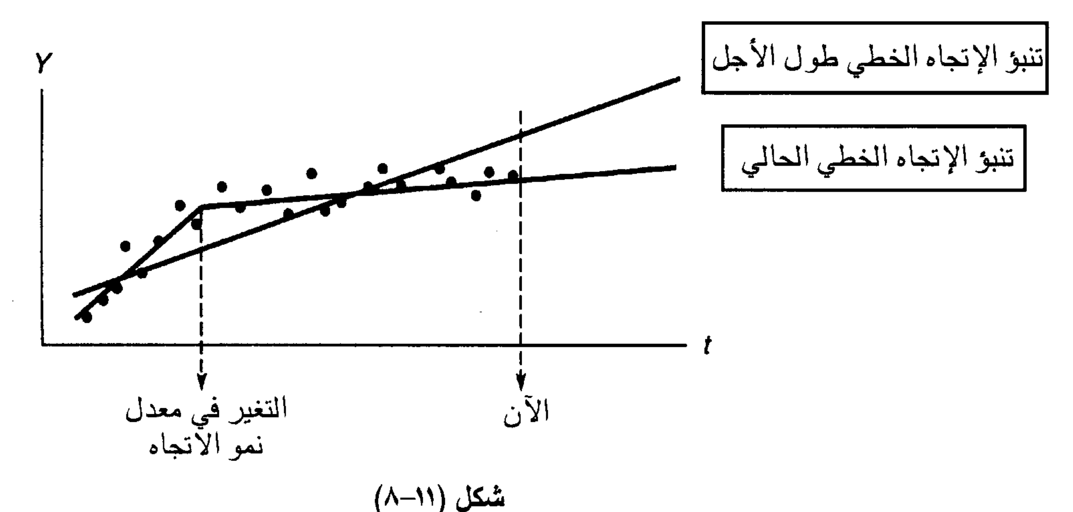
ويكون التنبؤ بنصيب الفرد من المبيعات يمكن الحصول عليه بواسطة مد خط الإتجاه. التنبؤ بسنة 1990 يمكن تحقيقه بإحلال T=33 في المعادلة (11.18).

$$\hat{Y} = 7{,}954.75 + 256.67(33) = 16424.86$$

تحذير خاص بالتنبؤ بواسطة خطوط الإتجاه طويل المدى

A Warning About Forecasting With Long- Term Trend Lines

إن إستخدام وسائل الإنحدار لإنشاء خط طويل المدى ليست بالضرورة فكرة جيدة. وفي الكثير من التطبيقات لا يوجد خط اتجاه طويل المدى ثابت. على سبيل المثال مبيعات الشركة يمكن ان تنمو بمعدلات مختلفة في أوقات مختلفة. في الكثير من الحالات يكون من المعقول أن تصدق أن المعدل الحالي للنمو سوف يستمر عن أن نتوقع إستئناف الخط العام للإتجاه طويل المدى. إذا كانت هذه هي الحالة، فيكون نموذج التمهيد الأسي الخطي لهولت هو النموذج المفضل، لأنه يؤكد على البيانات الحديثة عند تقدير خط الإتجاه الحالي. إن خط الإنحدار المعطى في المعادلة (11.18) يضع وزن متساوي لكل البيانات الحديثة والقديمة. وشكل(١١-٨) يوضح هذه الفكرة. لاحظ أن التغير في الاتجاه حدث في حوالي $\frac{1}{3}$ الطريق من خلال السلسلة الزمنية وبمعدل نمو في الاتجاه يقل بطريقة ملحوظة في ذلك الوقت. إن تنبؤ الاتجاه الخطي طويل المدى المبنى على الصيغة (11.18) من المحتمل أن يكون مرتفع جدا إذا إستمر المعدل المنخفض الحالي.



شكل (١١-٨)

مقارنة التنبؤات المبنية على تخطيط الاتجاه الخطي طويل المدى مقابل الاتجاه الخطي الحالي

(١١-٤-٢) النماذج السببية : Causal Models

يمكن أن نستخدم تحليل الإنحدار أيضا في نماذج تطوير التنبؤ السببية. والنموذج السببي A Causal Model هو النموذج الذي يكون فيه سلوك متغير التنبؤ Y يُشرح إلى حد ما بواسطة واحد أو أكثر من المتغيرات المتنبأ بها (التفسيرية). على سبيل المثال، عدد أجهزة التليفون الجديدة في منطقة جغرافية يعتمد بدرجة كبيرة على عدد المنشأت السكنية في هذه المنطقة. هذا يعطي الإحساس بأن التنبؤ بعدد أجهزة التليفون الجديدة يعتمد على التنبؤ بعدد المنشأت السكنية الجديدة.

إفترض أن شركة تليفونات إقليمية قدمت معادلة الإنحدار بطريقة المربعات الصغرى والمبنية على البيانات السنوية الخاصة بـ 18 سنة ماضية، كما يلي:

$$\hat{Y}=11.44 + 3.2X \qquad (11.19)$$

حيث Y هي عدد أجهزة التليفون الجديدة في السنة لمنطقة ما، X هي عدد المنشآت في السنة لتلك المنطقة. إفترض أن تنبؤ عدد المنشآت السكنية الجديدة(X) للسنة القادمة هو 1,115. عندئذ يمكن الحصول على العدد المتنبئ به لأجهزة التليفون الجديدة بوضع x=1,115 في المعادلة (11.19)

$$\hat{Y}= 11.44 +3.2(1,115)=3,579.44$$

إن إستخدام نموذج الإنحدار يتطلب تنبؤ بالمتغيرات المفسرة، هذا يمكن تحقيقه بطرق مختلفة. أحد هذه الطرق هي أن تستخدم طرق السلاسل الزمنية مثل التمهيد الأسي. التنبؤ بمدي واسع للمؤشرات الإقتصادية (مثل عدد المنشآت السكنية الجديدة). يمكن الحصول عليه أيضا من شركات متخصصة في التنبؤ في الاقتصاد القياسي. أو أن المتغيرات التفسيرية يمكن التنبؤ بها تحكميا. والقائمين بالتقدير يحتمل أن يكونوا مديرين داخل الشركة أو المنظمة أو خبراء خارج الشركة.

الميزة الواضحة لنماذج الإنحدار أنها توفر أسس منطقية للتنبؤ في ظل تصور للبدائل في المستقبل. وهكذا يمكن أن يستخدم نموذج الإنحدار في الإجابة على أسئلة «ماذا لو كان» التي توضع من قبل المديرين. في مثال أجهزة التليفون أفترض أن الإدارة ترغب في التنبؤ بأحهزة التليفون المناظر لتنبؤ

تشاؤمي عند (X=800) منشأة سكنية، وعند تنبؤ أفضل قليلا عندما X تساوي1115 منشأة سكنية ثم التنبؤ التفاؤلي عند (X=1,500) منشأة سكنية. بوضع هذه القيم في الصيغة (11.19) سوف نحصل على التنبؤات الثلاث الآتية المقابلة للبدائل المستقبلية الممكنة :

-(تنبؤ تشاؤمي) X=800 $\hat{Y} = 11.44 + 3.2(800) = 2,571$

-(تنبؤ أفضل جزئيا) X=1,115 $\hat{Y} = 11.44 + 3.2(1,115) = 3,579$

-(تنبؤ تفاؤلي) X=1,500 $\hat{Y} = 11.44 + 3.2(1,500) = 4,811$

مثل هذا التنبؤ (ماذا- لو) يوفر قواعد أو أسس للتخطيط المتوافق .

إستخدام الكمبيوتر: Using the Computer

في تطبيقات تحليل الإنحدار، يكون استخدام الحاسب مفيداً جداً في تحديد معادلة المربعات الصغرى، وتقسمها وإستخدامها للتوصل إلى التنبو المرغوب. والمثال التالي يوضح مثل هذه الحالة.

مثال (١١-١):

إفترض أننا نستخدم نموذج الإنحدار في التنبؤ بنصيب الفرد من المبيعات. (المثال المستخدم في الجزء (١١-٤-١) يوضح دور نماذج الاتجاه في المدى الطويل. المتغير المتنبأ به هو نصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق. والجدول التالي يوضح البيانات الخاصة بنصيب الفرد من المبيعات ونصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق. إستخدم الحاسب لتحدد مدى ملائمة النموذج الخطي للعلاقة بين نصيب الفرد الواحد من المبيعات ونصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق. تنبأ بالمقدار الأول (نصيب الفرد الواحد من المبيعات) اذا كانت قيمة التنبو للمقدار الأخير (نصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق) عبارة عن $12,000.

السنة	نصيب الفرد من المبيعات	نصيب الفرد من الدخل الشخصى المتاح للإنفاق	السنة	نصيب الفرد من المبيعات	نصيب الفرد من الدخل الشخصى المتاح للإنفاق
1958	8,375	5,641	1974	12,215	8,502
1959	8,632	5,769	1975	12,120	8,613
1960	8,654	5,771	1976	12,581	8,851
1961	8,746	5,831	1977	13,056	9,139
1962	9,052	5,983	1978	13,681	9,435
1963	9,317	6,096	1979	13,998	9,656
1964	9,664	6,439	1980	13,902	9,602
1965	10,092	6,745	1981	13,968	9,760
1966	10,471	7,006	1982	13,742	9,732
1967	10,710	7,213	1983	14,002	9,930
1968	11,104	7,412	1984	14,551	10,419
1969	11,258	7,522	1985	15,137	10,625
1970	11,179	7,744	1986	15,426	10,905

1971	11,382	7,947	1987	15,773	10,970
1972	11,898	8,211	1988	16,309	11,337
1973	12,412	8,692	1989	16,665	11,680

الحل:

بالنسبة لهذه التحليلات، الاختصارات DPIPC , SALESPC استخدمت لكي تمثل نصيب الفرد من المبيعات ونصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق بالترتيب. ومخرجات SAS بإستخدام الأمر PRO , CREG معطاة في جدول(١١-٧). بناءً على قيم P الخاصة بإحصائيات T ، F (لكل منهما=0001.). توجد علاقة خطية قوية بين نصيب الفرد الواحد من المبيعات ونصيب الفرد من الدخل المتاح للإنفاق وأن خط المربعات الصغرى يكون:

$$\hat{Y} = 1.069,7216 + 1.321954\ X$$

إذا كان التنبؤ هو X=$12,000 تكون القيمة المتنبأ بها للمقدار Y هي:

$$\hat{Y} = 1,069.7216 + 1.321924(12,000) = \$16,933.17$$

جدول (١١-٧)

مخرجات SAS لمثال (١١-١)

```
Model: MODEL1
Dependent Variable: SALESPC

Analysis of Variance

                        Sum of          Mean
Source          DF     Squares         Square       F Value        Prob>F

Model            1 181373631.25 181373631.25       6509.879        0.0001
Error           30 835838.74742   27861.29158
C Total         31    182209470

    Root MSE     166.91702      R-square        0.9954
    Dep Mean   12189.75000      Adj R-sq        0.9953
    C.V.           1.36932

Parameter Estimates

                    Parameter        Standard    T for H0:
Variable    DF       Estimate           Error  Parameter=0     Prob > |T|

INTERCEP     1    1069.721605    140.94554804        7.590         0.0001
DPIPC        1       1.321954      0.01638437       80.684         0.0001


Durbin-Watson D                 0.776
(For Number of Obs.)              32
1st Order Autocorrelation       0.584
```

لاحظ أن بيانات كلا من X,Y في المثال(١١-١) تكون سلسلة زمنية (32 سنة خاصة بيانات سنوية). وفي تطبيقات التنبؤ، تستخدم بيانات السلاسل الزمنية في بناء نموذج الانحدار. استخدام بيانات السلاسل الزمنية في تحليل الانحدار، يقدم قضيتين تستحقا الاهتمام في تطبيقات التنبؤ: (1) وجود الموسمية(2) بواقي غير مستقلة. هذه القضايا ستناقش في الجزئين التاليين.

(١١-٤-٣) اندماج الموسيمة في نماذج الإنحدار
Incorporating Seasonality in Regression Models

ظاهرة التغيرات الموسمية في المتغيرات المتنبأ بها أو متغير الإستجابة، يجب أن تؤخذ في الإعتبار وإلا فإن العلاقة الأصلية يحتمل أن تكون- زائفة- لأن نموذج الإنحدار سوف يعاملها كخطأ عشوائي. طريقة واحدة للتعامل مع التأثيرات الموسمية هي أن تستخدم متغيرات وهمية بنفس السلوك في جزء (١٠-٥) . بالنسبة للبيانات الفصلية (الربع سنوية) . فإن التأثيرات الموسمية الأربعة يمكن أن تمثل بواسطة الثلاث متغيرات الوهمية الآتية:

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{لو كانت الفترة هي الربع الثاني} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{cases} 1 & \text{لو كانت الفترة هي الربع الثالث} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$D_4 = \begin{cases} 1 & \text{لو كانت الفترة هي الربع الرابع} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الربع الأول هو الربع "الأساس" والذي عنده تكون قيم D_4,D_3,D_2 كلها مساوية الصفر. فاذا إستخدم أحد المصانع معادلة المربعات الصغرى الخاصة بالتنبؤ بالمبيعات الفصلية (الربع سنوية):

$$\hat{Y} = 145.3 + 1.75T + 35.1D_2 + 11.6D_3 - 21.5D_4$$

هذا النموذج يشير إلي أن المبيعات تتزايد بمعدل 1.75 وحدة في المتوسط لكل ربع، ماعدا الآثار الموسمية. تفسير المعاملات D_4,D_3,D_2 هي نفسها كأي متغير وهمي. أعتبر الربع الثاني، ولأن (b_2=35.1) وبعيدا عن تأثيرات الاتجاه والعشوائية، تميل المبيعات في المتوسط لأن تكون 35.1 وحدة أعلى في الربع الثاني عنها في الربع الأول. بالمثل مبيعات الربع الثالث تميل لأن تكون 11.6 وحدة أعلى. أما مبيعات الربع الرابع تميل لأن تكون 21.5 وحدة أقل منها في الربع الأول بعيدا عن تأثيرات العشوائية ونمو الاتجاه. ولكي تتنبأ ، فإننا ببساطة تعوض في معادلة المربعات الصغرى بالقيم المرغوبة لكل من T، D_2، D_3، D_4 كما فعلنا في الفصل 10.

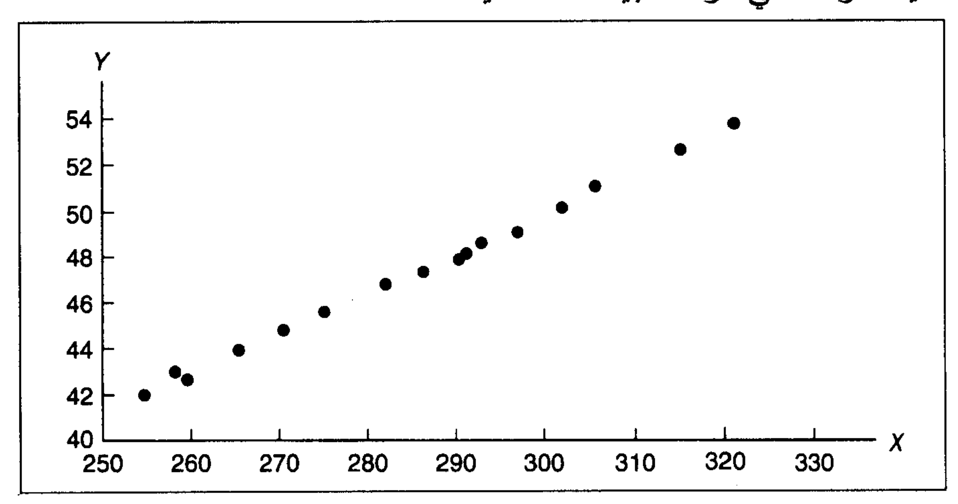
(١١-٤-٤) الأخطاء المرتبطة ذاتيا احصاء دربن واطسون:
Autocorrelated Errors the Durbin-Watson Statistic :

أحد الإفتراضات الأساسية في عمليات الإستدلال الإحصائي لتحليل الإنحدار، هو أن الأخطاء (إنحرافات قيم Y الفردية عن نموذج الإنحدار للمجتمع) مستقلة. عندما تستخدم بيانات السلاسل الزمنية في تقديم معادلة الإنحدار، يكون غالبا ما تربط الأخطاء إيجابيا عندما تكون في ترتيب زمني. إن إرتباط الأخطاء في ترتيب زمني يعرف بالإرتباط الذاتي Autocorrelation . ويكون تأثيره هو تخفيض decrease تقديرات الأخطاء المعيارية لمعاملات المربعات الصغرى. ويمكن توضيح ذلك بمثال:

أخصائي تسويق يشك في أن مبيعات شركته تتبع مبيعات قطاع الصناعة التي تتبعه شركته ككل. والبيانات التالية تمثل مبيعات الشركة (Y) ومبيعات قطاع الصناعة ككل (X) لآخر 16 فترة ربع سنوية.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
X_t	270.36	258.38	254.96	259.70	265.40	274.98	281.86	285.78
Y_t	44.84	42.97	41.98	42.75	43.95	45.65	46.87	47.35
t	9	10	11	12	13	14	15	16
X_t	290.58	290.18	296.72	292.32	301.72	305.42	314.96	321.10
Y_t	48.13	47.95	49.10	48.52	50.22	51.15	52.78	53.91

الرسم البياني لشكل الإنتشار (١١-٩) يوضح علاقة خطية قوية. وهذا يتفق مع فهم المدير أن المبيعات الفصلية لشركته هي مرآة للمبيعات الفصلية للصناعة.



شكل (١١-٩)

الشكل الإنتشاري لمبيعات الشركة (Y) ومبيعات قطاع الصناعة(X)

وجدول(١١-٨) يوضح مخرجات ونتائج هذا المثال بإستخدام البرنامج الإحصائي SAS. لاحظ أن النموذج يبدو أنه مناسب بدرجة كبيرة (r^2=.9973), (p- value =.0001) . وأنه قد تم تقدير الميل بدقة عالية حيث أن (b_1=.167), (SE(b_1)=.002456) وقيمة (T=71.86). وعلى سبيل المثال فإن 95% فترة ثقة للمؤشر β_1 هو : .171 إلى .182 .

دعنا نتذكر أن استدلال الإنحدار مبني على إفتراض أن الأخطاء مستقلة. نتحقق من هذا الإفتراض بواسطة رسم البواقي والموضح في جدول(١١-٨) في ترتيب زمني. الشكل البياني للبواقي موضح في شكل (١١-١٠). لاحظ ان الأخطاء لا تنحرف بنظام واضح فوق وتحت الخط. بدلا من ذلك فإن أي خطأين متتاليين عادة إما أن يكون كلاهما موجب أو كلاهما سالب. فالبواقي1، 2 موجبة ،3، 4 سالبة،5-7 موجبة، 8-13 سالبة، 14-16 موجبة. هذا الدوران فوق وتحت الصفر يشير إلى أن أخطاء التنبؤ ليست عشوائية بالكامل. وهذا قد يعني أن متغير تنبؤي ذو معنى لم يشمله النموذج. وغالبا فإن ذلك المتغير قد لا يمكن تعريفه أو البيانات الخاصة به ليست متاحة. وإذا حدث ذلك فلا يجب أن ندعى أن الأخطاء مستقلة، وبدلا من ذلك نستطيع دمج الإعتمادية بين الأخطاء مباشرة في نموذج الإنحدار. سوف نوضح كيف يؤدي ذلك فيما بعد في البند الحالي، وسنوضح ذلك بمثال مبيعات الشركة مقابل مبيعات الصناعة. أولا : سنقدم المؤشر الإحصائي لديربن-واطسون والذي يكون المدخل الأكثر إستخداما عن تمثيل البواقي بيانياً لاكتشاف عدم الإستقلال بين الأخطاء .

المؤشر الإحصائي لديربن- واطسون: إختبار وجود الأخطاء المرتبطة ذاتيا:

The Durbin - Watson Statistic: Testing the Existence of Autocorrelated Errors

كيف نستطيع أن نحدد ما إذا كان نموذج الإنحدار يعاني من عدم استقلال الأخطاء؟ ان إحصاء ديربن-واطسون هو المؤشر الشائع للعلاقة بين البواقي المتجاورة بمعنى كيف يكون خطأ واحد يرتبط بالخطأ السابق. نحن لن نتوسع في عملية حساب إحصاء ديرين- واطسون ولكن نركز على مفهومه

جدول (١١-٨)

يوضح مخرجات مبيعات الشركة ومبيعات قطاع الصناعة بإستخدام SAS

```
Model: MODEL1
Dependent Variable: COSALES

Analysis of Variance

                         Sum of          Mean
Source          DF      Squares        Square      F Value       Prob>F

Model            1    190.22435     190.22435     5163.651       0.0001
Error           14      0.51575       0.03684
C Total         15    190.74010

    Root MSE        0.19194     R-square        0.9973
    Dep Mean       47.38250     Adj R-sq        0.9971
    C.V.            0.40508

Parameter Estimates

                  Parameter       Standard     T for H0:
Variable  DF       Estimate          Error   Parameter=0    Prob > |T|

INTERCEP   1      -2.971936     0.70238479        -4.231        0.0008
INDSALES   1       0.176511     0.00245637        71.859        0.0001

Durbin-Watson D              0.843
(For Number of Obs.)            16
1st Order Autocorrelation    0.530

                 Dep Var   Predict  Std Err             Std Err  Student                        Cook's
 Obs    DATE     COSALES     Value  Predict   Residual  Residual Residual    -2-1-0 1 2              D

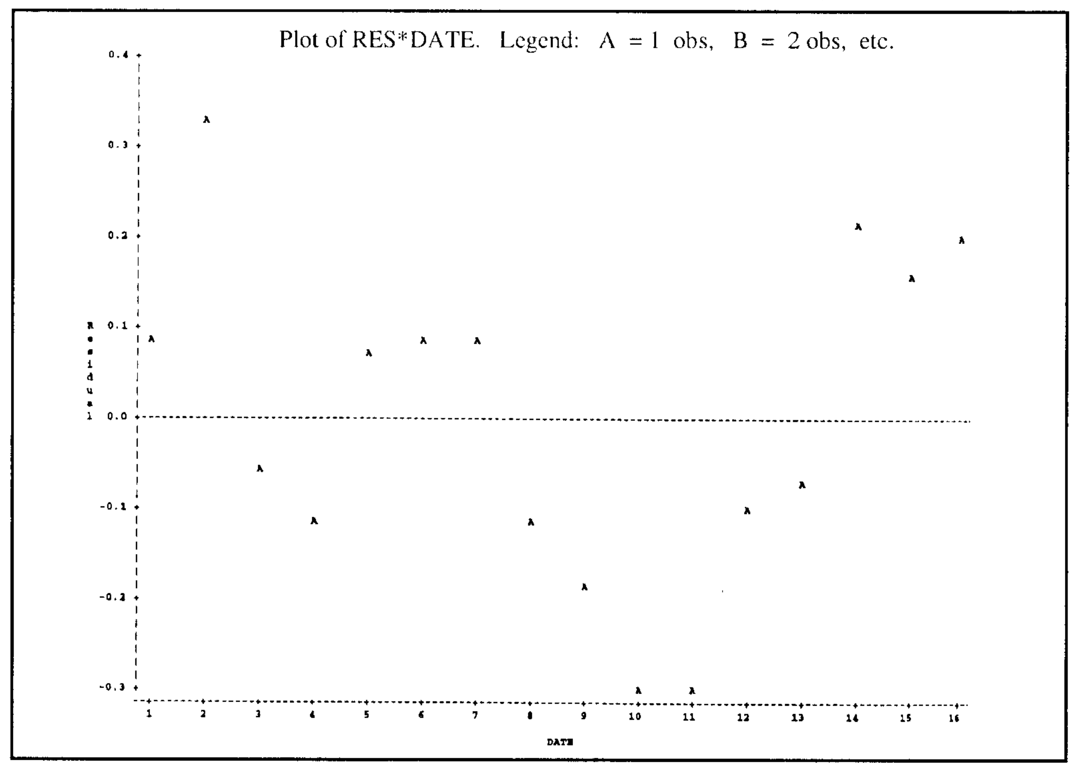
   1       1     44.8400   44.7496    0.060     0.0904    0.182     0.496   |      |       |     0.014
   2       2     42.9700   42.6350    0.082     0.3350    0.174     1.929   |      |***    |     0.411
   3       3     41.9800   42.0313    0.089    -0.0513    0.170    -0.302   |      |       |     0.012
   4       4     42.7500   42.8680    0.079    -0.1180    0.175    -0.675   |     *|       |     0.047
   5       5     43.9500   43.8741    0.068     0.0759    0.179     0.423   |      |       |     0.013
   6       6     45.6500   45.5651    0.054     0.0849    0.184     0.461   |      |       |     0.009
   7       7     46.8700   46.7795    0.049     0.0905    0.186     0.488   |      |       |     0.008
   8       8     47.3500   47.4714    0.048    -0.1214    0.186    -0.653   |     *|       |     0.014
   9       9     48.1300   48.3187    0.050    -0.1887    0.185    -1.018   |    **|       |     0.037
  10      10     47.9500   48.2481    0.049    -0.2981    0.185    -1.607   |   ***|       |     0.092
  11      11     49.1000   49.4024    0.056    -0.3024    0.184    -1.646   |   ***|       |     0.124
  12      12     48.5200   48.6258    0.051    -0.1058    0.185    -0.572   |     *|       |     0.012
  13      13     50.2200   50.2850    0.063    -0.0650    0.181    -0.358   |      |       |     0.008
  14      14     51.1500   50.9381    0.069     0.2119    0.179     1.183   |      |**     |     0.104
  15      15     52.7800   52.6220    0.087     0.1580    0.171     0.924   |      |*      |     0.111
  16      16     53.9100   53.7058    0.100     0.2042    0.164     1.248   |      |**     |     0.292

Sum of Residuals                    0
Sum of Squared Residuals       0.5157
Predicted Resid SS (Press)     0.6918
```

فقط، أن حسابه سوف يتم بواسطة الحاسب الآلي. -الصيغة الخاصة بإحصائية ديربن-واطسون هي:

$$DW = \frac{\sum(e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2} \qquad \textbf{(11.20)}$$

حيث e_t تمثل الخطأ الناتج من معادلة المربعات الصغرى عند الفترة t. كما ترى في الصيغة (11.20) نجد أن بسط مؤشر ديربن- واطسون(DW) مبني على الفرق بين البواقي المتتالية. وإذا كانت الأخطاء مستقلة حقا، فإن قيمة (DW) يجب أن تقع بالقرب من 2.0 (عموما هي تختلف عن 2.0 بسبب إختلاف المعاينة).



شكل (١١-١٠) : الشكل الإنتشار للبواقي مقابل الزمن في معادلة الإنحدار بإستخدام SAS

وكلما كانت أصغر بكثير من القيمة 2.0، كلما كان الدليل أقوي على الإرتباط الذاتي الموجب. ويكون الفرض العدمي: أنه ليس هناك ارتباط ذاتي ويكتب كما يلي: $(H_0: \rho = 0)$. حيث ρ (حرف يوناني رو) هو المؤشر الممثل لمعامل الإرتباط الذاتي في المجتمع، كما سيتم توضيحه فيما بعد. قيمة P لهذا الفرض تعتمد على عدد الفترات (n) للبيانات وعدد المتغيرات المتنبأ بها (k) (التفسيرية) في نموذج الإنحدار وقيم بيانات معينة الخاصة بالمتغيرات المتنبأ بها.

الفرض العدمي لعدم الإرتباط الذاتي يمكن اختباره بواسطة مقارنة قيمة إحصاء ديربن - واطسون (عادة تظهر في الحاسب الآلي) بحدود عليا وصغرى موضوعة في جداول (يرمز لهما بالرمز d_U, d_L). والحدود كدالة في k,n تمثل الإمكانيات القصوى نسبيا وهى معطاة تفسيرية في جدول F (ملحق في نهاية الكتاب).

على سبيل المثال، إفترض أن لديك (n=20) فترة للبيانات، (k=3) متغيرات تفسيرية. من جدول F سوف نرى أن $(d_L=1.00)$، $(d_U=1.68)$. هذا يعني أنه لو كانت قيمة إحصاء ديربن-واطسون DW

أقل من $D_L = 1.00$، فإن قيمة P (P-value) لن تزيد عن 05.، وهى تعنى أن دليل العينة يكون ضد الفرض العدمي، بمعنى أن هناك ارتباط ذاتي. أما اذا كانت قيمة إحصاء DW تقع بين 1.00 ، 1.68 يكون دليل العينة غير حاسم (غير قاطع). هذه المنطقة غالبا ما تسمى "المنطقة الرمادية" في تطبيق إحصاء ديربن-واطسون. اذا زادت قيمة إحصائية DW عن $d_U=1.68$ إذن تعتبر قيمة P كبيرة بدرجة كافية كدليل العينة لأن يدعم إدعاء الفرض العدمي بعدم وجود الإرتباط الذاتي.

بالنسبة لمبيعات الشركة مقابل مبيعات الصناعة، لاحظ من وسط الجدول (١١-٨) قيمة (DW=0.843) . لكي تختبر:

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho > 0$$

نجد أن الحدود العليا والصغرى عند (n =16), (K=1) هي: $(d_L = 1.10), (d_U = 1.37)$. ولأن (DW =.843) أقل من $(d_L = 1.10)$، فإن دليل العينة يكون كافي ليعارض أو يناقض الفرض العدمي. لذلك يوجد سبب لأن تصدق أن الأخطاء مرتبطة ذاتياً.

المقاييس الإصلاحية عندما تكون الأخطاء المرتبطة ذاتيا ظاهرة :

Remedial Measures When Autocorrelated Errors Are Uncovered

ماذا تفعل عندما تكتشف ارتباط ذاتي بين الأخطاء ؟ نقوم بدمج الأخطاء غير المستقلة في طبيعتها والمتسلسلة زمنيا في نموذج الإنحدار المعتاد كما يلي، في البداية نبدأ بنموذج الانحدار العادي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \dots\dots \beta_k X_{k,t} + \varepsilon_t \quad \dots\dots \qquad \textbf{(11.21)}$$

الآن نفترض أن الاخطاء في الفترات t, t-1 ليست مستقلة ولكن مرتبطة بالطريقة الآتية:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t \quad \dots\dots\dots \qquad \textbf{(11.22)}$$

لاحظ أن الصيغة (11.22) تشبه نموذج الإنحدار الخطي بدون المقدار الثابت. إن متغير الإستجابة response variable هو ε_t والمتغير المتنبأ به (التفسيري) هو ε_{t-1}. وهكذا النموذج يوضح أن الخطأ في الفترة t يتحدد جزئيا بواسطة الخطأ في الفترة t-1. هذه تسمى علاقة ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى first-order autoregressive. الرمز v يمثل الأخطاء العشوائية والتي يفترض أن تكون مستقلة. المعامل ρ هو ميل العلاقة الخطية بين ε_t , ε_{t-1} بالإضافة إلى ذلك فإن ρ يمكن أن تكون معامل الإرتباط بين ε_t , ε_{t-1} .

ولهذا يسمى معامل الإرتباط الذاتي وهو نفس المؤشر المستخدم في تطبيق مؤشر ديربن-واطسون. ولكي نقدم نموذج التنبؤ، يجب أن نقدر المؤشرات $(B_1, B_2, \dots B_k)$ وكذلك P. تقديرات المربعات الصغرى يمكن الحصول عليها بواسطة إجراءات متعددة والتي تخرج عن نطاق هذا الكتاب، ولكنها تستخدم في برنامج الحاسب الآلي. لذلك نحن لا نحاول أن نشرح كيف يتم الحصول على تقديرات المربعات الصغرى (نفترض الحصول عليها بواسطة برامج الكمبيوتر الإحصائية) بدلاً من ذلك فإننا نركز على إستخدامها لإنشاء التنبؤ.

إفترض أننا نريد التنبؤ بمتغير الإستجابة لعدد m فترة في المستقبل. حيث m يمكن أن تكون فترة واحدة أو فترتين أو أكثر. لكي تتنبأ بها يجب أن نقدر المؤشرات $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_k \text{ and } \rho)$ ونوفر قيم المتغيرات المتنبأ بها $X_1, X_2, \dots X_k$. وهكذا تكون معادلة الإنحدار للتنبؤ بـ m من الفترات مباشرة هي:

$$\hat{Y}_{t+m} = \underbrace{b_0 + b_1 X_{1,t+m} + \ldots\ldots + b_k X_{k,t+m}}_{\text{تنبؤ معادلة الإنحدار المعتادة بناء على قيم المتغيرات المستقلة}} + \underbrace{e_{t+m}}_{\text{تعديل التنبؤ ليعكس الاخطاء المرتبطة ذاتيا}} \qquad (11.23)$$

دعنا نناقش كل خطوة في عملية التنبؤ :

١- تقدير $(\beta_0, \beta_1, \ldots\ldots \beta_k)$. كما سبق القول فإن تقديرات هذه المؤشرات ليست تقديرات إنحدار المربعات الصغرى العادية بسبب عدم الإستقلال بين الأخطاء. كما أن إيجاد هذه التقديرات هو خارج نطاق هذا الكتاب ونفترض أنها تتم بواسطة الحاسب الآلي.

٢- توفير قيم المتغيرات المستقلة. وغالباً فان قيم المتغيرات المستقلة يجب أن يتم التنبؤ بها على فترة طويلة. هذا يحتمل حدوثه بطرق متعددة مثل التمهيد الأسي أو الوسائل التحكمية. إن إختيار الوسيلة هو أمر شخصي ويعتمد على الموقف الواحد.

٣- التنبؤ بالأخطاء ε_t كما هو موضح في الصيغة (11.22). أعتبر التنبؤ بالخطأ لفترة واحدة قادمة، أي يكون التنبؤ ε_{t+1}. من الصيغة (11.22) يمكن أن نستنتج أن:

$$\varepsilon_{t+1} = \rho\varepsilon_t + v_{t+1}$$

لكي نتنبأ بقيمة ε_{t+1}، نحتاج تقديرات لقيمة $\rho, \varepsilon_t, v_{t+1}$. إن تقديرات المربعات الصغرى للمؤشر ρ يفترض أنه يتم بواسطة الكمبيوتر. أفضل تقدير للخطأ ε_t هو ببساطة بواقي الإنحدار عند الفترة t والذي يكون e_t الذي نحصل عليه أيضا بواسطة الكمبيوتر. أفضل تقدير لـ v_{t+1} هو صفر. لأن v تمثل الخطأ العشوائي غير القابل للتنبؤ. وهكذا يكون تنبؤ ε_{t+1} هو :

$$e_{t+1} = \hat{\rho}\ e_t$$

حيث قيمة $\hat{\rho}$ هى تقدير المربعات الصغرى للمؤشر ρ والمتوفرة بواسطة الحاسب الآلي. الآن لنعتبر أن التنبؤ بالأخطاء لفترتين وما بعدها. الصيغة (11.22) تخبرنا أن خطأ الفترتين يعتمد في جزء منه على خطأ الفترة الواحدة :

$$\varepsilon_{t+2} = \rho\varepsilon_{t+1} + v_{t+2}$$

حيث يتم تقدير ρ بواسطة الحاسب الآلي كما تم سابقاً. ε_t+2 تقدر بواسطة قيمتها المتنبأ بها سابقاً v, ε_t+1 ويتم التنبؤ بها لتساوي صفر وبالتالي يكون التنبؤ بالخطأ لفترتين قادمتين كما يلي:

$$e_{t+2} = \hat{\rho}\ e_{t+1}$$

وبتعميم هذا التفكير يمكن أن تتنبأ بعدد m من الفترات المستقبلية عن طريق المعادلة:

$$e_{t+m} = \hat{\rho}\ e_{t+m-1}$$

الآن دعنا نطبق الخطوات 3,2,1 لمثال تنبؤ مبيعات الشركة بهدف أن نتنبأ بالمبيعات في فصلين ربع سنوي في المستقبل ونلاحظ أن رسم البواقي الموضح في شكل (١١-١٠) يظهر نقص في الاستقلالية بين الأخطاء كما ظهر في مؤشر ديرين- واطسون، ومن ثم نوفق نموذج الأنحدار الذاتي المحدد

بالصيغ (11.21)، (11.22) بإستخدام(PROC AUTO REG) الخاص بالبرنامج الإحصائيSAS نصل إلى جدول (١١-٩) الذي يوضح نتائج أو مخرجات البرنامج.

جدول (١١-٩)

مخرجات البرنامج SAS لمثال مبيعات الشركة مقابل مبيعات الصناعة

```
Autoreg Procedure

Dependent Variable = COSALES

Ordinary Least Squares Estimates

SSE             0.515748    DFE              14
MSE             0.036839    Root MSE   0.191935
SBC             -4.00441    AIC        -5.54959
Reg Rsq           0.9973    Total Rsq    0.9973
Durbin-Watson   0.8429

Variable      DF       B Value    Std Error   t Ratio Approx Prob

Intercept      1   -2.97193613      0.70238    -4.231      0.0008
INDSALES       1    0.17651114      0.00246    71.859      0.0001

Estimates of Autocorrelations

 Lag  Covariance  Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

   0    0.032234     1.000000 |                    |********************|
   1    0.017091     0.530215 |                    |***********         |

Preliminary MSE = 0.023172

Estimates of the Autoregressive Parameters

 Lag   Coefficient       Std Error        t Ratio
   1   -0.53021522      0.23515491      -2.254749

Yule-Walker Estimates

SSE             0.355235    DFE              13
MSE             0.027326    Root MSE   0.165305
SBC             -6.86715    AIC        -9.18491
Reg Rsq           0.9946    Total Rsq    0.9981
Durbin-Watson   1.6900

Variable      DF       B Value    Std Error   t Ratio Approx Prob

Intercept      1   -3.034447[illegible]       1.0427    -2.910      0.0122
INDSALES       1    0.17679283       0.0036    48.738      0.0001


 OBS    COSALES    INDSALES        RES

   1     44.84      270.36      0.07674
   2     42.97      258.38      0.28403
   3     41.98      254.96     -0.23282
   4     42.75      259.70     -0.09649
   5     43.95      265.40      0.13184
   6     45.65      274.98      0.03622
   7     46.87      281.86      0.03653
   8     47.35      285.78     -0.17844
   9     48.13      290.58     -0.13410
  10     47.95      290.18     -0.20700
  11     49.10      296.72     -0.15529
  12     48.52      292.32      0.04590
  13     50.22      301.72     -0.02087
  14     51.15      305.42      0.23477
  15     52.78      314.96      0.03190
  16     53.91      321.10      0.10640
```

والجزء الأول من جدول (١١-٩) هو تكرار للجدول(١١-٨) . والجزء الأوسط من جدول (١١-٩) وتحت عمود الإرتباط والصف الذي عنوانه Lag 1 ، نجد تقدير ρ ($\hat{\rho}$ =.5302) وتقديرات المؤشرات β_1,β_0 توجد بالقرب من مؤخرة جدول (١١-٩) (b_0 =-3.0344 and b_1 =.1768) . لاحظ أنه بالرغم من أن تقدير المربعات الصغرى(b1=.1768) قريب جدا للقيمة التي حصلنا عليها من جدول (١١-٨) (b_1=.1765) لكن الخطأ المعياري الآن يكون أكبر مما كان عليه من قبل. (003627. ضد 002456.) . عملية حساب عدم استقلالية الأخطاء أدت إلى تقييم أكثر واقعية للخطأ المعياري لـ b_1 جدول(١١-٩) يشير إلى أن معادلة التنبؤ لفترة تنبؤ واحدة تالية تكون :

$$\hat{Y}_t = -3.0344 + .1768X_t + e_t$$

حيث ($e_t=0.53e_{t-1}$) .

إفترض أن قيم X الخاصة بالربعين القادمين ثم تحديدهما ليكونا: (X_{17}=325),(X_{18}=330). إذن تنبؤ Y لفترة واحدة قادمة يتم الحصول عليها كما يلي:

$$\hat{Y}_{17} = -3.0344 + .1768(235) + e_{17}$$

$$e_{17} = .53e_{16} = .53(.1064) = .0564$$

حيث الباقي e_{16} يكون آخر قيمة في عمود البواقي المعطاة في نهاية جدول (١١-٩). لذلك يكون التنبؤ الخاص بالفترة 17هو:

$$\hat{Y}_{17} = -3.0344 + .1768(235) + .0564 = 54.48$$

تنبؤ الفترتين القادمتين يمكن إيجاده بواسطة:

$$\hat{Y}_{18} = -3.0344 + .1768(330) + e_{18}$$

$$e_{18} = .53e_{17} = .53(.0564) = .0299$$

ولهذا يكون تنبأ الفترة 18 هو:

$$\hat{Y}_{18} = -3.0344 + .1768(330) + .0299 = 55.34$$

مثال (١١-٢)

بالإشارة إلى مثال (١١-١) :

(أ) إستخدم إحصاء ديربن- واطسون لكي تحدد ما إذا كان هناك دليل مقنع لوجود أخطاء ذات ارتباط ذاتي موجب بنموذج الإنحدار لمبيعات الفرد الواحد مقابل نصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق.

(ب) استخدم الكمبيوتر لكي توفق نموذج الإنحدار مع اخطاء الانحدار الذاتي لبيانات مثال (11-1) ثم إستخدم معادلة الإنحدار الناتجة لكل تتنبأ بنصيب الفرد الواحد من المبيعات للسنوات 1992,1991,1990 وذلك إذا اعتبرنا أن نصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق يساوي 13000,12500,12000 بالترتيب لتلك السنوات.

الحل

(أ) جدول(١١-١) يوضح نتائج البرنامج الإحصائي SAS ويتضح أن تقدير معامل الإرتباط المقدر من الدرجة الأولى هو r =.584 وإحصاء ديربن- واطسون هو 776. ولهذا المثال، يوجد(n=32) فترة، (k=1) متغير مفسر: ومن جدول F في الملحق وبإستخدام الحدود العليا والصغرى (d_U =1.50),(d_L=1.37) فإن (DW=.776) اقل من 1.37 . ومن يتعارض دليل العينة مع الفرض العدمي الخاص بعدم إرتباط ذاتي. ولهذا فإنه يوجد دليل بإن هناك ارتباط ذاتي موجب.

(ب) ونتائج البرنامج الإحصائي SAS بإستخدام (PROC AUTOREG) معطى في جدول (١١-١٠) نتائج المربعات الصغرى العادية (بفرض أن الأخطاء مستقلة) تعطي أولا هذه المعادلة كما رأينا في مثال(١١-١) من جدول (١١-٧):

$$\hat{Y}=1,069.7216 +1.32195X$$

أما معادلة الإنحدار التي تدمج أخطاء الانحدار الذاتي معطاة في الجزء الأسفل من نتائج البرنامج الإحصائي SAS الموجودة في جدول (١١-١٠) وأنها تكون:

$$\hat{Y}_{t+m} =989.958491 + 1.331794X_{t+m} +e_{t+m}$$

لاحظ ان الخطأ المعياري للميل المقدر يرتفع من 01638. مع المربعات الصغرى العادية إلى 02796. للنموذج الذي يصحح الإرتباط الذاتي. هذا يوضح تصور الأخطاء المرتقبة (الممكنة) للاستدلال الذي يحدث بأقل من الحقيقة، عندما تستخدم المربعات الصغرى العادية في وجود

جدول (١١-١٠)
مخرجات البرنامج SAS لنموذج الأرتباط الذاتي لمثال (١١-١)

```
Autoreg Procedure

Dependent Variable = SALESPC

Ordinary Least Squares Estimates

SSE            835838.7     DFE             30
MSE            27861.29     Root MSE   166.917
SBC           423.1981      AIC       420.2666
Reg Rsq         0.9954      Total Rsq   0.9954
Durbin-Watson   0.7755

Variable     DF       B Value   Std Error   t Ratio Approx Prob

Intercept     1    1069.72160     140.95     7.590      0.0001
DPIPC         1       1.32195   0.016384    80.684      0.0001

Estimates of Autocorrelations

  Lag  Covariance  Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

    0    26119.96     1.000000 |                    |********************|
    1    15256.62     0.584098 |                    |************        |

Preliminary MSE = 17208.59

Estimates of the Autoregressive Parameters

  Lag     Coefficient      Std Error        t Ratio
    1     -0.58409830      0.15072574      -3.875239
```

تابع : جدول (١١-١٠)

```
   1    -0.58409830      0.15072574       -3.875239

Yule-Walker Estimates

SSE              532356.5     DFE              29
MSE              18357.12     Root MSE   135.4884
SBC              412.6452     AIC         408.248
Reg Rsq            0.9874     Total Rsq    0.9971
Durbin-Watson      1.7975

Variable      DF        B Value    Std Error    t Ratio Approx Prob

Intercept      1     986.958491       242.15      4.076      0.0003
DPIPC          1       1.331784     0.027962     47.629      0.0001
```

OBS	SALESPC	DPIPC	RES
1	8375	5641	-124.551
2	8632	5769	34.731
3	8654	5771	3.524
4	8746	5831	4.323
5	9052	5983	100.828
6	9317	6096	154.842
7	9664	6439	-21.844
8	10092	6745	62.766
9	10471	7006	82.211
10	10710	7213	27.189
11	11104	7412	177.588
12	11258	7522	109.758
13	11179	7744	-269.281
14	11382	7947	-117.798
15	11898	8211	85.952
16	12412	8692	-136.667
17	12215	8502	-6.688
18	12120	8613	-282.249
19	12581	8851	3.622
20	13056	9139	10.938
21	13681	9435	188.316
22	13998	9656	76.187
23	13902	9602	38.858
24	13968	9760	-91.497
25	13742	9732	-195.850
26	14002	9930	-89.318
27	14551	10419	-189.403
28	15137	10625	181.969
29	15426	10905	-83.966
30	15773	10970	225.473
31	16309	11337	120.590
32	16665	11680	-7.802

الإرتباط الذاتي. القيمة المقدرة لـ ρ هي ($\hat{\rho}$ =.584098) والتي قربت لتساوي 584. ولهذا تقدر العلاقة بين الأخطاء المتتالية لأن تكون :

$$e_{t+1} = .584\ e_t$$

حيث أن قيمة الباقي عندما تكون (t=32) مساويا (e_t=-7.8) وهي آخر قيمة في عمود البواقي في جدول (١١-١٠).

وتكون قيمة التنبؤات بنصيب الفرد الواحد من المبيعات للسنوات 1992,1991,1990 مبنية على تخطيطات لنصيب الفرد من الدخل الشخصي المتاح للإنفاق وهي 13000,12500,12000 بالترتيب لهذه السنوات كالتالي:

بالنسبة لسنة 1990:

$$\hat{Y}_{33} = 986.958 + 1.331784\, X_{33} + e_{33}$$
$$= 986.958 + 1.331781(12{,}000) + .584(-7.80)$$
$$= \$16{,}964$$

بالنسبة لسنة 1991:

$$\hat{Y}_{34} = 986.958 + 1.331784\, X_{34} + e_{34}$$
$$= 986.958 + 1.331784(12{,}500) + .584(-4.555)$$
$$= \$17{,}632$$

بالنسبة لسنة 1992:

$$\hat{Y}_{35} = 986.958 + 1.331784\, X_{35} + e_{35}$$
$$= 986.958 + 1.331784(13{,}000) + .584(-2.660)$$
$$= \$18{,}299$$

• الإختيار بين نماذج الإنحدار ونماذج السلاسل الزمنية :-

The choice of Regression Models Versus Time Series Models

أي نوع من النماذج الإحصائية يكون الأفضل عندما نختار هل هو نموذج السلاسل الزمنية مثل التمهيد الأسي أم نموذج إنحدار؟ الكثير من الدراسات تشير إلى أن التنبؤ بنماذج السلاسل الزمنية يكون دقيق مثله مثل نماذج الإنحدار في الفترات الزمنية القصيرة. وكنتيجة لأن نماذج السلاسل الزمنية مفضلة للتنبؤ قصير المدى لأنها تتطلب وقت أقل ، تشغيل على الحاسب الآلي أقل، كذلك البيانات أقل، على الجانب الآخر، فإن نماذج الإنحدار تكون عموماً أكثر دقة في التنبؤ طويل المدى. عند أي مدة زمنية تكون نماذج الإنحدار أكثر دقة ؟ لا توجد إجابة مطلقة على هذا السؤال ولكننا نوفر بعض الإرشادات العامة للسلاسل الشهرية. مثل مبيعات الشركة . وعادة تفضل السلاسل الزمنية في التنبؤ لحوالي سنتين، وتعتبر نماذج الإنحدار سائدة للتنبؤات الأكثر (الأطول) من حوالي ثلاث سنوات. وبين ٢ أو ٣ سنوات يكون الاختيار حسب رغبة الباحث.

تمارين

(١١-١٨) إذا تم إنشاء نموذج الإنحدار التالي: $\hat{Y} = 2.2 + .77X$

أ- فإذا تم التنبؤ بـ X لتساوي 77، 80، 85 في الثلاث فترات القادمة، تنبأ بقيمة Y لتلك الفترات؟

ب- بأي أنواع الوسائل يمكن أن يتم التنبؤ بقيمة X ؟

(١١-١٩)ما هي الاعتبارات الخاصة عندما تستخدم نماذج الإنحدار المبنية على بيانات السلاسل الزمنية ؟

(١١-٢٠) إفترض أن التنبو بالمتغير Y بواسطة نموذج الإنحدار يربط Y بدليل زمني:

أ- كيف يكون هذا الأسلوب متشابها لتنبؤ Y بإستخدام نموذج التمهيد الأسي الخطي لهولت ؟

ب-كيف يكون هذا الأسلوب مختلفاً عن التنبؤ بقيمةY بواسطة نموذج التمهيد الأسي الخطي لهولت؟

ج- ما هو خطر التنبؤ بقيمةY بواسطة نموذج الإنحدار الذي يربط Y بالدليل الزمني ؟

د- هل الخطر المذكور في الجزء-ج- ينطبق على نموذج التمهيد الأسي الخطي لهولت ؟ وضح ذلك

(١١-٢١) أعتبر البيانات الفصلية (الربع سنوية) الآتية :

Period	Y	X	Period	Y	X
1	121	10	7	144	21
2	92	14	8	114	25
3	135	12	9	138	30
4	104	16	10	106	28
5	128	15	11	155	32
6	99	18	12	125	36

أ- وفق نموذج الإنحدار الخطى لـ Y مقابل X . بناء على قيمة P-value حدد ما إذا كانت هناك علاقة ملحوظة موجودة.

ب- أعد توفيق نموذج الإنحدار مشتملا على متغيرات وهمية لكي تدمج الموسمية الفصلية (الربع سنوية). قارن قيمةP-value الخاصة بإختبار هذا النموذج العام بقيمةP-value في الجزء (أ). ماذا تقترح إجابتك حول أهمية دمج الموسمية في نماذج الإنحدار ؟

ج- فسر معاملات المتغيرات الوهمية لنموذج الإنحدار في جزء(ب)؟

(١١-٢٢) ماذا يعني أن نقول أن أخطاء الإنحدار مرتبطة ذاتيا ؟

(١١-٥) ملخص : Summary

في هذا الفصل ناقشنا وسائل التنبؤ الإحصائية. هذه الوسائل مبنية على تحليلات السلاسل الزمنية، حيث تتكون بيانات السلاسل الزمنية من مشاهدات أخذت بإنتظام على مرور الوقت. وتوجد نماذج أساسية معينة عادة ما تكون في بيانات السلاسل الزمنية: الإتجاه، الدورية، الموسمية.

- الإتجاه : هو إرتفاع وإنخفاض بمرور الوقت.
- الدورية : هي الحركات (التأرجح) لأعلى ولأسفل لمدة غير معينة وقدر غير معين.
- الموسمية :هي حركة تتكرر بأسلوب منتظم كل سنة.

وتوفر وسائل التجزئة أو التقسيم فهماً لهذه النماذج ولكنها لا توفر التنبؤ. وتتم التنبوات بناء على نماذج السلاسل الزمنية (مثل التمهيد الأسي) أو نماذج الإنحدار.

المراجع : References

1. G. Box and G. Jenkins, *Time Series Anabysis: Forecasting and Control,* 2 nd ed. San Francisco: Holden - Day, 1977.
2. J. Durbin and G. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, II", *Biometrika* 38, 159-178, 1951.

3. S. Makridakis, S. Wheelwright, and V.McGhee *Forecasting: Methods and Applications,* New York: Wiley, 1983.

4. C. R. Nelson, *Time Series Aralysis for Managerial Forecasting.* San Francisco: Holden-Day, 1982.

تمارين إضافية

(١١-٢٣) إن عناصر السلاسل الزمنية التي يتم التعامل معها بواسطة وسائل هذا الفصل تكون الإتجاه- الدورة والموسمية والعشوائية. أعتبر التجزئة التقليدية والتمهيد الأسي البسيط والتمهيد الأسي الخطي لهولت، أي من هذه النماذج يجب أن يستخدم في تنبؤ السلاسل التي لها الأنماط التالية:

أ-نمط مستوى أو مسطح وغير موسمي Flat and non seasonal model

ب-نمط مستوى وموسمي Flat and seasonal model

ج- نمط اتجاه غير وسمي trend - non seasonal model

د- نمط اتجاه بموسمية t rend - seasonal model

(١١-٢٤) أعتبر إختيار معاملات التمهيد للسلاسل بعد إزالة أثر الموسمية. في كل من الحالات التالية وضح أيهما أفضل إذا كانت قيمة التمهيد منخفضة(0) أم إذا كانت قيمة التمهيد مرتفعة (.5):

أ- بإختيار W في التمهيد الأسي البسيط لسلاسل زمنية بدون اتجاه، وتقلبات عشوائية قليلة ومستوى متوسط غير مستقر إطلاقاً.

ب- بإختيار W لتمهيد أسي بسيط والسلاسل بدون اتجاه، وتقلب عشوائي كبير ومستوى متوسط ثابت ومستقر.

ج- إختيار v في هولت، للسلاسل ذات الإتجاه المستقر والكثير من التقلبات العشوائية.

د-إختيار v في هولت لو كانت السلاسل ليس لها اتجاه ولها عشوائية متوسطة (معتدلة).

(١١-٢٥) افترض القيام بالتنبؤ بإستخدام البيانات التالية:

Period	Data	Period	Data
1	100	7	100
2	115	8	220
3	70	9	150
4	210	10	195
5	120	11	120
6	165	12	270

أ - ارسم البيانات مقابل دليل الفترة (t=1,2,3.....12). وأوصف عناصر نموذج هذه السلسلة الزمنية.

ب- أي طريقة أو مجموعة من الطرق تكون الأكثر ملائمة لتنبؤ في هذه السلسلة! إختار من بين التمهيد الأسي البسيط أو التمهيد الأسي الخطي لهولت او التمهيد الأسي البسيط المطبق

للبيانات بعد إزالة الموسمية. أو التمهيد الأسى الخطى لهولت بعد استبعاد الموسمية من البيانات، ثم برر إجابتك.

ج- بإستخدام وسيلتك المختارة في جزء(ب) قدم تنبؤ للبيانات الفعلية للفترات 16,15,14,13.

د- حدد متوسط مربع الخطأ لوسيلة التنبؤ التي تم اختيارها.

(١١-٢٦) متوسط مبيعات شركتك حوالي 1200 وحدة في الشهر. مبيعات هذا الشهر650 وحدة فقط وتعتقد الإدارة بإمكانية حدوث هبوط في الطلب. هل تستطيع أن نقترح بعض التوضيحات أو التفسيرات لرقم المبيعات المنخفض لهذا الشهر؟ (أعتبر الآثار المكنة لمكونات السلاسل الزمنية)

(١١-٢٧) إذا طلب منك أن تنشأ نموذج للتنبؤ على طلب المنتج (XT-100) وسوف تستخدم التمهيد الأسي البسيط وليس لديك أي بيانات تاريخية منذ أن قدم هذا المنتج. فإذا تم إختيار معامل التمهيد بطريقة تحكمية أي قيمة سوف نختارها من بين (W=.05) أم (W=.2) أم(W=.4) وضح إجابتك ؟

(١١-٢٨) لماذا يتأخر (Lag) التمهيد الأسي البسيط عندما تكون السلسلة لديها اتجاه ؟ وضح ذلك ؟

(١١-٢٩) إذا قمت بأنشاء نموذج للتمهيد الأسي البسيط لسلسلة زمنية وكان لديك 15 نقطة من بيانات:

أ- أوصف المدخل التقليدي لإنشاء قيمة A_t وعلى الأقل مدخل واحد بديل.

ب- هل وسيلة الإنشاء لديها تأثير كبير على التنبؤ الفترة 16 ؟.

ج- هل وسيلة الإنشاء لديها تأثير كبير على إختبار W لو رغبنا في تقليل متوسط مربع الخطأ.

(١١-٣٠)محلل في شركة تليفون إقليمية أسندت له مهمة التنبؤ السنوي للزيادة في عدد خطوط التليفون في الخدمة في سنة ما . فإذا تم إستخدام نموذج السلاسل الزمنية ونموذج الإنحدار. حيث أن نموذج الإنحدار سوف يستخدم كأسلوب للتنبؤ بالعمالة في بناء الصناعة ككل (البيانات الاقليمية ليست متاحة) والبيانات للصناعة كما يلي :

Year	Gain	Employment (in thousands)
1978	446	130.2
1979	591	138.4
1980	569	128.3
1981	490	116.3
1982	262	103.8
1983	688	113.9
1984	667	132.8
1985	757	152.0
1986	899	168.1
1987	741	173.6

أ- تنبأ بالزيادة (Goin) في السنوات 1990,1989,1988 بإستخدام التمهيد الأسي الخطي لهولت عندما (W=.4),(v=,4).

ب- تنبأ بعمالة الصناعة ككل للسنوات 1990,1989,1988 بإستخدام التمهيد الأسي الخطي لهولت عندما (W=.4),(v=.4).

ج- أحسب خط إنحدار المربعات الصغرى لمتغير الزيادة بمعلومية عمال الصناعة. بناء على قيمة P- value حدد ما إذا كانت هناك علاقة خطية بين الزيادة وعمالة الصناعة.

د- إستخدم نموذج الإنحدار من جزء "حـ" لكي تتنبأ بالزيادة للسنوات 1990,1989,1988، بناء على تنبؤ لعمالة الصناعة من جزء "ب".

هـ- في أي تنبؤ تكون أكثر ثقة ، هل عند إستخدام أسلوب هولت للتنبؤ أم التنبؤ بالإنحدار ؟ إشرح لماذا (لا توجد إجابات صحيحة لهذا السؤال)

(١١-٣١) لدي جمعية الكشافة للفتيات متجر بيع بالتجزئة. فإذا كان مدير المتجر مسئول عن كافة المشتريات والمخازن والمبيعات وإذا كانت قيود الميزانية متعددة وكل قسم يتم تقييمه حسب قدرته في تحقيق وتخطيط الميزانية وأن مدير المتجر لديه الفرصة ليطلب كميات كبيرة من الإمدادات في يونيو من المركز الرئيسي القومي لفتيات الكشافة بمدينة نيويورك. الإمدادات المطلوبة في يونيو يمكن أن تشتري بواسطة خصم كبير بالرغم من ذلك فإن ميزانية مجلس الولاية تتطلب أن يكون المخزون منخفض جدا بنهاية السنة الحالية في ديسمبر. فإذا كانت المبيعات يمكن التنبؤ بها بدقة، فإن مدير المحل يمكنه أن يحقق مدخرات ذات قيمة بطلب بضائع عند مستوى خصم شهر يونيو. فإذا كانت المبيعات لسلعة معينة هي الأساس وتنسب إليها مبيعات السلع الأخرى وكانت مبيعات تلك السلعة متاحة من يناير1989 حتى أبريل 1992 كما يلي:

Year	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Agy	Sep	Oct	Nov	Dec
1989	171	219	263	290	278	238	125	147	349	449	381	251
1990	219	252	280	279	313	353	102	172	362	491	428	315
1991	250	274	347	301	260	174	152	171	308	562	480	341
1992	265	320	342	353								

أ-ارسم البيانات في ترتيب زمني، وصف النموذج إذا أمكن الوصول إلى ذلك.

ب- طبق أسلوب التجزئة التقليدية كما يلي:

(1) تقدير العوامل الموسمية.

(2) الحصول على بيانات بعد إزالة الموسمية.

ج- لو استخدمت طريقة هولت للتنبؤ بالبيانات بعد إزالة الموسمية أي القيم (v,w) سوف تكون أكثر ملائمة: القيم الكبيرة (w=.2), (v=.5) أم القيم الصغيرة (w=.1)، (v=.2) ؟ وضح ذلك.

د- تنبأ بالبيانات بعد إزالة الموسمية للفترة من مايو 1992حتى ديسمبر 1992 بواسطة وسيلة هولت مستخدما(w=.1),(v=.2) حدد متوسط مربع الخطأ.

هـ- تنبأ بالبيانات بعد إزالة الموسمية من مايو 1992 وحتى ديسمبر ١٩٩٢ بواسطة وسيلة هولت مستخدما (w=.1),(v=.5) حدد متوسط مربع الخطأ.

و- إختيار أسلوب التنبؤ الخاص بالمبيعات بعد إزالة الموسمية بناءا على اختيارات لقيم w,v والتي تجعل متوسط مربع خطأ MSE أقل ما يمكن. إستخدم عوامل الموسمية من جزء (ب) للتحول إلى تنبؤ المبيعات الفعلية للسلعة المختارة من مايو 1992 حتى ديسمبر 1992.

ملحق ١١ : Appendix -11

تعليمات الحاسب الآلي بإستخدام البرامج الإحصائية الجاهزة Minitab, SAS

عند تحديد نماذج المربعات الصغرى للتنبؤ، فإن التعليمات الأساسية لإستخدام البرامج الجاهزة SAS، تكون مثلها مثل تلك الأوامر التي سبق ذكرها في الفصل التاسع والعاشر. ولحساب قيمة المؤشر الإحصائي ديربن-واطسون بإستخدام البرنامج الإحصائيMinitab فإننا نستخدم الأمر الفرعيDW بعد الأمر REGESS. ومع SAS فإننا نذكر بوضوح DW كأختيار من جملة MODEL بعد الأمر PROC REG (أو الأمر GLM).

حاليا فإن Minitab لا يستطيع أعطاء تحديد مباشر لتقدير المربعات الصغرى للنماذج ذات الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولى الموضحة بالصيغة (11.22) لكن يستطيع SAS توفير ذلك عن طريق الأمر PROC AUTOREG. والتعليمات التالية (بعيدا عن تعليمات إدخال البيانات) تمكنا من الحصول على نتائج SAS لمبيعات الشركة مقابل مبيعات قطاع الصناعة ككل والموضح بياناتها في المثال (١١-٩). لاحظ أن الجملة أو الأمر LAGLIST 1 يعني الصيغة (11.22). وعلى ذلك فإن الخطأ في الفترة t يتم تحديده عن طريق الخطأ في الفترة t-1 (أي بإستخدام فترة واحدة سابقة)

```
PROC AUTOREG
MODEL SALES =INDSALES;
LAGLIST 1 ;
```



الفصل الثاني عشر

طرق الرقابة للعمليات الإحصائية

Methods For Statistical Process Control

محتويات الفصل:

(١٢-١) نظرة عامة على محتويات الفصل.

(١٢-٢) خرائط الرقابة الإحصائية.

(١٢-٣) خرائط الرقابة للمتوسط والأختلاف لمخرجات العملية: خرائط $\bar{X}$, S.

(١٢-٤) خرائط الرقابة للنسبة: خرائط P.

(١٢-٥) خرائط الرقابة لحوادث بواسون : خرائط C.

(١٢-٦) ملخص .



الفصل الثاني عشر

طرق الرقابة للعمليات الإحصائية

Methods For Statistical Process Control

(١٢-١) نظرة عامة على محتويات الفصل Bridging To New Topics

في الآونة الأخيرة، ازداد الوعي بدرجة كبيرة بجودة السلع والخدمات. ويعتمد أصحاب المصانع الذين يقوموا بإنتاج منتجات معينة وكذلك الشركات التي تقدم الخدمات بشكل متزايد على الفحص الدوري لعملياتهم، وهذا ليس فقط للتأكد من المحافظة على مستوى الجودة المطلوب، ولكن أيضا لمتابعة التحسن الذي يطرأ على جودة الخدمة أو المنتج.

في هذا الفصل، سوف نوسع النقاش الذي تم في الجزء(١-٥)من الفصل الأول فيما يتعلق بالطرق الإحصائية لتحديد مدى التغير الذي يمكن توقعه في المستقبل القريب للعملية المستقرة، وتحديد متى تصبح العملية غير مستقرة. وبصفة خاصة سوف نقدم طرق تكوين خرائط الرقابة التي يمكن إستخدامها في تقييم مدى إستقرار معلمات العملية مثل متوسط نتائج العملية، واختلافات مخرجات العملية، ونسبة المخرجات (النتائج) التي لها بعض الخصائص المحددة. ونظرا لأن معلمات العملية هي π, σ, μ فلا تندهش حين تعلم أن خرائط الرقابة التي نكونها تعتمد على الإحصائيات المماثلة وهي $P, S, \overline{X}$. بالإضافة إلى ذلك سوف نقدم طريقة لتحديد خرائط الرقابة لمراقبة المعدل المتوسط حيث نجد بعض الأحداث تتبع توزيع بواسون.

(١٢-٢) خرائط الرقابة الإحصائية: Statistical Control Charts

لاحظنا من الجزء (١-٥) أنه يمكن التحقق من جودة مخرجات العملية عن طريق فحص متغيرات معينة (خصائص الجودة) التي تصور بعض مظاهر أداء العملية. وفي هذا الجزء يمكننا القول أن تحديد ما إذا كانت العملية مستقرة أم لا يعتمد على أسباب الاختلاف في هذه المتغيرات.

أنواع الاختلاف Types of Variation

في أي عملية، توجد كمية معينة من الاختلاف في خاصية الجودة لايمكن إجتنابها. وكما سبق الإشارة في الفصل الأول، يوجد اختلافات شائعة تعزي إلى عوامل طبيعية أو معتادة داخل العملية والتي تحدث على مر الزمن، وهي ظاهرة طبيعية لا يمكن التخلص منها كلية. وإذا كان هذا هو السبب الوحيد لتغير خصائص الجودة على مر الزمن، فإنه يمكن إعتبار العملية مستقرة. وعلى الجانب الآخر، يمكن أيضا أن يرجع الاختلاف إلى أسباب غير معتادة أو يمكن تحديدها في شكل قصور الآلة، أو الصيانة غير الملائمة، لا مبالاة العامل، نقص في التدريب الصحيح، نقص جودة

المواد الخام ، وما إلى ذلك . ولا يمكن إعتبار كل هذه الأسباب عوامل عادية داخل العملية التي تحدث بشكل طبيعي على مر الزمن . وفي الواقع تشكل هذه الأحداث عملية غير مستقرة وسوف تظل غير مستقرة إذا لم يتم إتخاذ الإجراءات الصحيحة لإزالة هذه الأسباب الخاصة للاختلاف .

والتمييز بين العمليات المستقرة والعمليات غير المستقرة له أهمية كبيرة ، لأن تحسين كل عملية يستلزم القيام بإجراءات مختلفة عن العملية الأخرى . ويتطلب تحسين العملية المستقرة التقليل من سبب الاختلاف الشائع الذي يعزى إلى عوامل عادية داخل العملية . وهذا يتطلب التعاون بين مهندسي العملية والمديرين لإعادة تصميم العملية بهدف التقليل من سبب الاختلاف الشائع . ولجلب الإستقرار للعملية غير المستقرة ، يلزم أن نعين ونزيل أسباب الاختلاف التي يمكن تحديدها . وعادة ما يعتمد ذلك على مساعدة الأشخاص الذين لهم دور مباشر في العملية ، مثل العمال على الآلة أو مندوبي المبيعات . ومع ذلك ، فمن المهم فهم أن تحقيق الإستقرار في العملية لا يعني إيقاف الجهود الإضافية للتحسين ولا يعني أيضا بالضرورة أن تكون مخرجات العملية مقبولة .

ملامح خرائط الرقابة:

تذكر من الجزء (١-٥) أن خرائط الرقابة هي أداة مفيدة في تقييم إستقرار أو عدم إستقرار العملية فيما يتعلق بمعالم العملية الهامة . وخريطة الرقابة هي رسم بياني لقيم إحصاء ما على مر الزمن . ويعتمد تكوين خرائط الرقابة على العينات الدورية من العملية التي تنتج قيم الإحصاء محل الإهتمام . وهذه العينات الدورية هي المجموعات الفرعية النسبية المذكورة في الفصل الأول .

وتحتوى خرائط الرقابة على خط مركزي يمثل قيمة المعلمة للعملية المستقرة ، وكذلك حدود تحكم عليا ودنيا ، التي توضح المدى المعتاد لتغير الإحصاء ، وذلك للعملية المستقرة . وعادة يتم تحديد الحدود الدنيا والعليا من القيم السابقة للإحصاء المشاهد عندما يعتقد أن العملية أصبحت مستقرة . وأفضل طريقة عملية للوصول إلى حدود التحكم العليا والدنيا هو أخذ ثلاث وحدات من الخطأ المعياري أعلى وأسفل متوسط الإحصاء محل الإهتمام . ومن الشائع أن يتم الإشارة إلى ذلك بحدود 3σ (three - sigma) وهذا ما سيتم إستخدامه في هذا الفصل .

الشكل الذي يتغير به قيمة الإحصاء على مر الزمن يوضح ما إذا كان يمكن إعتبار العملية مستقرة أم لا . فإذا كانت العملية مستقرة ، فيجب أن تظهر خرائط الرقابة شكلا لا يمكن التمييز من خلاله بين قيم الإحصاء . بمعنى آخر ، يجب أن تظهر القيم سلوكا عشوائيا ، مع إقتراب الغالبية العظمى من هذه القيم من الخط المركزي ، حيث توجد بعض القيم أعلاه وتوجد بعض القيم الأخرى أسفله ، مع عدم وجود القيم المتزايدة أو المنخفضة في المدى الطويل ، وكل القيم توجد بين حدود التحكم العلياوالدنيا . والآن يكون قد اتضح لك سبب توقع أن العملية المستقرة هي التي تظهر بهذا الأسلوب . فإذا كانت العملية مستقرة ، فيمكن التنبو بسهولة بسلوكها لأن الاختلاف الوحيد الموجود يكون بسبب العوامل الطبيعية أو المعتادة داخل العملية . وبناءً على ذلك ، تنحرف قيم الإحصاء محل الإهتمام عن الخط المركزي بسبب إختلافات خطأ المعاينة فقط .

وعلى الجانب الآخر ، أي أشكال يمكن تمييزها مثل الإتجاه العام (وجود قيم متزايدة أو منخفضة في الأجل الطويل) ، التذبذب المتسق للقيم أعلى وأدنى الخط المركزي (الشكل المتعرج) ، التتابع الطويل غير المعتاد للقيم أعلا وأدنى الخط المركزي ، أو القيم خارج حدود التحكم ، كل هذا يوحي بوجود أسباب للاختلاف يمكن تحديدها وهكذا تكون العملية غير مستقرة .

المجموعات الفرعية المنطقية:

تذكر من الجزء(١-٤) في الفصل الأول أننا مهتمين على حد سواء بتصوير الاختلافات بين مخرجات العملية المنتجة في وقت معين واختلافات المخرجات المنتجة في أوقات مختلفة. ولعمل ذلك، نأخذ عينة صغيرة من المخرجات المنتجة في نفس أوقات المقارنة كلما أمكن ذلك ونعيد الإختيار لمثل هذه العينات على فترات منتظمة. ويتم إختيار فترات المعاينة بطريقة شخصية وذلك لتمييز نوع الاختلاف الذي يمكن أن يظهر في العملية على مدى فترة ضيقة إلى حد ما من الوقت. وتعتمد الفترة الزمنية على معلوماتنا عن العملية. فعلى سبيل المثال، في العمليات الإنتاجية النموذجية، نرغب في تحديد ما إذا كانت فروق الاختلاف موجودة بين مخرجات العملية في الصباح ومخرجات العملية بعد الظهر. فإذا لم يتم كشف فروق الاختلاف، عندئذ ربما يوجد بعض العوامل غير العادية (عوامل اختلاف يمكن تحديدها) يمكن أن تسبب هذه الفروق. لذلك نأخذ عينات في وقت محدد في الصباح وفي وقت محدد بعد الظهر (أو كما يحدث غالبا، لدينا تفويض بذلك من واقع معرفتنا بالعملية).

وهذه العينات الدورية هي مجموعات فرعية منطقية أو معقولة. وعلى الرغم من أنه لا يمكن إعتبار أن المجموعات الفرعية منطقية أو معقولة هي عينات عشوائية بحته، إلا أنها تعطي قيم الإحصاء محل الإهتمام وذلك لوضعها على خريطة الرقابة لتقييم مدى إستقرار العملية.

تمارين

(١٢-١)ما هو هدف خرائط الرقابة ؟

(١٢-٢) ما هي خريطة الرقابة، وما هي ملامحها ؟

(١٢-٣) متى يمكن إعتبار أن العملية مستقرة ؟

(١٢-٤) متى يمكن إعتبار أن العملية غير مستقرة ؟

(١٢-٥) هل يكون كافيا أن نقول أن العملية مستقرة طالما أن قيم الأحصاء موضع الاهتمام باقية داخل حدود التحكم؟ وضح ذلك.

(١٢-٦) كيف يمكن تحسين العملية المستقرة؟

(١٢-٧) كيف يمكن جعل العملية غير المستقرة مستقرة؟

(١٢-٨) ما الوظيفة التي تقوم بها حدود التحكم في خريطة الرقابة ؟

(١٢-٣) خرائط الرقابة للمتوسط والاختلاف لمخرجات العملية: خرائط $\overline{X}$, S

Control Charts for The Average and Variation of Process Outputs: $\overline{X}$ and S Charts

نستخدم خريطة $\overline{X}$ لتقييم إستقرار العملية بالنسبة لمتوسط المخرجات. وكما يدل الاسم، فإن الخريطة $\overline{X}$ هي رسم بياني لقيم الإحصاء $\overline{X}$ الناشئة عن المجموعات الفرعية المنطقية، حيث يتم تحديد حدود التحكم العليا والدنيا بالأخذ في الإعتبار الخطأ المعياري لقيم $\overline{X}$ عندما تكون العملية مستقرة.

وتستخدم خريطة S لتقييم مدى إستقرار العملية بالنسبة للاختلاف. وكما يمكن أن تتوقع،

خريطة S هو رسم بياني لقيم الإنحراف المعياري للعينة S. حيث - كما رأينا في خريطة $\overline{X}$ - يتم تحديد الحدود العليا والدنيا بالأخذ في الإعتبار الخطأ المعياري لقيم S عندما تكون العملية مستقرة. وبطريقة تقليدية، يتم إستخدام المدى R في خرائط الرقابة لتصوير اختلافات مخرجات العملية بسبب سهولة حسابه. في الواقع، فإن خريطة R ظلت شائعة الا ستخدام حتى اليوم. لكن مما لاشك فيه ان خرائط S هي الأفضل لتقييم الاختلافات لأنه لا توجد أي مشاكل حسابية اليوم بسبب الإنتشار الواسع للحاسبات الآلية.

في تكوين خرائط $\overline{X}$، S، تنشأ حالتين واضحتين هما:(1) المتوسط والإنحراف المعياري للعملية قيم معلومة. (2) المتوسط والإنحراف المعياري قيم غير معلومة.

(١٢-٣-١) المتوسط والإنحراف المعياري للعملية قيم معلومة:

Process Mean and Standard Deviation Known

في حالات معينة، يكون متوسط العملية μ والإنحراف المعياري للعملية σ لخصائص الجودة معلومين. وعادة يعني معرفة هذه المعلمات أن العملية المستقرة لها منهجية مشاهدة على مر الزمن من خلال إستخدام المجموعات الفرعية المنطقية حتى النقطة التي يمكن إعتبار المعلمات عندها معلومة.

ومن المهم أن تفهم أن الإنحراف المعياري للعملية σ يمثل الاختلاف الملازم لخاصية الجودة الناشئة عن عوامل طبيعية أو عادية داخل العملية والتي تحدث بشكل طبيعي على مر الزمن. وبعبارة أخرى، تقيس σ السبب الشائع للاختلاف.

خرائط $\overline{X}$: $\overline{X}$ Charts

لتكوين خريطة الرقابة لمتوسط مخرجات العملية، بالطبع سوف نستخدم الإحصاء $\overline{X}$. في الفصل الخامس، أوضحنا أن القيمة المتوقعة لقيمة $\overline{X}$ هي μ، لذلك فإن μ هو الخط المركزي في خريطة $\overline{X}$. وأيضا أوضحنا في الفصل الخامس أن الخطأ المعياري لقيمة $\overline{X}$ هو $(\sigma/\sqrt{n})$، حيث n هي حجم كل عينة دورية. نظرا لأن $E(\overline{X})=\mu$، $SE(\overline{X})=\sigma/\sqrt{n}$، لذلك فإن حدود الرقابة العليا والدنيا والتي تناظر ثلاث وحدات خطأ معياري زيادة ونقص عن قيمة $\overline{X}$ وهي:

$$\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12.1)$$

وبعبارة أخرى، حد الرقابة الأعلى هو $(\mu + 3\sigma/\sqrt{n})$ ، وحد الرقابة الأدنى هو $(\mu - 3\sigma/\sqrt{n})$، والخط المركزي هو μ.

بالرجوع إلى القاعدة التجريبية أو قاعدة تشيبشيف مع تحفظ شديد (انظر الفصل الثاني)، يمكن أن نفهم بسهولة لماذا تم إستخدام حدود (3σ) بشكل تقليدي في خرائط الرقابة. وفي العملية المستقرة، نتوقع عمليا أن كل قيم الإحصاء تقع داخل حدود ثلاث وحدات للخطأ المعياري لمتوسط الإحصاء. وهذا صحيح بشكل خاص للإحصاء $\overline{X}$، نظرا لأن توزيع المعاينة الخاص بهذا الأحصاء تقترب من التماثل بشكل سريع نسبيا (نظرية النهاية المركزية) بغض النظر عن توزيع العملية. ويوضح المثال التالي تحديد خريطة الرقابة لهذه الحالة.

مثال (١٢-١)

بالرجوع إلى المثال في الفصل الخامس والذي فيه يتم محاكاة عملية تعبئة الصناديق بمادة

منظفة. خاصية الجودة هنا هي وزن المنظف في الصندوق . والعملية هي تعبئة الصناديق بمتوسط ($\mu = 50$) أوقية من المنظف ويختلف وزن المنظف من صندوق لآخر بإنحراف معياري (σ=0.5) أوقية. إفترض أنه قد تم اختيار عينات تحتوي كل منها على عشرة صناديق وذلك ثلاث مرات في اليوم. إستخدم الخمس عشرة عينة الأولى في جدول(٥-١) لعمل خريطة $\overline{X}$ ولتحديد مدى إستقرار العملية بالنسبة لمتوسط الحجم المعبأ.

الحل:

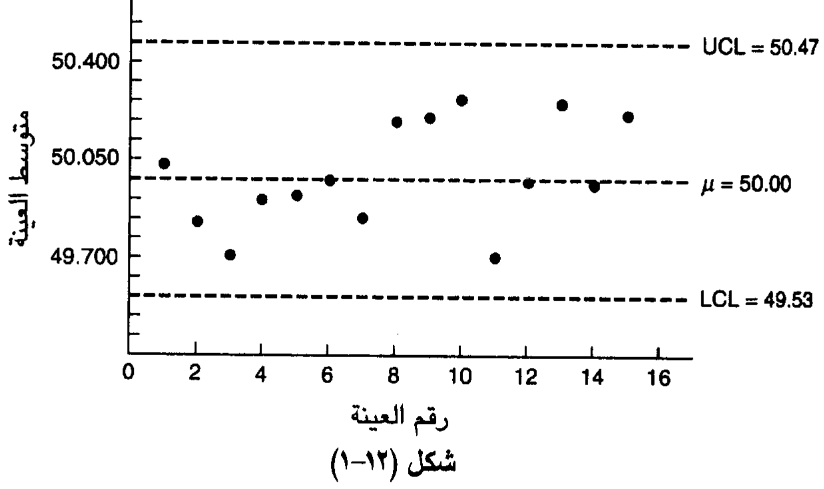
نظرا لأننا نعلم أن ($\mu = 50$; σ =0.5)، فإن الخطأ المعياري لقيم $\overline{X}$ عندما (n=10) هو :

$$SE(\overline{X}) = .5/\sqrt{10} = .1581$$

وبناء على ذلك، فإن الخط المركزي هو (μ=50) وحدود الرقابة العليا والدنيا هي:

$$50 \pm (3)(.1581) = 50 \pm .4743$$

أو 50.4743 , 49.5257 علي التوالي. وخريطة المراقبة للخمس عشرة قيمة الأولى من قيم $\overline{X}$ في جدول (٥-١) {50.02,49.84, ... , ..., ... ,50.22} موضحة في الشكل(١٢-١).



شكل (١٢-١)

خريطة $\overline{X}$ للخمس عشرة عينة الأولى في جدول (٥-١)

لاحظ من شكل (١٢-١) أن قيم $\overline{X}$ لا تقع خارج حدود الرقابة ولا يوجد شكل يمكن تمييزه. لذلك، تشير خريطة الرقابة أن العملية مستقرة في هذه الفترة بالنسبة لمتوسط الحجم المعبأ.

وعلى الرغم من أنه يمكن إعتبار أن العملية مستقرة، فلا يعني ذلك بالضرورة أنها مقبولة. نظرا لأن(μ=50), (σ=0.5)، نجد أن مدى الأختلاف للحجم المعبأ للصناديق من 48.5إلى 51.5 أوقية ($\mu \pm 3\sigma$). ويمكن إعتبار هذا المدى من الاختلاف كبير جدا. وإذا كان الأمر كذلك، فيجب بذل مجهودا لتقليل سبب الاختلاف الشائع للعملية عن طريق إعادة تصميم العملية.

خرائط S Charts: S

يمكن إستخدام خرائط S، لإختبار مدى إستقرار العملية بالنسبة لأختلاف المخرجات. ويمكن القول بأن العملية مستقرة بالنسبة لأختلاف مخرجاتها، إذا كان مدى الأختلاف لايتغير عبر الزمن، فيما عدا الأختلاف بسبب المعاينة.

وكما قلنا من قبل، تعتمد خريطة الرقابة على متوسط الإحصاء المناظر (الخط المركزي) وعلى الخطأ المعياري لـلإحصاء. وعلى الرغم من أننا استخدمنا الإنحراف المعياري للعينة S خلال هذا الكتاب، إلا أننا لم نحدد متوسطه أو خطأه المعياري. تحديد هاتين القيمتين هو في الواقع خارج نطاق العرض في هذا الكتاب. ومع ذلك يمكننا أن نقول بأن متوسط قيمة S هو:

$$E(S) = C_4 \sigma \qquad (12.2)$$

والخطأ المعياري لـ S هو:

$$SE(S) = C_5 \sigma \qquad (12.3)$$

جيث C_5, C_4 ثوابت (وعادة يرمز لهم بهذا الأسلوب) وتعتمد قيمة هذه الثوابت على حجم العينة n. في جدول(١٢-١): ثم إعطاء قيم C_5, C_4 لأحجام العينات العشوائية المستخدمة بشكل نموذجي في خرائط الرقابة.

جدول (١٢-١)

قيم C_5, C_4 لأحجام العينات النموذجية

n	4	5	6	7	8
C_4	.9213	.9400	.9515	.9594	.9650
C_5	.3889	.3412	.3076	.2820	.2622
n	9	10	12	15	20
C_4	.9650	.9727	.9776	.9823	.9869
C_5	.2459	.2321	.2105	.1873	.1613

ومن المعادلة (12.2)، لاحظ أن الإنحراف المعياري للعينة S ليس مقدر غير متحيز للإنحراف المعياري للعملية σ(لأن C_4 أقل من 1). وربما تعتقد أن هذه نتيجة غير متوقعة، عندما تأخذ بعين الإعتبار أن تباين العينة S^2 هو مقدر غير متحيز لتباين العملية σ^2. ومع ذلك، يظل الإنحراف المعياري للعينة مقدر يعتمد عليه للإنحراف المعياري للعملية σ.

ونظرا لأن القيمة المتوقعة لـ S هو $C_4 \sigma$، والخطأ المعياري لـ S هو $C_5\sigma$، فإن الخط المركزي في خريطة S هو $C_4 \sigma$، وحدود الرقابة التي تتكون من ثلاث وحدات للخطأ المعياري هي:

$$C_4 \sigma \pm 3C_5 \sigma \qquad (12.4)$$

ومن التعبير الرياضي (12.4)، ونظرا لأن σ معلومة، نجد أن حدود الرقابة تعتمد على حجم العينةn فقط.

مثال (١٢-٢)

بالرجوع إلى مثال عملية التعبئة في الفصل الخامس، إستخدم الخمس عشرة عينة الأولى في جدول (٥-١) مرة أخرى لعمل خريطة S وتحديد ما إذا كانت العملية مستقرة بالنسبة لأختلاف الحجم المعبأ.

الحل

عند: $n = 10$; $\sigma = .5$ فإن جدول (١٢-١) يمددنا بالقيم C_4=.9727; C_5=.2321 . لذلك فإن القيمة المتوقعة لـ S هو:

$$E(S) = (.9727)\ (.5) = .48635 \quad \text{(الخط المركزي)}$$

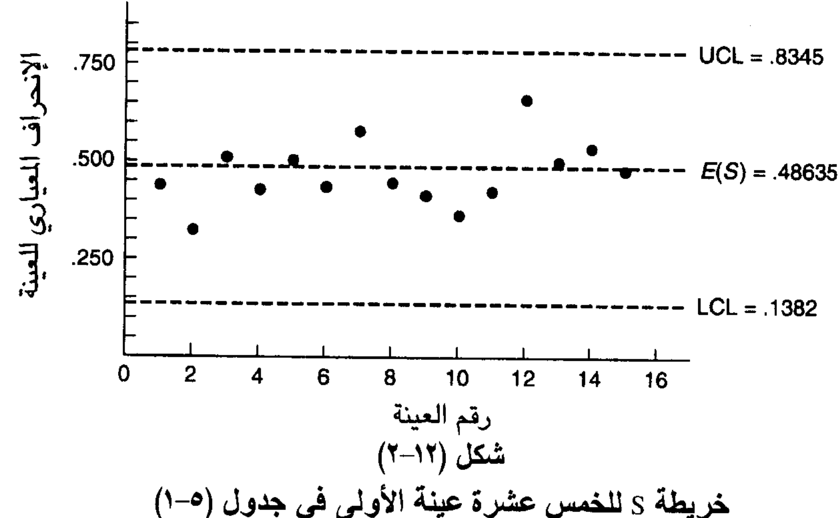
والخطأ المعياري لـ S هو:

$$SE(S) = (.2321)\ (.5) = .11605$$

وكنتيجة لذلك فإن حدود الرقابة العليا والدنيا هي:

$$.48635 \pm (3)\ (.11605) \ =.\ 48635 \ \pm .34815$$

أو هـي .8345 ، .1382 على التوالي. وبرسم الخمس عشـرة قيمة الأولى لقيم S من جـدول (٥-١) تنتج خـريطة الرقابة المطلوبة والموضحة في شكل(١٢-٢). ومـن هذا الشكل يمكن أن نرى أنه لا تقع قيم S خـارج حدود الـرقابة، كـذلك لا يوجد أي شكل مميز لهـا. لذلك فـإن العمليـة تبـدو مستقرة بالنسبة لأختـلاف الحجم المعبأ أثناء تلك الفتـرة. الآن أصبح واضحـاً وبشكل قطعي استـقرار العملية لكل المعالم الهامة للعملية وذلك قبل اعتبار أن العملية مستقرة.



شكل (١٢-٢)

خريطة S للخمس عشرة عينة الأولى في جدول (٥-١)

(١٢-٣-٢) المتوسط والإنحراف المعياري للعملية قيم غير معلومة
Process Mean and Standard Deviation Unknown

والآن سوف نأخذ بعين الإعتبار إنشاء خرائط لقيم $\overline{X}$ ، قيم S عندما تكون قيم معلمات العمليةσ,μ غير معلومة، وكما نتوقع، فعمليا نجد أن هذا هو الوضع الأكثر إحتمالا. ومن الـواضح أننا نحتاج إلى تقدير هذه القيم. ولكن كـيف نقـوم بذلك؟ ونظرا لأننا نحـتاج إلـى إنشاء الخط المركـزي وكـذلك حـدود الرقابة العليـا والدنيا، لـذلك لا يمكن أن تعتمد تقديراتنا على عـينة واحدة فـقط، ولا يجب أن تعتمد على عـدد قليل من العينات. ولأنشـاء حدود الرقـابة والخط المركزي لهـذه الحالة، فـقد أوضح شوارت W.A.Shewhart– رائد خرائط الرقابة الإحصـائية– أننا نحتاج إلى 20 عينة على الأقل. وقد أقترح Shewhart أننا نحتاج إلى أن نأخذ مشاهدات قليلة فقط(حوالي خمس مشاهدات) عند أي زمن. وقد يكون من المرغوب فيه أن يؤخذ حجم أكبر قليلاً (حـوالي عشر مشاهدات) لضمان دقة التقديرات خاصة فيما يتعلق بالإنحراف المعياري للعملية (σ).

ويدل حجم العينة الصغيرة نسبيا أنه من الأفضل أن نأخذ مشاهدات قليلة لخاصية الجودة على فترات متكررة بدلا من أخذ مشاهدات كثيرة على فترات أقل. وبالطبع هذا مبرر لإستخدام المجموعات الفرعية المنطقية. ويجب أن تعكس العينات ليس فقط اختلاف مخرجات العملية المنتجة في نفس الوقت تقريباً، ولكن أيضا اختلاف مخرجات العملية المنتجة في أوقات مختلفة. وأخيرا، فإنه من المهم إدراك أنه أيا كان عدد العينات التي نستخدمها في إنشاء الخط المركزي وحدود الرقابة، فإنه يلزم أن تكون هذه العينات مأخوذة من عملية مستقرة. والسبب بسيط، حيث إن الخط المركزي وحدود المراقبة تستخدم في قياس إستقرار النتائج في المستقبل القريب، وبالتالي فإنه يلزم أن تكون العينات المستخدمة في تحديد هذه الكميات مأخوذة من عملية مستقرة.

خرائط $\overline{X}$: $\overline{X}$ Charts

لإنشاء خريطة $\overline{X}$ عندما تكون σ, μ قيم مجهولة، إفترض أننا نأخذ $(m \geq 20)$ عينة، حيث تتكون كل عينة من n مشاهدة لخاصية الجودة. بالنسبة للعينة رقم i، إفترض أن $\overline{X}_i$ هو متوسط العينة، S_i هو الإنحراف المعياري للعينة. وبالنسبة لكل m عينة نعرف الأحصاءات التالية:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \dots\dots\dots + \overline{X}_m}{m} \qquad (12.5)$$

$$\overline{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots\dots\dots + S_m}{m} \qquad (12.6)$$

لاحظ أن الأحصاء $\overline{\overline{X}}$ هي متوسط متوسطات العينات التي عددها m، والإحصاء $\overline{S}$ هو متوسط الإنحرافات المعيارية للعينات التي عددها m.

ولإنشاء الخط المركزي وحدود الرقابة، نحتاج إلى تحديد المتوسط والخطأ المعياري للإحصاء $\overline{\overline{X}}$. ويمكن إثبات أن $\overline{\overline{X}}$ هو مقدر غير متحيز لمتوسط العملية μ حيث $(E(\overline{\overline{X}})=\mu)$. لذلك فإن قيمة $\overline{\overline{X}}$ يمكن أن تكون هي الخط المركزي في خريطة $\overline{X}$. ومن التعبير الرياضي (12.2)، نعلم أن الإنحراف المعياري للعينة رقم i (S_i) أن: $E(S_i) = C_4\,\sigma$

وفي الواقع فإنه على مستوى m من العينات، فإن القيمة المتوقعة للإحصاء $\overline{S}$ هي أيضا $C_4\sigma$.
وفيما يتعلق بتقدير الإنحراف للمعياري للعملية، دعنا نأخذ بعين الإعتبار $(\overline{S}/C_4)$ وحيث أن $(E(\overline{S})=C_4\sigma)$ فإن :

$$E\left(\frac{\overline{S}}{C_4}\right) = \frac{1}{C_4} E(\overline{S}) = \frac{1}{C_4}(C_4\sigma) = \sigma$$

وكنتيجة لذلك، فإن الإحصاء $(\overline{S}/C_4)$ هو مقدر غير متحيز للإنحراف المعياري للعملية σ.

نظرا لأن $(\overline{S}/C_4)$ هو إحصاء لتقدير σ، فإنه يتم تقدير الخطأ المعياري لقيمة $\overline{\overline{X}}$ بالقانون التالي:

$$SE(\overline{\overline{X}}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\overline{S}}{C_4}\right) = \frac{\overline{S}}{C_4\sqrt{n}} \qquad (12.7)$$

وكما هو معتاد، فإن حدود الرقابة العليا والدنيا والتي تناظر ثلاث وحدات خطأ معياري تزيد وتقل عن $\overline{\overline{X}}$ هي:

$$\overline{\overline{X}} \pm 3\frac{\overline{S}}{C_4\sqrt{n}} \qquad (12.8)$$

وبإختصار، في خريطة $\overline{\overline{X}}$ وعندما تكون معلمات العملية μ , σ غير معلومتين، فإن الخط المركزي هو قيمة $\overline{\overline{X}}$ وحد الرقابة الأعلى هو: $\left(\overline{\overline{X}}+3\left[\overline{S}/C_4\sqrt{n}\right]\right)$ وحد الرقابة الأدنى هو: $\left(\overline{\overline{X}}-3\left[\overline{S}/C_4\sqrt{n}\right]\right)$ حيث يتم إيجاد قيمة C_4 من جدول(١٢-١) .

وقبل توضيح هذا الإجراء، سوف ننشئ الخط المركزي وحدود الرقابة في خريطة S.

خرائط S Charts S

لانشاء خريطة S عندما تكون σ غير معلومة، تذكر التعبير الرياضي(12.4)، والذي يعطي حدود ثلاث وحدات سجما لخريطة S عندما تكونσ مجهولة. نظرا لأن الإحصاء المستخدم في تقديرσ إعتمادا على m عينة هو $(\overline{S}/C_4)$، وبالتعويض بهذا الإحصاء عنσ في التعبير الرياضي (12.4) ينتج الآتي:

$$C_4\left(\frac{\overline{S}}{C_4}\right)\pm 3C_5\left(\frac{\overline{S}}{C_4}\right)=\overline{S}\pm 3\frac{C_5\overline{S}}{C_4} \qquad (12.9)$$

وهذه هي حدود (3σ) لخريطة S عندما تكون σ مجهولة. الخط المركزي هو قيمة$\overline{S}$، حد الرقابة الأعلى هو $(\overline{S}+3\{C_5\overline{S}/C_4\})$ وحد الرقابة الأدنى هو $(\overline{S}-3\{C_5\ \overline{S}/C_4\})$.

مثال (١٢-٣)

بالرجوع إلى تمرين (٥-٨)في الفصل الخامس حيث كان لدينا 25 عينة كل عينة بها خمس مشاهدات، مأخوذة من عملية تنتج نوع معين من الغزل. والمشاهدات تمثل مقاومة الشد المقاسة لعينات الغزل (بالباوند). ومشاهدات 25 عينة موضحة في الجدول مع المتوسط والإنحراف المعياري لكل عينة. كون الخرائط $\overline{X}$ ، S بإستخدام (m=25)عينة.

Sample Number	Sample values					$\overline{X}$	S
1	44	46	48	52	49	47.8	3.033150
2	44	47	49	46	44	46.0	2.121320
3	47	49	47	43	44	46.0	2.449490
4	45	47	51	46	48	47.4	2.302173
5	44	41	50	46	50	46.2	3.898718
6	49	46	45	46	49	47.0	1.870829
7	47	48	50	46	47	47.6	1.516575
8	49	46	51	48	46	48.0	2.121320
9	47	42	48	44	46	45.4	2.408319
10	46	48	45	51	50	48.0	2.549510
11	45	47	51	48	46	47.4	2.302173
12	52	51	48	48	45	48.8	2.774887
13	45	45	47	49	44	46.0	2.000000
14	46	47	43	48	45	45.8	1.923538
15	48	49	52	46	51	49.2	2.387467
16	44	46	45	47	52	46.8	3.114482
17	48	50	47	46	49	48.0	1.581139
18	48	52	51	47	46	48.8	2.588436
19	47	51	50	46	49	48.6	2.073644
20	45	46	48	47	49	47.0	1.581139
21	45	48	46	45	49	46.6	1.816590
22	46	49	50	46	48	47.8	1.788854
23	49	48	46	52	45	48.0	2.738613
24	47	49	45	46	50	47.4	2.073644
25	44	51	50	48	46	47.8	2.863564

الحل:

خـرائط $\overline{X}$، S موضحـة في الأشكـال (١٢-٣)، (١٢-٤) على التـوالي*. متوسط المتوسطات للخمسة وعشرين عينة هو $\overline{\overline{X}}$=47.336 (الخط المركزي لخريطة S). أما متوسط الانحرافات المعيارية للعينات الخمس وعشرون فهو $\overline{S}$= 2.315183(الخط المركزي لخريطة S). ويتم تحديد حدود المراقبة العليا والدنيا لكل خريطة كالتالي:

نظراً لأن: $n=5$; C_4=.9400 ; C_5=.3412 (من جـدول ١٢-١). ومن التـعبـيـر الرياضي (12.8)، فإن حدود الرقابة لخريطة $\overline{X}$ هي:

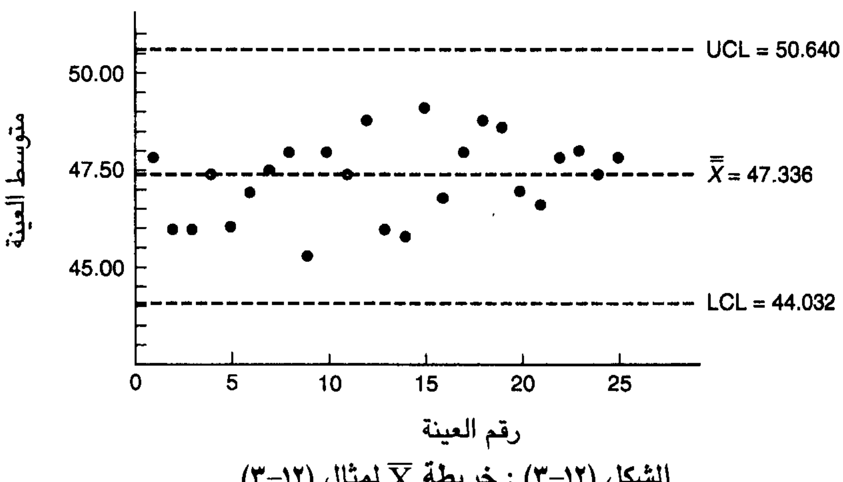
$$47.336 \pm (3)\frac{2.315183}{.9400\sqrt{5}} = 47.336 \pm 3.304$$

بالتـالي فإن الحـدود العليا والدنيـا هي (50.640) ,(44.032). وبالمثل من التـعبيـر الرياضي (12.9) حدود الرقابة لخريطة S هي:

$$2.315183 \pm 3\ \frac{(.3412)(2.315183)}{.9400} = 2.315183 \pm 2.521087$$

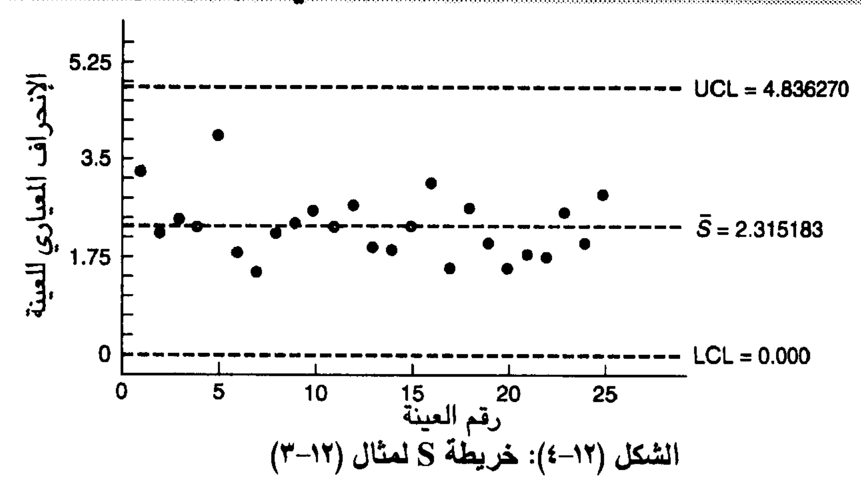
أو (4.836270) ,(205904.-). يلاحظ من هـذه النتيـجـة أن الحـد الأدنى سـالب، وهذه النتيـجـة مستحيلة حيث لا يمكن أن يكون الإنحراف المعياري سالب. وعندما يحدث ذلك فإن الحد الأدنى يوضع مساوياً صفراً.

ومن المهم ملاحظة أنه لا يوجد شكل أو نمط مميز في الرسم البياني المعروض سواء في شكل (١٢-٣)، (١٢-٤)، ولا تقع قيم من $\overline{X}$ أو قيم من S خارج حدود الرقابة الخاصة بها. لذلك تبدو العملية مستقرة عندما أخذت منها هذه العينات الـ 25. لذلك، فإنه لتقييم إستقرار العملية بالنسبة لمتوسط مخرجات العملية في المستقبل القريب، سـوف يكـون لخريطـة $\overline{X}$ خط مركـزي عند ($\overline{\overline{X}}$=47.336)، وحدود رقابة عليا ودنيا 44.032, 50.640 على التوالي. وبالمثل، لتقييم الإستقرار بالنسبة للأختلاف، سوف يوجد لدى الخريطة S خط مركزي عند $\overline{S}$ =2.315183، بحـدود رقابة عليا ودنيا هي على التوالي 4.836270 ، 0 .



الشكل (١٢-٣) : خريطة $\overline{X}$ لمثال (١٢-٣)

* ولسوء الحظ لايوجد لدى برنامج Minitab القدرة على إنشاء الخرائط $\overline{X}$ ، S مباشرة بإستخدام هذه الطريقة.



الشكل (١٢-٤): خريطة S لمثال (١٢-٣)

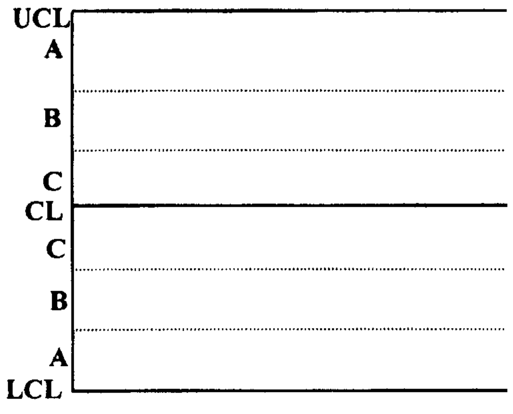
(١٢-٣-٣) إختبارات لإكتشاف الأسباب التي يمكن تحديدها بخرائط $\bar{X}$

Tests for Detcting Assignable Causes with $\bar{X}$ charts

كما ذكرنا في الجزء (١٢-٢)، إذا كانت العملية مستقرة، فيجب ألا تظهر خريطة الرقابة لمعلمة العملية شكل يمكن تمييزه على مر الزمن. وبالنسبة لخرائط $\bar{X}$، فقد قام Lloyd S.Nelson بعمل سلسلة من الإختبارات لإستخدامها في إكتشاف أسباب الأختلاف التي يمكن تحديدها، ومن ثم إكتشاف أسباب عدم الإستقرار في العملية (أنظر المرجع {5}). وقد صممت هذه الإختبارات خصيصاً لخرائط $\bar{X}$ بسبب طبيعة الإحصاء $\bar{X}$.

تذكر من الفصل الخامس أن توزيع المعاينة لقيم $\bar{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة كبيراً بدرجة كافية وذلك بغض النظر عن التوزيع الأصلي للعملية. ولهذا السبب، تتجه قيم $\bar{X}$ المعتمدة على المجموعات الفرعية المنطقية إلى أن تتطابق مع القاعدة التجريبية عندما تكون العملية مستقرة. بالتالي نجد أن حوالي 68%, 95%, 99% من قيم $\bar{X}$ تقع داخل وحدة واحدة من الإنحراف المعياري أو وحدتين أو ثلاث وحدات انحراف معياري من الخط المركزي في خريطة الرقابة على التوالي.

وفي سياق الحديث عن خريطة $\bar{X}$، تعرف المنطقة الواقعة بين وحدتين وثلاث وحدات للإنحراف المعياري من الخط المركزي بالمنطقة A. وتعرف المنطقة الواقعة بين وحدة واحدة ووحدتين للإنحراف المعياري من الخط المركزي بالمنطقة B. ويطلق على المنطقة الوسطى 68% المنطقة C. (وهي المنطقة الواقعة داخل حدود وحدة واحدة للإنحراف المعياري من الخط الركزي) وقد تم توضيح هذه المناطق الثلاث في شكل (١٢-٥).



شكل (١٢-٥) : توضيح المناطق A, B, C لخريطة $\bar{X}$

وقد أقترح نيلسون Nelson القيام بعمل ثماني إختبارات لإكتشاف سبب الاختلاف الذي يمكن تحديده بإستخدام خريطة $\overline{X}$. وتعتمد هذه الإختبارات على ما يتوقعه الفرد لسلوك خريطة $\overline{X}$ لتكون العملية مستقرة. وبصفة خاصة، تبحث هذه الإختبارات عن الأشكال التي يمكن إكتشافها. إذا كانت العملية مستقرة، يكون من السهل التنبؤ بسلوك خريطة $\overline{X}$ عندما نأخذ بعين الإعتبار القاعدة التجريبية. فعلى سبيل المثال، نتوقع أن تقع حوالي 68% من قيم $\overline{X}$ في المنطقة C، وتقع حوالي 27% ⇐ (.68-.95) داخل المنطقة B، ويقع حوالي 4% ⇐ (.95-.99) داخل المنطقة A، وأخيراً تقع جميع قيم $\overline{X}$ داخل حدود الرقابة. اذا أخذنا في الأعتبار هذا التصنيف، فيجب أن نفهم مباشرة لماذا تم توضيح سبب الأختلاف الذي يمكن تحديده لكل واحد من هذه الإختبارات. فعلى سبيل المثال، إذا تعاقبت 15 قيمة من قيم $\overline{X}$ في المنطقة C (الإختبار 7)، فمن الممكن أن يرجع ذلك إلى التأثير المتعمد، نظراً لأن هذا التصنيف يعنى أنه من غير الممكن وقوع 15 قيمة متعاقبة من $\overline{X}$ في المنطقة C.

وبالنسبة لكل إختبار من الإختبارات الثمان الآتية، تم توضيح سبب الأختلاف الذي يمكن تحديده في حالات معينة.

إختبار (1): توجد قيمة واحدة من قيم $\overline{X}$ خلف المنطقة A.

إختبار (2): توجد تسع قيم متتالية من قيم $\overline{X}$ في المنطقة C أو خلفها (أي على جانب واحد من الخط المركزي).

إختبار (3): ست قيم متتالية من قيم $\overline{X}$ كلها متزايدة أو متناقصة.

إختبار (4): أربع عشرة قيمة متتالية من قيم $\overline{X}$ تتغير لأعلى ولأسفل.

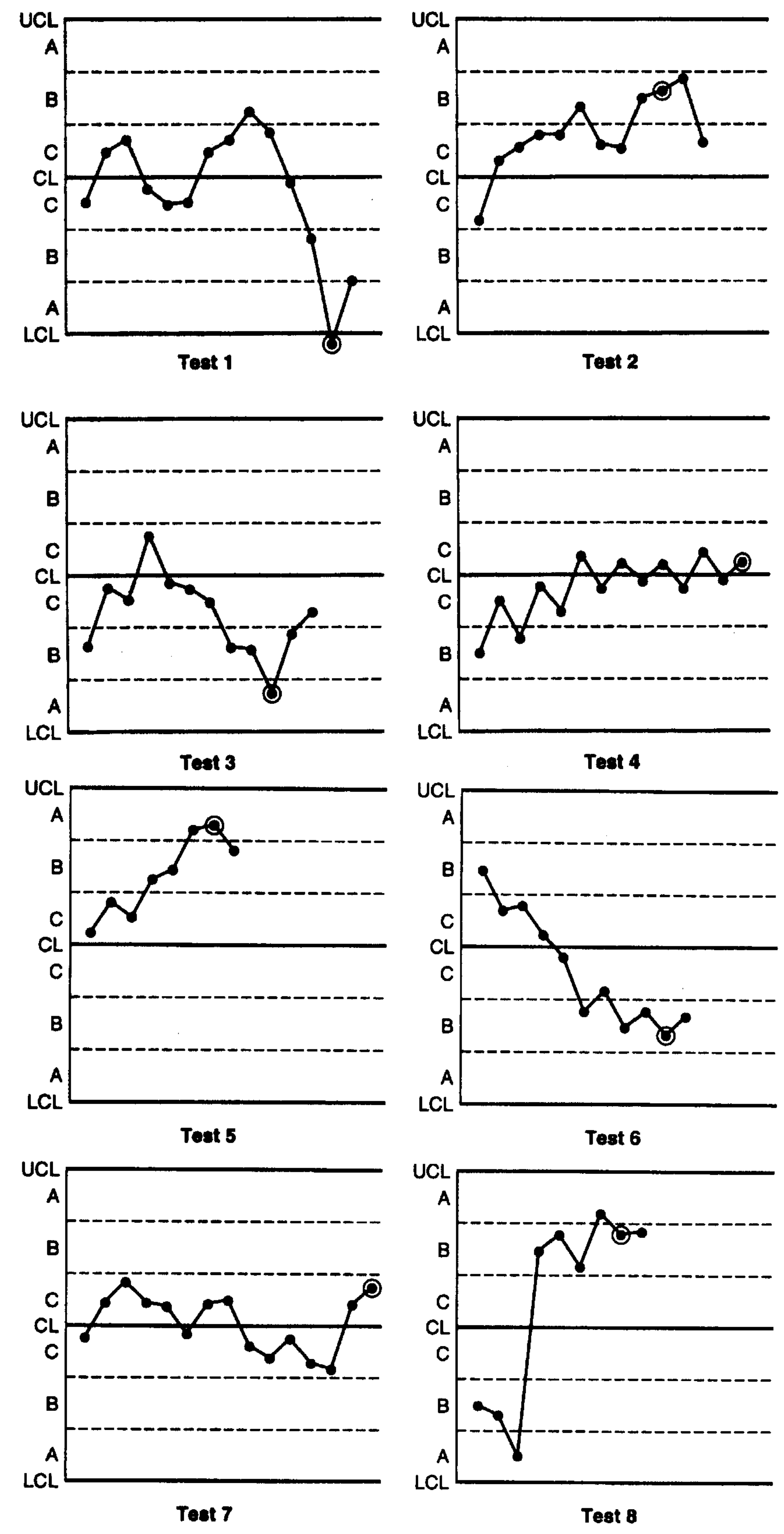
إختبار (5): قيمتين من بين ثلاث قيم متتالية من قيم $\overline{X}$ توجد في المنطقة A أو خلفها (أى على جانب واحد من الخط المركزي).

إختبار (6): أربع قيم من بين خمس قيم متتالية من قيم $\overline{X}$ توجد في المنطقة B أو خلفها (أى على جانب واحد من الخط المركزي).

إختبار (7): خمس عشرة قيمة متتالية من قيم $\overline{X}$ تقع في المنطقة C (أعلى وأدنى الخط المركزي).

إختبار (8): ثمانى قيم متتالية من قيم $\overline{X}$ تقع خلف المنطقة C (أعلى وأدنى الخط المركزي).

وقد تم توضيح الاختبارات الثمانية في شكل (١٢-٦). ومن المهم التأكيد على أن هذه الإختبارات مصممة فقط لخرائط $\overline{X}$. وهي متاحه بصفة عامة. ومع ذلك، يمكن استخدام الأربع إختبارات الأولى في سياق الحديث عن خرائط P، C، وسوف يتم تناولها في الجزئيين القادمين.



شكل (١٢-٦): الأختبارات الثمانية لاكتشاف أسباب الأختلاف القابلة للتحديد بخرائط $\overline{X}$

استخدام الكومبيوتر

يعطى برنامج مينى تاب فرصة لاستخدام أحد أو كل هذه الاختبارات على خريطة $\overline{X}$. المثال التالي يوضح مثل هذا التطبيق.

مثال (١٢-٤)

في مصنع لإنتاج الألواح الزجاجية للنوافذ، قد تم التعرف من خلال المشاهدة الفعلية أن متوسط عرض اللوح هو ($\mu=500$) ملليمتر، وانحراف معياري ($\sigma=2$) ملليمتر. والجدول التالي يوضح قيم $\overline{X}$ لأثنى عشر مجموعة فرعية، حيث تتكون كل مجموعة فرعية من $n=5$ ألواح. كون خريطة $\overline{X}$ وطبق الثماني إختبارات لإكتشاف سبب الاختلاف الذي يمكن تحديده.

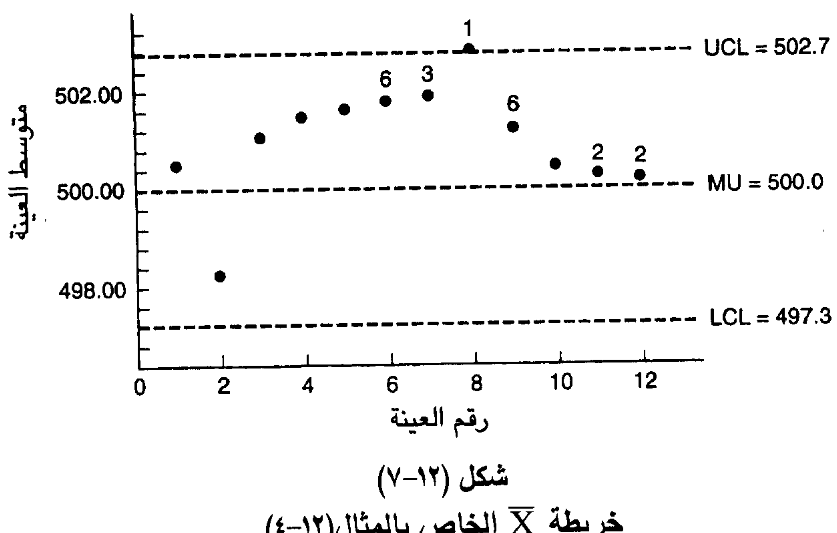
رقم العينة	1	2	3	4	5	6
قيم $\overline{X}$	500.58	498.37	501.06	501.58	501.69	501.74
رقم العينة	7	8	9	10	11	12
قيم $\overline{X}$	501.87	502.89	501.25	500.56	500.39	500.25

الحـــل

عند $n = 5$ ، $\sigma = 2$ ، نجد أن الخطأ المعياري لقيم $\overline{X}$ هو ($2/\sqrt{5} = .8944$). وعند $\mu = 500$ نجد أن حدود الرقابة عند (3σ) "three- sigma" هي 497.32 , 502.68 (برنامج Minitab يقرب هذه القيم إلى502.7 , 497.3). ولتكوين الشكل(١٢-٧) ثم نتائج الثماني إختبارات، نستخدم أمر SET لتخزين قيم $\overline{X}$ لأثنى عشر مجموعة فرعية في C_2. لذلك نستخدم أمر XBARCHART ، ونظرا لأنه تم إفتراض أن المتوسط والإنحراف المعياري للعملية معلومين، فإننا نستخدم الأمر الفرعي لتحديد قيم كل منهم. بالإضافة إلى ذلك، ونظرا لأننا لدينا فقط قيم $\overline{X}$ ولا توجد لدينا قيم المفردات العينة لكل مجموعة فرعية، سوف نضع1 بعد عمود البيانات C_2 داخل أمر XBARCHART ونستخدم أمر فرعي آخر لتحديد حجم المجموعة الفرعية (5). وتعليمات برنامج Minitab هي كالتالي:

```
MTB  > xbarchart C2 1
SUBC > mu =500 ;
SUBC >sigma = 2 ;
SUBC > subgroup 5;
SUBC > Test 1 : 8 .
```

لاحظ وجود شكل أو نمط يمكن تمييزه. وجود سبب للاختلاف قابل للتحديد، في الحقيقة يمكن أن يتم بستة إختبارات من الثماني إختبارات. الإختبارات الخاصة التي تحدد وجود سبب الاختلاف أشير إليها في الرسم البياني وتم تفسيرها أسفل خريطة الرقابة.



شكل (١٢-٧)

خريطة $\overline{X}$ الخاص بالمثال(١٢-٤)

إخـتـبـار(1) : نقطة واحدة أعلى المنطقةA، ويفشل الإختبار عند النقطة 8.

إختبار(2) : يوجد تسع نقاط في صف في المنطقة C أو خلفها (في إتجاه واحد عن CL)، ويفشل الإختبار عند النقط 11، 12.

إختبار(3): ست نقاط في صف كلها متزايدة أو متناقصة، ويفشل الإختبار عند النقاط8، 7.

إختبار(5): قيمتين من بين ثلاث قيم متتالية من قيم$\overline{X}$ توجد في المنطقة A أو خلفها (في إتجاه واحد عن CL)، ويفشل الإختبار عند النقطة 8 .

إختبار(6): أربع قيم من بين خمس قيم متتالية من قيم$\overline{X}$ توجد في المنطقة B أو خلفها (في إتجاه واحد عن CL)، ويفشل الإختيار عند النقاط 9,8,7,6.

إختبار(8): ثماني قيم متتالية من قيم$\overline{X}$ تقع في صف خلف المنطقة C(أعلى وأسفل CL)، ويفشل الإختبار عند النقطة 9.

تمـاريـن

(١٢-٩) ماهو الغرض من الخرائط $\overline{X}$ ، S ؟.

(١٢-١٠) أشرح لماذا يمكن أن تكون العملية المستقرة غير مقبولة.

(١٢-١١) في عملية إنتاج مادة لحام معينة، من المعروف من الملاحظة الفعلية أن متوسط مقاومة الكسر للعملية هو 400 باوند والإنحراف المعياري للعملية 30 باوند. وفي كل يوم تشغيل، يتم إختيار تسع عينات من اللحام من الإنتاج اليومي ويتم تسجيل مقاومة الكسر الخاصة بهم. ومتوسط مقاومة الكسر لإثنا عشر يوما كالتالي:

اليوم	1	2	3	4	5	6
متوسط العينة	393	418	406	419	387	391
اليوم	7	8	9	10	11	12
متوسط العينة	410	374	425	408	372	386

قم بإنشاء خريطة $\overline{X}$ بالإعتماد على حدود 3σ "three-sigma" وحدد ما إذا كانت العملية مستقرة بالنسبة لمتوسط المقاومة خلال هذا الوقت أم لا.

(١٢-١٢) في تمرين(١٢-١١)، إفترض أن الإنحراف المعياري للعينة لـ 12 يوما كان كالتالي:

اليوم	1	2	3	4	5	6
الإنحراف المعياري للعينة	9.2	12.6	38.8	25.9	18.2	48.3
اليوم	7	8	9	10	11	12
الإنحراف المعياري للعينة	42.6	22.9	31.7	44.2	8.6	19.4

قم بإنشاء خريطة S بالإعتماد على حدود 3σ "three-sigma" ومع إجابتك لتمرين (١٢-١١)، حدد ما أذا كانت العملية مستقرة بالنسبة للمتوسط والاختلاف خلال هذا الوقت.

(١٢-١٣) اذا كان المتوسط والإنحراف المعياري لعملية ما معلومين وهما على التوالي 100, 20. إذا تم الإبقاء على خرائط الرقابة $\overline{X}$، S إستناداً على عينات حجم كلا منها (n=8). حدد الخطوط المركزية وحدود "three- sigma" لهذه الخرائط.

(١٢-١٤) يتم أخذ عينات بصفة دورية حجم كلا منها (n=6) نماذج من مياه بحيرة معينة لمراقبة تلوث المياه. لكل عينة من 30 عينة، تم تحديد متوسط العينة والإنحراف المعياري للعينة بالنسبة للوث معين. وبعد هذه الثلاثين عينة، وجدنا أن:

$$\sum_{i=1}^{30} \overline{X}_i = 1,350 \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{30} S_i = 157.5$$

(أ) حدد حدود الرقابة 3σ "three-sigma" للخرائط $\overline{X}$ ، S.

(ب) قدر الإنحراف المعياري للعملية σ.

(١٢-١٥) تم أخذ 40 عينة حجم كلا منها (n=8) على فترات منتظمة خلال أسبوع ما من عملية التعبئة لإختبار حجم المنتج المسكوب داخل الحاويات. وبعد حساب متوسط كل عينة والإنحراف المعياري لكل عينة، تم تحديد الكميات التالية:

$$\sum_{i=1}^{40} \overline{X}_i = 810 \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{40} S_i = 12.8$$

(أ) حدد حدود الرقابة 3σ "three-sigma" للخرائط $\overline{X}$ ، S.

(ب) قدر الإنحراف المعياري للعملية σ.

(١٢-١٦) في عملية تجميع الغسالات، يعتبر وقت التجميع هو المقياس الهام. لكل إنتاج يومي، تم قياس وقت التجميع الفعلي لأربعة آلات. ويتكون الجدول التالي من أوقات التجميع المقاسة بالدقائق لعشرين يوم من أيام الإنتاج المتتالية:

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
زمن التجميع	18	17	19	20	18	18	23	17	19	21
	18	18	21	19	20	19	22	18	21	16
	19	16	20	17	21	16	24	17	20	18
	21	19	19	18	17	18	23	18	17	19
اليوم	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
زمن التجميع	19	18	20	20	19	18	21	17	16	19
	19	17	20	14	17	20	18	18	18	20
	20	19	18	19	18	20	16	18	19	18
	17	18	17	17	18	19	19	19	19	20

(أ) حدد حدود الرقابة 3σ "three-sigma" للخرائط $\overline{X}$ ، S. هل تبدو العملية مستقرة خلال هذا الوقت ؟

(ب) طبق إختبارات Nelson الثمانية للأسباب التي يمكن تحديدها على خريطة $\overline{X}$. ماذا تجد؟

(ج) هل يمكن أن نستخدم حدود الرقابة هذه لقياس الإستقرار في المستقبل القريب ؟ أشرح ؟

(١٢-١٧) تم إختيار خمس كراسى ذات قواعد دائرية مرتين في اليوم وقيست أقطارها الداخلية. ويحتوى الجدول التالي على المعلومات المأخوذة من العينة لعشرة أيام إنتاج. أجب الثلاثة أجزاء في تمرين (١٢-١٦)

رقم العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الأقطار المشاهدة	1.52	1.47	1.49	1.52	1.49	1.48	1.51	1.52	1.47	1.49
	1.51	1.49	1.48	1.51	1.52	1.49	1.51	1.48	1.48	1.48
	1.48	1.49	1.51	1.51	1.52	1.50	1.48	1.48	1.51	1.47
	1.49	1.51	1.52	1.50	1.51	1.50	1.47	1.49	1.52	1.47
	1.51	1.48	1.52	1.50	1.48	1.52	1.49	1.47	1.48	1.50
رقم العينة	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الأقطار المشاهدة	1.47	1.51	1.48	1.47	1.49	1.51	1.50	1.48	1.50	1.49
	1.48	1.51	1.52	1.48	1.50	1.49	1.51	1.49	1.50	1.47
	1.51	1.47	1.49	1.47	1.51	1.49	1.49	1.47	1.51	1.52
	1.50	1.48	1.51	1.51	1.51	1.52	1.49	1.51	1.48	1.51
	1.50	1.48	1.49	1.51	1.52	1.47	1.48	1.51	1.47	1.50

(١٢-٤) خرائط الرقابة للنسب في العملية: خرائط P
Control Charts For Process Proportions: P Charts

في الجزء السابق، ناقشنا أساليب تحديد خرائط الرقابة للتحكم في متوسط واختلاف مخرجات العملية. وتعتمد خرائط كل من $\overline{X}$,S على قياس حجم مقدار ما محل الإهتمام مثل الحجم المعبأ، مقاومة الكسر أو عوائد المبيعات. من ناحية أخرى، غالبا ما نكون مهتمين بنسبة مخرجات العملية التي لها خاصية محددة. فعلى سبيل المثال، قد نرغب في مراقبة نسبة الوحدات المصنعة التي بها عيوب، نسبة الفواتير التي تحتوي على أخطاء، نسبة الطلبة الحاصلين على درجة A. في مثل هذه الحالات، المعلمة محل الإهتمام هي النسبة في العملية π، وأفضل أحصاء هي نسبة العينة P، لذلك بإستخدام قيم P المعتمدة على العينات الدورية (المجموعة الفرعية المنطقية)، يمكننا إنشاء خريطة لقيم P (P chart) لتقييم مدى إستقرار العملية تجاه النسبة محل الإهتمام.

وكما كان الأمر في حالة الخرائط لقيم $\bar{X}$، قيم S ، تنشأ حالتين واضحتين عند اعداد خريطة لقيم P هي :(1) عندما تكون نسبة العملية πمعلومة. (2) عندما تكون π غير معلومة.

(١٢-٤-١) اذا كانت النسبة π معلومة : Process Proportion π Known

في مرات عديدة يمكن أن نعتبر معلمة النسبة π معلومة إستناداً إلى الملاحظة الفعلية للعملية المستقرة على مر الوقت. وعندما يؤخذ في الإعتبار أن π معلومة، فيكون تحديد خريطة لقيم P هو إمتداد واضح لخصائص الإحصاء P كما تم توضيح ذلك في الفصل الخامس. تذكر أن القيمة المتوقعة لقيمة P هي π، لذلك فإن π هي الخط المركزي في خريطة P. وأوضحنا أيضاً في الفصل الخامس أن الخطأ المعياري لقيم P هو: $\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$ ، حيث n هي عدد الوحدات في كل عينة دورية التي بها الخاصية محل الإهتمام. يتبع ذلك أن حدود الرقابة العليا والدنيا التي تناظر ثلاث وحدات للخطأ المعياري أعلى وأدنى متوسط قيم P وهي:

$$\pi \pm 3\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \qquad (12.10)$$

لذلك، لتقييم مدى إستقرار العملية تجاه النسبة محل الإهتمام، نضع قيم P على خريطة الرقابة حيث الخط المركزي لها هو قيمة π، وحدود التحكم العليا والدنيا هي:

$$\pi - 3\sqrt{\pi(1-\pi)/n}\ ,\ \pi + 3\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$$

مثال (١٢-٥)

تذكر مثال الفصل الخامس حيث تم محاكاة نسبة عمر طلاب الكلية المدخنين. وبصفة خاصة تم إفتراض أن (π=.2) وأخذت 40 عينة؛ حيث تتكون كل عينة من (n=50) طالب. كون خريطة لقيم P بإستخدام الخمس عشرة قيمة الأولى من قيم P في جدول (٥-٢) لتحديد ما إذا كانت العملية مستقرة فيما يتعلق بنسبة عمر طلاب الكلية المدخنين.

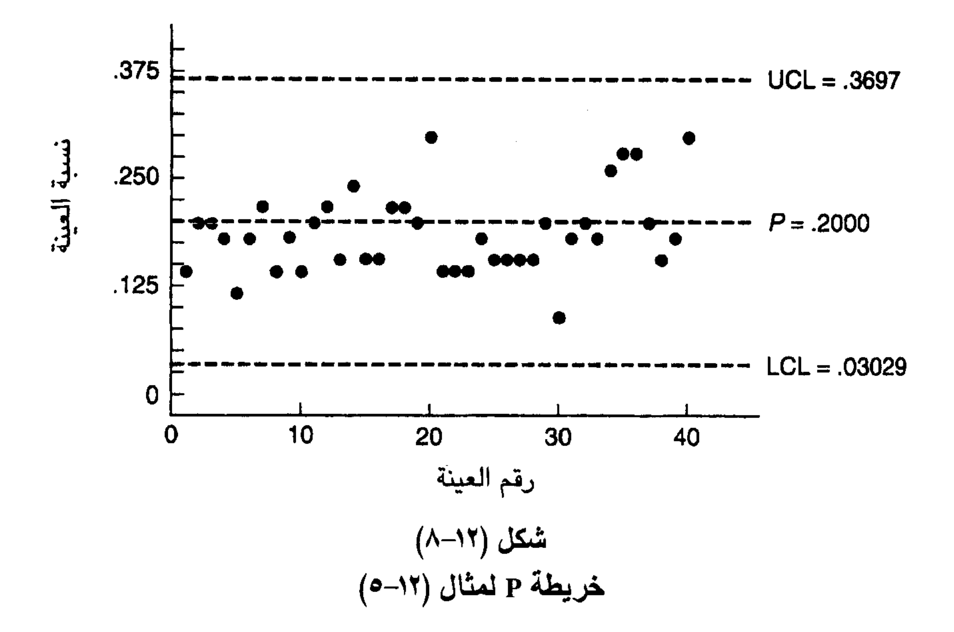
الحل:

نظراً لأن (n=50, π=.2)، فإن الخطأ المعياري لقيم P هو : $\sqrt{.2(1-.2)/50}=.0566$

وحدود الرقابة العليا والدنيا من التعبير الرياضي (12.10) هي:

$$.2 \pm (3)\ (.0566) = .2 \pm .1697$$

أو 3697., 0303. على التوالي. وخريطة الرقابة للخمس عشرة قيمة الأولى من قيم P في جدول (٥-٢) هي الشكل التالي الناتج من إستخدام برنامج Minitab. وفي هذا الشكل، لا يوجد شكل يمكن تمييزه ولا تقع قيم من P خارج حدود الرقابة. لذلك فإن العملية مستقرة لهذه الفترة فيما يتعلق بنسبة عمر طلاب الكلية المدخنين.



شكل (١٢-٨)

خريطة P لمثال (١٢-٥)

(١٢-٤-٢) اذا كانت النسبة π غير معلومة: Process Proportion π Unknown

والآن نأخذ بعين الأعتبار خريطة P عندما تكون النسبة في العملية π غير معلومة. وكما كان الحال في خرائط $\overline{X}$,S ، نحتاج على الأقل إلى 20 عينة دورية مأخوذة من عملية مستقرة لتحديد الخط المركزي وحدود الرقابة. وتتكون كل عينة من n وحدة حيث يتم فحصها لتعيين الخاصية محل الإهتمام.

إفترض أننا نختار $m \geq 20$ مجموعة فرعية منطقية. وإفترض أن X_i هو عدد الوحدات من بين n وحدة في العينة رقم i التي يتحقق فيها الخاصية محل الاهتمام. النسبة في العينة هي:

$$P_i = \frac{X_i}{n} \qquad (12.11)$$

ومتوسط النسب في كل العينات m عينة هي:

$$\overline{P} = \frac{P_1 + P_2 + \dots\dots\dots\dots + P_m}{m} \qquad (12.12)$$

$$= \frac{X_1 + X_2 + \dots\dots\dots\dots + X_m}{mn} \qquad (12.13)$$

ولتكوين الخط المركزي وحدود الرقابة، نحتاج إلى تحديد المتوسط والخطأ المعياري لقيمة $\overline{P}$. ونظراً لأن الإحصاء $\overline{P}$ هي أيضاً نسبة، فإن متوسط قيمة $\overline{P}$ هو π، ويتم تقدير الخطأ المعياري لقيمة $\overline{P}$ بإستخدام $\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})/n}$ وبالتالي، يتم إيجاد حدود التحكم Three sigma بإستخدام $\overline{P}$ لتقدير π في التعبير الرياضي (12.10). وهم:

$$\overline{P} \pm 3\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} \qquad (12.14)$$

لذلك فإن خريطة $\overline{P}$ عندما تكون النسبة في العملية π مجهولة، عبارة عن الخط المركزي وهو قيمة $\overline{P}$ ، وحد الرقابة الأعلى هو $(\overline{P} + 3\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})/n})$، وحد الرقابة الأدنى هو $(\overline{P} - 3\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})/n})$.

وكما سبق ، يجب أن تضع في الذهن أنه يلزم أن تكون m عينة المستخدمة في تحديد قيمة $\overline{P}$مأخوذة من عملية مستقرة إذا كانت حدود الرقابة، الخط المركزي سوف يستخدما لإعتبارات المستقبل القريب. ومن الممكن أيضاً إستخدام الأربع إختبارات الأولى الموجودة في الجزء (١٢-٣-٣) لإكتشاف سبب الاختلاف الذي يمكن تحديده في خريطة P.

استخدام الكومبيوتر Using the Computer

المثال التالي يوضح كيفية اعداد الخريطة P باستخدام برنامج مينى تاب .

مثال (١٢-٦)

يتم متابعة نسبة الوحدات المعيبة من أحد المنتجات بصفة دورية. حيث يتم أخذ عينة عشوائية من 100 وحدة من الوحدات المنتجة في وقت معين ويتم فحصها لتحديد عدد الوحدات المعيبة. والجدول التالي يوضح قائمة الوحدات المعيبة في 25 عينة. ارسم خريطة P (P chart) وحدد ما إذا كان من الممكن استخدامها في المستقبل القريب.

رقم العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
عدد الوحدات المعيبة	2	1	4	3	2	2	0	2	3
رقم العينة	10	11	12	13	14	15	16	17	18
عدد الوحدات المعيبة	2	1	2	3	2	1	2	3	3
رقم العينة	19	20	21	22	23	24	25		
عدد الوحدات المعيبة	4	3	5	5	6	5	7		

الحل

حيث أن $(m=25)$, $(n=100)$, $(X_1=2, X_2=1, ..., ... , ...\ X_{25}=7)$

وبإستخدام المعادلة (12.13) تستطيع تحديد قيمة:

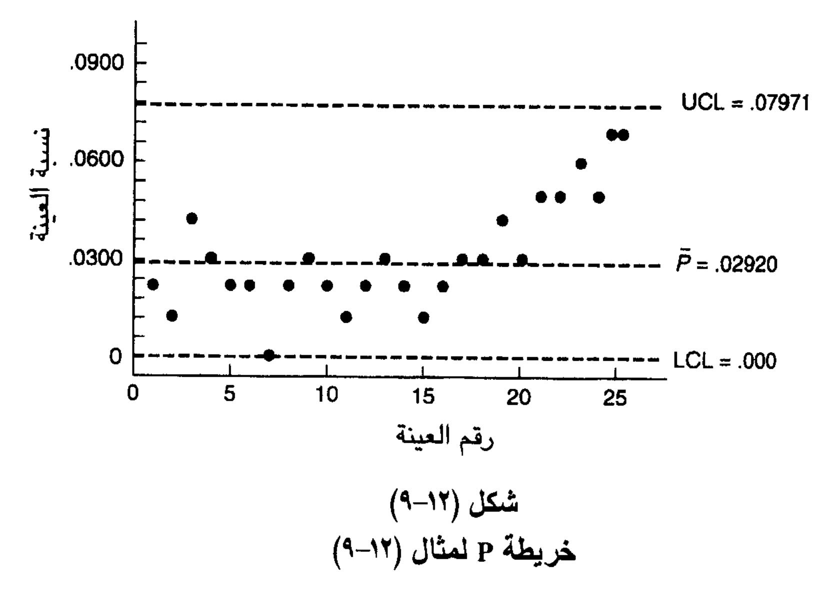
$$\overline{P} = \frac{2+1+..............+7}{(25)(100)} = 0.0292$$

والتي تستخدم كخط مركزي لشكل P chart. ومن العلاقة (12.14) فإن الحدود العليا والدنيا للتحكم تكون:

$$.0292 \pm 3\sqrt{(.0292)(.9708)/100} = .0292 \pm .0505$$

أي تساوي(0797. و الصفر)(حيث أن تلك النسبة لا يمكن أن تكون سالبة) وللحصول على شكل (١٢-٩) ونتائج الإختبارات الأربعة بإستخدام Minitab فإننا نستخدم الأوامر التالية:

```
MTB   > set C3
DATA > 2 1 4 3 2 2 0 2 3 2 1 2 3 2 1 2 3 3 4 3 5 5 6 5 7
DATA > end
MTB   > P chart C3 100 ;
SUBC > test 1 : 4.
```



شكل (١٢-٩)

خريطة P لمثال (١٢-٩)

في الشكل(١٢-٩) لاحظ أنه إبتداء من العينة رقم 17، ظهر اتجاه عام تصاعدي في عدد الوحدات المعيبة وأستمر هذا الإتجاه حتى العينة رقم 25. وقد تم اكتشاف ذلك عن طريق الإختبار 2. ولهذا فإنه من الواضح ان العملية غير مستقرة من خلال تلك العينات الخمس والعشرين. ومن هنا فإنه لا بد من اتخاذ اجراء ما للتعرف على الأسباب الظاهرة التي يمكن التحكم فيها ومن ثم التخلص منها.

(١٢-٥)خرائط الرقابة لحوادث بواسون: خرائط C :

Control Charts For Poisson Occurrences: C charts

في هذا الجزء، سوف نقدم طريقة لتحديد خريطة الرقابة للتحكم في متوسط معدل حدوث حوادث تستند إلى توزيع بواسون. فعلى سبيل المثال، قد نرغب في التحكم في متوسط عدد عيوب التجميع في سيارة ما، أو متوسط عدد المكالمات التليفونية لوكالة سمسرة في فترة من الوقت. في هذه الحالات، معلمة توزيع بواسون λ هي المعلمة محل الإهتمام. وبملاحظة عدد الحوادث على مر الزمن، المكان أو الحجم، يمكن أن نقوم بإنشاءخريطة C (الحرف C من كلمة Count) لتحديد مدى إستقرار عملية بواسون بالنسبة للمعلمة λ .

وكما كان الحال في خرائط $P, S, \bar{X}$ تنشأ حالتين واضحتين عند إنشاء خرائط C:

(1)عندما تكون λ معلومة.

(2) عندما تكون λ غير معلومة.

(١٢-٥-١) معلمة بواسون λ معلومة: Poisson Parameter λ Known

عند الأخذ بعين الإعتبار أن قيمة λ معلومة، فإن تحديد خريطة C هو تطبيق مباشر على المادة السابقة في هذا الفصل. من المعلوم أنه للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون أن $(E(X) = \lambda)$,$(SD(x)=\sqrt{\lambda})$ وحدود الرقابة العليا والدنيا التي تناظر ثلاث وحدات خطأ المعياري أعلى وادنى متوسط الإحصاء λ هو :

$$\lambda \pm 3\sqrt{\lambda} \qquad (12.15)$$

لذلك ولتقييم مدى إستقرار عملية بواسون بالنسبة للمعلمة λ ، نضع الأعداد المشاهدة للحوادث على خريطة الرقابة حيث الخط المركزي لها هو λ وحدود الرقابة العليا والدنيا هي $\lambda + 3\sqrt{\lambda}$, $\lambda - 3\sqrt{\lambda}$ على التوالي.

وكما هو الحال في كل خرائط الرقابة، نحتاج أن نبحث بعناية عن سبب الأختلاف الذي يمكن تحديده حتى إذا كانت كل النقط واقعة داخل حدود الرقابة. ولهذا الغرض يمكننا إستخدام الأربع إختبارات الأولى المقدمة في الجزء (١٣-٣-٣) لإكتشاف سبب الاختلاف الذي يمكن تحديده في خريطة C.

استخدام الكمبيوتر : Using the Computer

المثال التالي يوضح تحديد خريطة C باستخدام برنامج ميني تاب عندما تكون λ معلومة.

مثال (١٢-٧)

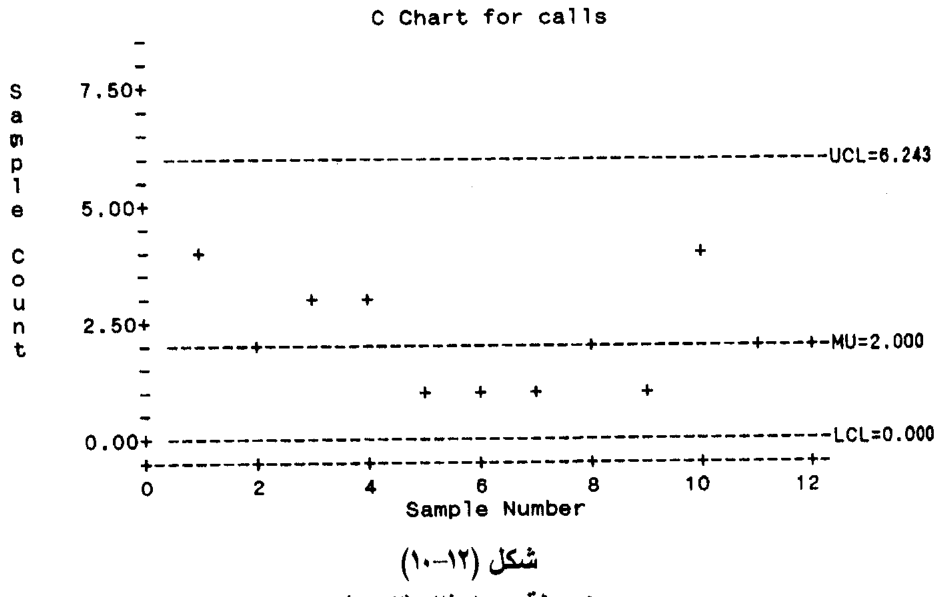
قامت شركة عقارية بأخذ متوسط المكالمات التليفونية لجهازي تليفون ما بين الساعة التاسعة والعاشرة من يوم الأثنين حتى السبت وكانت المكالمات التي تم تلقيها خلال الأسبوعين الماضيين في ذلك الوقت كما يلي:

السبت	الجمعه	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الأثنين	السبت	الجمعه	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الأثنين
2	2	4	1	2	1	1	1	3	3	2	4

كون خريطة C، ثم حدد ما اذا كان هناك تغيراً قد حدث بالنسبة لعدد المكالمات التليفونية خلال تلك الفترة.

الحل

فيما يلي أوامر البرنامج الإحصائي Minitab والتي تستطيع بإستخدامه عمل شكل C chart كما في شكل (١٢-١٠) وبالنظر إلى ذلك الشكل يمكننا ملاحظة أن المكالمات لتلك الوكالة خلال الفترة الصباحية (٩-١٠) صباحاً ظل مستقراً بمعدل متوسط ٢ مكالمة.



شكل (١٢-١٠)
خريطة C لمثال (١٢-٧)

```
MTB   > name C1 ="calls"
MTB   > set  C1
DATA > 4 2 3 3 1 1 1 2 1 4 2 2
MTB   > end
MTB   > C chart C1;
SUBC  > mu =2 ;
SUBC  > test 1 : 4.
```

(١٢-٥-٢) معلمة بواسون λ غير معلومة: Poisson Parameter λ Unknown

عندما تكون λ غير معلومة، يلزم تقديرها إستنادا إلي الحوادث المشاهدة. وبإفتراض وجود20 حادثة مشاهدة على الأقل على مدى نفس وحدة الزمن، المكان، أو الحجم، فإن تقدير λ ، (يعرف بالرمز $\overline{C}$)، يكون هو متوسط الحوادث المشاهدة. وبالتالي فإن الخط المركزي لخريطة الرقابة هو $\overline{C}$ ، ويتم إيجاد حدود الرقابة 3σ "three-sigma" بإستخدام $\overline{C}$ لتقدير λ في التعبير الرياضي (12.15). وهكذا فإن حدود الرقابة تكون كالتالي:

$$\overline{C} \pm 3\sqrt{\overline{C}} \qquad (12.16)$$

استخدام الكومبيوتر : Using the Computer

المثال التالي يوضح تحديد خريطة C باستخدام برنامج ميني تاب عندما تكون λ غير معلومة.

مثال (١٢-٨)

تم فحص 20 سيارة من ماركة معينة للتعرف على العيوب بها بعد خروجها من خطوط تجميع السيارات. فيما يلي عدد العيوب التي ظهرت:

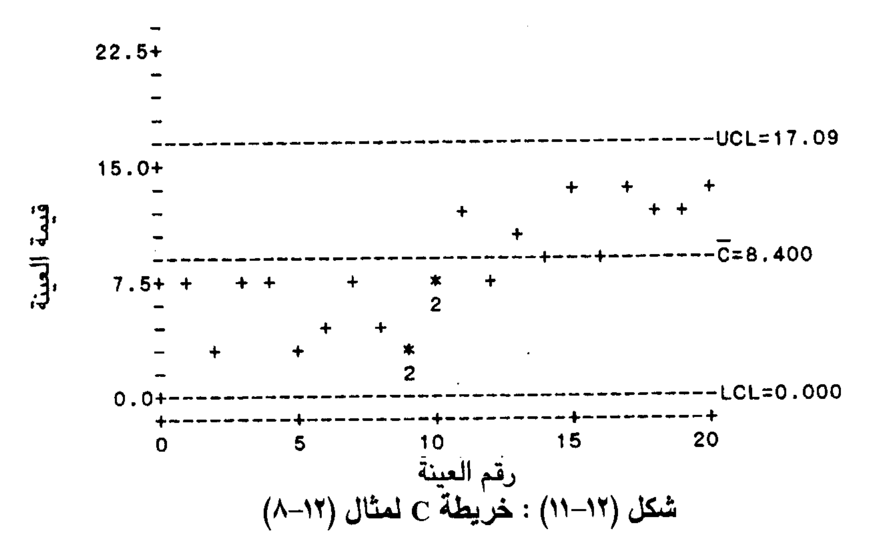
السيارة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العيوب	8	3	7	8	3	5	8	4	3	7
السيارة	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
العيوب	12	8	10	9	13	9	14	12	12	13

كون الخريطة C (C chart) ثم علق على ما إذا كان هناك إختلافات جوهرية يمكن اكتشافها.

الحـل

أوامر البرنامج الإحصائي Minitab التالية تنشأ الرسم C chart والموضح في الشكل (١٢-١١) لاحظ أن الأمر الفرعي MU لم يستخدم ورغم ذلك فإن Minitab يزودنا بهذه القيمة لأننا نكون بحاجة إلى تقدير λ . من الشكل (١٢-١١) لاحظ أن السيارات العشر الأولى يوجد بها عدد من العيوب أقل من متوسط قيمة العيوب المقدرة، بينما العشر سيارات الأخيرة فإن قيمة العيوب في معظمها تكون أعلى من المتوسط المقدر. هذه الثنائية تم اكتشافها عن طريق الإختبار رقم (2) والمذكور في الجزء (١٢-٣-٣). وبالتالي فإن عمليات التجميع يبدو أنها غير مستقرة عندما تم تجميع هذه السيارات العشرين.

```
MTB > name C4 ="defects"
MTB > SET C4
DATA > 8 3 7 8 3 5 8 4 3 7 12 8 10 9 13 9 14 12 13
DATA > end
MTB  > C chart C4 ;
SUB  > test 1:4.
```



شكل (١٢-١١) : خريطة C لمثال (١٢-٨)

تمارين

(١٢-١٨) فيما يتعلق بالغرض أو الهدف ، اشرح الفرق بين الخرائط P والخرائط C .

(١٢-١٩) لماذا تعتقد أنه لا يوصى بإستخدام كل الثماني إختبارات لنيلسون Nelson في خرائط P ، C.

(١٢-٢٠) في مصنع لإطارات السيارات ، وجد من الملاحظة الفعلية أن نسبة الإطارات المعيبة المنتجة عن طريق هذه العملية هو 05.. أخذت عينة مكونة من n=50 إطار من الإنتاج اليومي ، وتم تحديد نسبة الإطارات المعيبة في العينة . وبيانات العينة لعشرة أيام هي كالتالي:

اليـــــوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
النسبة فى العينة	.08	.06	.04	.06	.04	.10	.12	.16	.10	.06

قم بإنشاء خريطة لقيم P . وكن متأكدا من تحديد الخط المركزي ، وحدد ما إذا كانت العملية مستقرة فيما يتعلق بنسبة الإطارات المعيبة خلال هذا الوقت .

(١٢-٢١) تم إنشاء خريطة رقابة لنسبة مناشف الحمام التي بها عيوب غير مقبولة إستنادا على عينات دورية حجم كل عينة n=60 منشفة مختارة من مصنع نسيج . لتحديد خريطة الرقابة ، تم إختيار 40 عينة وقد وجد أن العدد الكلي للمناشف التي بها عيوب غير مقبولة هو 96 في 40 عينة . حدد حدود الرقابة والخط المركزي في خريطة P.

(١٢-٢٢) بالرجوع إلى تمرين(١٢-٢١) ، إفترض أن العينة التالية ذات الحجم n=60 منشفة تحتوي على سبع منشفات بها عيوب غير مقبولة . و إستنادا إلى حدود التحكم الموجودة في تمرين(١٢-٢١) ، هل يمكننا إعتبار أن العملية التي تنتج مثل هذه العينة هي عملية مستقرة؟ وإذا كان الحال ليس كذلك ، ما الذي يجب أن تفعله فيما بعد ؟

(١٢-٢٣) في مصنع لأطباق الصيني الفاخر، تم إختيار مائة طبق عشاء دوريا وتم تسجيل عدد الأطباق التي بها عيوب غير مقبولة. في عشرين عينة دورية (بكل عينة ١٠٠ طبق) تم تسجيل عدد الأطباق المعيبة على النحو التالي:

رقم العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الأطباق غير المقبولة	2	0	1	2	1	1	3	1	2	1
رقم العينة	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الأطباق غير المقبولة	0	3	7	1	0	0	2	1	3	1

(أ) إستنادا إلى هذه البيانات، قم بإنشاء خريطة P.

(ب) طبق الأربع إختبارات الأولى لنيلسون لتعيين الأسباب التي يمكن تحديدها. ماذا وجدت ؟ اشرح.

(ج) هل يمكن إستخدم حدود الرقابة هذه لقياس الإستقرار في المستقبل القريب ؟ اشرح.

(١٢-٢٤) محل لبيع الملابس الرجالي يخدم بمعدل خمس عملاء في الفترة بين الساعة التاسعة والساعة الحادية عشر قبل الظهر في كل يوم من أيام الأسبوع. والجدول التالي يوضح عدد العملاء الذين يدخلون هذا المحل خلال هذه الفترة من الوقت خلال الأسبوعين الماضيين:

M	T	W	th	F	M	T	W	th	F
3	4	3	7	6	4	5	3	4	7

قم بإنشاء خريطة C لتحديد ما إذا كان عدد العملاء الذين يدخلون المحل خلال هذا الوقت مستقر أم لا.

(١٢-٢٥) بالإشارة إلى تمرين(١٢-٢٤) فإن الجدول التالي يوضح عدد العملاء الذين يدخلون هذا المحل في الفترة بين الساعة التاسعة صباحا والحادية عشر قبل الظهر على مدى العشرة أسابيع التالية للأسبوعين الماضيين:

M	T	W	th	F	M	T	W	th	F
2	5	4	6	5	3	1	5	7	4

(أ) ادمج بيانات التمرينين وقم بإنشاء خريطة C بدون إفتراض معدل وصول تاريخي.

(ب) طبق الإربع إختبارات الأولى لنيلسون للأسباب التي يمكن تحديدها. ماذا تجد؟ اشرح؟

(١٢-٦) ملخص : Summary

عرضنا في هذا الفصل خرائط الرقابة الإحصائية لمعلمات العملية μ, σ , π إستنادا إلى الإحصائيات المماثلة $P, S, \bar{X}$. وبالإضافة إلى ذلك قدمنا طريقة لتحديد خرائط المراقبة للتحكم في متوسط معدل وقوع حوادث توزيع بواسون.

خريطة الرقابة هي اكثر الطرق الإحصائية إفادة في تقييم إستقرار العملية بالنسبة لمعلمات العملية الهامة. وخريطة الرقابة هي رسم بياني لقيم الإحصاء المناظرة على مر الزمن. ويعتمد تحديد خريطة الرقابة على العينات الدورية المأخوذة من العملية. وتعرف هذه العينات الدورية بالمجموعات الفرعية المنطقية. والاسلوب الذي تتذبذب به قيم الأحصاء عبر الزمن يشير إلى ما إذا كان يمكن إعتبار العملية مستقرة أم لا. فإذا كانت العملية مستقرة، فإن خريطة الرقابة لا تظهر أي شكل يمكن تمييزه، ويجب أن تقع قيم الإحصاء داخل المدى الطبيعي للأختلاف.

المراجع : **References** :

1-W. E. Deming. *Out of the Crisis.* Cambridge, MA:MIT Center for Adanced Engineering Study 1986 .

2- A. Duncan. *Quality Control and Industrial Statistics,* 4 th ed. Homewood,IL:Richard D. Irwin, 1974.

3- K. Ishikawa. *Guide to Quality Control.* New York :Asian Productivity Organization, UNIPUB 1982.

4- D. Montgomery. *Introduction to Statistical Quality Control.* New York: Wiley, 1985.

5- L. Nelson *"The Shewhart Control Chart-Tests for Special Causes"* Journal of Quality Technology, Vol. 19, No. 4 October 1984 .

تمارين إضافية:

(١٢-٢٦) إختارت هيئة تقرير جودة المياه خمس نماذج للمياه كل أسبوع من المصادر المائية وحددت متوسط تركيز المادة السامة. والجدول التالي يوضح متوسط الأحجام (جزء لكل مليون) لأثنى عشر أسبوعاً.

الأسبوع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
متوسط العينة	5.2	4.9	5.5	5.4	4.8	4.6	5.5	4.7	5.1	4.5	5.8	5.6

وبالاستناد إلي الملاحظة الفعلية، كان متوسط التركيز، الإنحراف المعياري هما 5,5. (جزء لكل المليون)، على التوالي. حدد حدود الرقابة لمتوسط التركيز. بالنسبة للفترة التي ذكرتها، ، هل يوجد سبب يستدعى الإنذار.

(١٢-٢٧) الجدول التالي يوضح متوسط مقاومة الكسر إستنادا إلى العينات الدورية لستة نماذج من المعدن:

العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
متوسط العينة	498.6	508.3	484.6	505.7	491.7	495.4	482.6	515.2	510.8	503.7

وإستنادا إلى الملاحظة الفعلية، فإن متوسط مقاومة الشد والإنحراف المعياري هما 500 باوند، 20 باوند على التوالي.

(أ) قم بإنشاء خريطة $\overline{X}$. هل يمكن إعتبار العملية مستقرة بالنسبة لمتوسط مقاومة الشد ؟

(ب) إستخدم إختبارات نيلسون لتدعم إجابتك في الجزء (أ).

(ج) حدد حدود الرقابة والخط المركزي للإنحراف المعياري للعينة.

(١٢-٢٨)تتكون البيانات الموجودة في الجدول التالي من 20 عينة، كل عينة بها أربعة مشاهدات عن أقطار كراسي ذات قاعدة دائرية عن طريق عملية تصنيعية:

Sample Number	Sample values (centimeters)			
1	4.01	4.03	3.98	4.04
2	3.97	3.99	3.99	4.02
3	4.06	4.05	3.97	4.02
4	3.96	3.98	4.07	4.03
5	3.98	3.99	3.99	4.00
6	4.01	4.02	3.96	3.99
7	3.95	3.98	4.02	4.03
8	4.03	4.00	3.96	4.04
9	4.07	3.96	3.98	4.05
10	3.98	3.97	4.02	4.04
11	3.92	4.03	4.05	3.99
12	3.97	4.05	4.04	4.01
13	4.04	4.04	3.96	3.99
14	4.03	4.00	4.02	4.05
15	3.95	3.96	3.95	4.02
16	4.05	4.09	4.07	4.02
17	3.98	4.06	4.04	4.03
18	4.01	4.02	4.00	3.97
19	4.02	4.01	4.05	3.99
20	3.99	3.99	4.01	4.00

(أ) قم بإنشاء خريطة $\overline{X}$ ، وخريطة S . هل يمكن إعتبار العملية مستقرة خلال هذه الفترة من الوقت.

(ب) طبق الأربع إختبارات الأولى لنيلسون Nelson للأسباب التي يمكن تحديدها في خريطة $\overline{X}$. ماذا تجد؟.

(ج) لماذا تعتقد أنه لا يمكن إستخدام إختبارات نيلسون Nelson في خريطة S.

(د) هل يجب إستخدام حدود الرقابة هذه لقياس الإستقرار في المستقبل القريب ؟ اشرح .

(١٢-٢٩) لقد تم المحافظة على خرائط الرقابة لقيم $\overline{X}$,S للحجم المسكوب داخل الحاوية في عملية التعبئة. وإستنادا إلى 25 عينة دورية ، تتكون كل عينة من خمس حاويات، تم تحديد

$\overline{\overline{X}}$ =400.2 جرام، $\overline{S}$ =15.2 جرام.

(أ) بالنسبة للعملية المستقرة، ما هي حدود الرقابة لمتوسط العينة والإنحراف المعياري للعينة.

(ب) ما هو تقدير الإنحراف المعياري للعملية ؟

(١٢-٣٠) في تمرين(١٢-٢٩)، إفترض أن كل عينـة اعتمدت إلى وزن ستة حاويات. كيف تتغير إجابتك في الجزء(أ)، الجزء(ب).

(١٢-٣١) في عملية فحص الحسابات تم إختيار100 حساب شهريا وتم تسجيل عدد الحسابات التي تحتوي على أخطاء. والجدول التالي يوضح عدد الحسابات التي بها أخطاء خلال ٢٤ شهراً الأخيرة:

الشــــهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الحسابات التي بها أخطاء	2	1	4	3	2	2	5	3	4	2	1	5
الشهر	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
الحسابات التي بها أخطاء	2	3	2	1	0	6	4	5	2	1	8	3

(أ) إستنادا إلى هذه المعلومات، قم بإنشاء خريطة P لنسبة الحسابات التي بها أخطاء.

(ب)إستخدم الأربع إختبارات الأولى لنيلسون Nelson لتحديد ما إذا كانت العملية مستقرة في وقت أخذ هذه العينات.

(ج) هل يجب إستخدام حدود الرقابة هذه لقياس إستقرار العملية في المستقبل القريب فيما يتعلق بنسبة الحسابات التي تحتوي على أخطاء ؟اشرح.

(١٢-٣٢) تم ملاحظة عدد الأعطال لكل وردية مدتها 8 ساعات لعملية تشغيل خط تجميع وذلك خلال ٢٠ يوم من أيام العمل وهي كالتالي:

M	T	W	th	F	M	T	W	th	F
4	1	0	1	3	3	0	1	1	4
M	T	W	th	F	M	T	W	th	F
5	2	0	1	3	4	1	1	0	4

قم بإنشاء خريطة C وعلق على ما إذا كان يمكن إكتشاف أي سبب للاختلاف الذي يمكن تحديده.

الفصل الثالث عشر

تصـــــميم وتحـــليـــل التجـــــارب

THE DESIGN AND ANALYSIS OF EXPERIMENTS

محتويات الفصل:

الفصل الثالث عشر

تصميم وتحليل التجارب

THE DESIGN AND ANALYSIS OF EXPERIMENTS

(١٣-١) نظرة عامة على محتويات الفصل: Bridging to New Topics

إن التطور الدائم والإبتكار يعد أهم العناصر لإدارة الجودة. وغالبا ما تضطر المشروعات لإتخاذ قرارات بشأن تصميم منتج جديد، اعادة تصميم منتج قائم، تصميم عمليات جديدة لتصنيع منتج معين، أو اعادة تصميم العمليات القائمة، ويزداد الإهتمام بتصميم التجارب كأداة هامة لتحسين كل من المنتج، وعمليات الإنتاج.

وتختلف المؤسسات من حيث الأسلوب(التقنية) الذي تدمج به تصميم التجارب في جهودها لتحسين العمليات. وأبسط مستوى هو التجربة والخطأ، حيث نقوم بأجراء تغير ونلاحظ التحسن الناتج عنه إن وجد. واتجاه آخر أكثر تقنية هو الدراسة الاسترشادية، وفيها يقترح اجراء تغير معين في عملية الإنتاج على نسبة قليلة من النظام الكلي، فمثلا قد يتم تجربة التغير في فروع قليلة لبنك قبل تطبيقه على كافة فروع البنك. ومستوى أعلى تقني يتمثل في التجارب المفردة التي تتضمن عامل واحد أو مجموعة قليلة من العوامل. أو كمستوى أعلى أيضا يتمثل في التجارب الكبيرة التي تتضمن عوامل كثيرة ربما تصل إلى15 أو 20 عامل. وعادة ما يتم إجراء تجارب إنتقاء على العوامل الأكثر أهمية ليتم أخذها في الإعتبار عند إجراء دراسات أخرى، وأعلى مستوى تقني هو الإستخدام المتواصل للتجارب للتطوير المتواصل للمعرفة المرتبطة بالمشكلة (subject- matter)، حيث تستخدم الخبرة والإستنتاجات من التجارب السابقة لتصميم التجارب المستقبلية في دائرة مستمرة للتطوير. (كالموضحة في شكل ٥-١ في فصل (1)). والمستويات التقنية الأقل (التجربة والخطأ، الدراسات الإستطلاعية "الإسترشادية") هي الأقل كفاءة والأكثر تكلفة. فمثلا تصور التكلفة والفرصة الضائعة عند التطبيق الكامل لتغير مقترح يفشل في تحسين الأداء أو يقدم نتائج أقل من المستوى المطلوب. وعلى العكس فإن التقنيات الأكثر تطورا تتيح فاعلية أكبر وتكلفة أقل للحصول على المعلومات، مما يؤدي إلى تطوير أكبر وأسرع على المدى الطويل.

ولدى القارئ معرفة مستفيضة بأساسيات التجارب وتطبيقها في التجارب البسيطة. في الفصل الأول تعرفنا على المبادئ الأساسية، وفي الفصل السابع قمنا بدراسة تطبيق هذه المبادئ عند المقارنة بين متوسطي عمليتين مستقرتين (ساكنتين)، أو مجتمعتين، أو مستويين لعامل واحد بإستخدام إما عينات عشوائية مستقلة أو عينات ذات قراءات مزدوجة، وفي الفصل الثامن امتدت المناقشة لتشمل المقارنات بين أكثر من عمليتين، مجتمعتين، أو مستويات لعامل معين.

والهدف من هذا الفصل هو تقديم النواحي النظرية، والطرق المستخدمة في تصميم التجارب المتعلقة بالعمليات التي تتضمن أكثر من عامل مع وضع تحسين الجودة كهدف مبدئي (أساسي). وفي دراسات عمليات الإنتاج، نكون مهتمين عادة بتأثيرات أكثر من عامل. فمثلا محلل أداء البنك قد يرغب في دراسة تأثير وقت العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح على أوقات خدمة العملاء (وقت الإنتظار بالإضافة إلى وقت تلقي الخدمة بالنسبة للعميل). حيث يعتبر هنا وقت العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح عاملين منفصلين قد يكون لهما تأثير ملموس على وقت خدمة العميل. وقد يكون مهما للإدارة أن تعرف أثر هذين العاملين على وقت أداء الخدمة حتى يمكن تحسين مستوى الخدمة. وفي الأجزاء القادمة من هذا الفصل سنعرض أساليب معينة للتخطيط لتجربة ناجحة، بالإضافة إلى مجموعة مختلفة من التجارب متعددة العوامل وكيفية تصميمها.

(١٣-٢) الهدف والجوانب الرئيسية لتصميم التجارب

The Purpose and Fundamental Aspects of Designed Experiments

لنبدأ بعرض سريع وتوضيح للمكونات والمفاهيم الأساسية المتعلقة بتصميم التجارب، وقد قدمنا بعض هذه المفاهيم في الأجزاء (٦-١)، (٧-٢) ونعرض هنا مجموعة أخرى إضافية، ثم نناقش بعد ذلك عملية التخطيط للتجربة.

• المتغير التابع (الاستجابة) Response Variable

يمثل المتغير التابع الناتج الذي يتم قياسه أو ملاحظته بالنسبة لوحدة تجريبية معينة، ويكون في الغالب إحدى خواص الجودة لعملية إنتاجية معينة. ومن الممكن أن نعرف أكثر من متغير تابع في تجربة واحدة. في مثال البنك، يمثل وقت خدمة العميل متغيراً تابعاً لكونه أحد جوانب خدمة العملاء التي يهدف البنك لتحسينها.

• العامل Factor

العامل هو متغير يتم تغييره عن عمد بهدف قياس أثر هذا التغير على المتغير التابع. وقد يكون العامل كميا (مثل درجة الحرارة، الوقت...الخ) أو وصفيا (مثل: النوع، شخص، نبات...الخ). ففي مثال البنك نجد أن العاملين محل الدراسة هما زمن العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح.

• المستوى Level

مستوى عامل معين هو حالة معينة يكون عليها العامل، يرغب القائم بالتجربة قياس أثر هذه الحالة على المتغير التابع. ومستويات العامل الكمي يتم تحديدها عادة بمدى معين بالنسبة للعامل. فمثلا إذا كانت درجة الحرارة عاملا بمدى يتراوح بين30,20 درجة مئوية فإننا قد نريد ملاحظة المتغير التابع عند مستويات حرارية معينة مثل °20,°25,°30 درجة مئوية. فإذا كان العامل وصفيا فإن مستويات العامل قد تكون الحالات الممكنة لهذا العامل أو قد تكون مجموعة حالات مختارة عشوائيا من مجموعة أخرى كبيرة من الحالات. فمثلا قد نرغب في المقارنة بين ثلاث متاجر تقع في منطقة معينة فيما يتعلق بالتسعير. فالمتجر عامل وصفي، وفي هذه الحالة تمثل المتاجر الثلاث مستويات لهذا العامل. من ناحية أخرى، قد نرغب في مقارنة كل المحلات التجارية في المدينة، ولكن وبسبب القيود المالية قد نأمل (نرغب) في إختيار عينة عشوائية من 4 متاجر مثلا لنبني عليها المقارنة. (تحليل التجارب التي يتم فيها إختيار مستويات العامل عشوائيا يخرج عن نطاق هذا الكتاب).

• **المعالجة Treatment**

المعالجة هي مجموعة من الحالات يتم عندها دراسة المتغير التابع. وبالتالي إذا كانت التجربة تتضمن عدة عوامل فإن المعالجة هي توليفة من مستويات هذه العوامل. فمثلاً إذا إختار المحلل البنكي فترتين زمنيتين وثلاثة أعداد مختلفة الصرافين فإنه يوجد 6 معالجات (2x3) يتم عندها ملاحظة أوقات خدمة العملاء.

• **الأثر على المتغير التابع Effect on a Response Variable**

الأثر هو التغير الملاحظ في المتغير التابع عندما تتغير المعالجات (الحالات) الخاصة بالتجربة.

• **المتغير الخلفي أو المتغير القطاعي Background or Blocking Variable**

المتغير الخلفي هو المتغير الذي يكون أثره على المتغير التابع شيء حقيقي أو جوهري، ويكون القائم بالتجربة على علم بذلك. والمتغير الخلفي ليس محلاً للإهتمام كعامل ما ولكن يجب التحكم فيه بأي وسيلة لمنعه من تضليل عملية التحليل. وبخلاف ذلك فإن الاختلاف الذي يسببه في المتغير التابع سيعزي إلى العشوائية (الخطأ العشوائي). ويمكن التحكم في المتغيرات الخلفية بجعلها ثابتة أو بملاحظة المتغير التابع في قطاعات **blocks** مكونة من حالات منفصلة لكل متغير خلفي. فإذا لم يكن من المتاح الإبقاء على المتغير الخلفي ثابتاً أو إستخدام القطاعات فإنه يمكن حساب أثر المتغير الخلفي على المتغير التابع ببساطة عن طريق ملاحظة القيم التي يتخذها لكل وحدة تجريبية. والمتغيرات الخلفية (القطاعية) الشائعة الإستخدام لتكوين القطاعات تشمل: زمن العمل اليومي، المشغل، الآلة، الوردية، تدفق المواد الخام، يوم من الأسبوع، أحد فصول السنة، المنطقة الجغرافية، موديل المنتج، نوع التفاعل.

• **المتغيرات الغامضة (المجهولة) Nuisance Variable**

المتغير الغامض هو المتغير الغير معروف (غير معروف وقت التجربة) والذي قد يؤثر على المتغير التابع.

• **الوحدات التجريبية Experimental Unit**

الوحدات التجريبية هي المادة (شخص، شيء، مادة معدنية) التي يتم بواسطتها ملاحظة أو قياس المتغير التابع لمعالجة معينة. في مثال البنك كانت الوحدات التجريبية هي العملاء الذين سوف نلاحظ أوقات خدمتهم.

• **الخطأ التجريبي أو الخطأ العشوائي Experimental Error Or Random Error**

الخطأ التجريبي هو الاختلاف في المتغير التابع الذي لا يمكن أن يعزى لتغير المعالجة أو حالة المتغير الخلفي (القطاعي). وفي الحقيقة فإن الخطأ التجريبي هو الأثر المركب لجميع المتغيرات المجهولة على المتغير التابع. وإذا أحسن الباحث تحكمه أثناء التجربة، فإن الاختلاف في المتغير التابع نتيجة للخطأ العشوائي لا يجب أن يكون مؤثراً (أساسياً).

وربما تذكر من الجزء(٧-٢) أن المبدأ العام للتجارب المصممة إحصائية هو التعامل مع بيانات العينة بطريقة تقلل من الخطأ التجريبي (الأختلاف العشوائي) عن طريق التحكم بقدر الإمكان في المتغيرات المعروفة للاختلاف في المتغير التابع. وهذا المبدأ بعينه يدفعنا لتقسيم الأختلاف الكلي في

المتغير التابع لأجزاء تمثل: العوامل، المتغيرات الخلفية، والخطأ التجريبي (كما في الفصل الثامن). وكلما أمكن ذلك فإنه يمكن قياس آثار اختلافات المعالجات على المتغير التابع بصورة مباشرة. والإلتزام بتطبيق هذا المبدأ العام أصبح أكثر سهولة بإستخدام التعشية، القطاعات، والتكرار.

(١) **التعشية Randomization**: تتحقق بتخصيص الوحدات التجريبية عشوائيا على المعالجات والقطاعات (أو العكس). وتمنع التعشية الآثار المنتظمة للمتغيرات المجهولة. وبالتالي، نجد أن تأثير المتغيرات التي لايمكن التحكم فيها على المتغير التابع، تتوزع بغير تحيز على مختلف المعالجات. ويكون من الصدفة فقط أن تختلف الآثار التجميعية من معالجة لأخرى.

(٢) **القطاعات Blocking**: هي التحكم في مستويات المتغير الخلفي. وتتيح لنا عملية القطاعية أن نفصل ونقيس الأختلافات الجوهرية في المتغير التابع والناشئة عن تأثير المتغير الخلفي، وبالتالي تقليل الخطأ التجريبي (الأختلاف العشوائي).

(٣) **التكرار Replication**: هو المشاهدات المتكررة للمتغير التابع لكل معالجة خاضعة للتجريب (داخل كل قطاع إذا استخدمت القطاعات). ويقدم التكرار وسيلة لقياس الخطأ التجريبي مباشرة ولقياس معدل الأختلاف الناتج عن المتغيرات المجهولة.

وبإيجاز فإن التعشية تمنع الآثار الناتجة عن المتغيرات المجهولة، وتحمي من عملية التحيز المنتظم في تخصيص الوحدات التجريبية على المعالجات. والقطاعات تتيح للقائم بالتجربة إستخدام وحدات تجريبية غير متشابهة أو حالات خلفية مختلفة دون زيادة الخطأ العشوائي (التجريبي). وحيث أن الهدف هو تحديد مدى التغير في المتغير التابع نتيجة لتغير المعالجات، فإن القائم بالتجربة يجب أن يهتم بحجم الأختلاف الناتج عن المتغيرات المجهولة أو الغامضة. وباستخدام التكرار فإنه يمكننا تقييم مدى الخطأ التجريبي. ففي مثال البنك يعني ذلك أن كل خليط بين زمن العمل اليومي وعدد الصرافين المتاح سيتم عنده قياس الخدمة لعينة من العملاء (أكثر من عميل)، والأختلاف في أوقات خدمة العميل في كل خليط لا يمكن أن يعزى لتغير المعالجات، وبالتالي يمكن قياس مدى الخطأ التجريبي. وعلية فإن المقارنات بين المعالجات تقيس- كلما أمكن عمليا- التأثير في المتغير التابع الذي يعزي بالتحديد إلى التغير في المعالجة.

والتجريب وسيلة جيدة وغير مكلفة نسبياً يمكن بواسطتها زيادة خبرتنا عن عملية الإنتاج أو المنتج موضع الإهتمام. وفي دراسات العمليات فإن السبب المباشر للتجربة هو إما تأكيد المعرفة أو استكشاف آثار أوضاع جديدة، وبالتالي زيادة هذه المعرفة. والعمليات تكون ديناميكية فالآثار الناتجة عن العوامل المعروفة قد تتغيرإذا حدثت تغيرات جوهرية كاستبدال الالآت. وأخيرا فان الهدف من التجريب هو التنبؤ بكيفية سير العملية وفقاً لأوضاع مختلفة حتى يمكن معرفة الأوضاع التي يتحسن فيها أداء العملية.

وتعتمد الفائدة من نتائج التجربة على درجة التخطيط السابق للملاحظة الفعلية. والعنصر الأكثر أهمية في أي تجربة هو التقرير الواضح للمشكلة التي تحدد ما الذي ندركه أو نفهمه حالياً، ليؤدي إلى إدراك أو فهم أكبر بعد القيام بالتجربة. ويجب الاستفادة من المعرفة الشخصية المتوفرة عن موضوع المشكلة (من عدة أشخاص في النظام) وكذلك المعرفة المكتسبة من التجارب السابقة عند تصميم التجارب الجديدة. ووفقاً لذلك فإننا نكون معرفة شخصية عن الموضوع بصفة دورية. ويعتبر الشكل

البياني "السبب والنتيجة" و"خرائط التدفق" (الجزء ١-٥) من الأدوات الفعالة لتصحيح المعرفة الحالية عن العملية، والتعرف على إمكانية التجريب؛ وكذلك تحديد المتغيرات التابعة والعوامل والمتغيرات الخلفية (القطاعية). ويمكن الحصول على معرفة خاصة ذات قيمة بموضوع التجربة عن طريق أولئك الذين يشتغلون بالعملية. فمثلاً بالنسبة لعملية الخدمة يتضمن ذلك تحديداً: رجال البيع، الصرافين، السكرتارية، والمديرين. ولعملية الإنتاج يتضمن في الغالب المشتغلين، الفنيين، المهندسين، المشرفين (الملاحظين).

وبمجرد فهم العملية جيداً فإنه يجب تحديد خواص الجودة المتعلقة بها لتمثيل المتغيرات التابعة في التجربة. ونطاق هذه الخواص عريضة بصورة مدهشة؛ والأمثلة على ذلك تتضمن: الأداء، الوقت، أوقات التسليم، الإعتمادية، مستوى الخدمة، الإستحقاق، الإتساق، الإنتظام (الدورية)، وجود عناصر مرغوبة، الشكليات، الأمان، والسعة.

وتختلف شروط الدراسة غالباً إلى حد ما عن الأوضاع القائمة عند قياس النتائج، وتتحدد دقة النتائج التجريبية بمدى دقة التوقع بالنتائج الفعلية بعد التطبيق. والبداية الأساسية لتحقيق دقة تنبؤية جيدة هو إجراء التجربة على مدى واسع من الشروط (الأوضاع) التي تعكس- بقدر الامكان- نفس المدى من الأوضاع المتوقع وجودها عند التطبيق. وبالتالي فإن محلل الأداء البنكي يجب أن يلاحظ أوقات الخدمة خلال أكثر أوقات اليوم إزدحاماً، وكذلك أقلها إزدحاماً. فمثلاً يمكن للمحلل أن يختار فترتين زمنيتين من 9:00 إلى 10:00 صباحاً (الأقل إزدحاماً)، ومن 12:00 إلى 1:00 ظهراً (أكثر الفترات إزدحاماً). وطالما أن أوضاع الدراسة ستختلف عن الأوضاع التي عندها ستطبق نتائج هذه الدراسة، فإن تحليل نتائج الدراسة يجب أن يتضمن قياس للإتجاهات، والعواقب الناشئة عن هذا الإختلاف عن طريق الخبراء بموضوع الدراسة.

وتوجد طريقتان لتحليل نتائج التجارب المصممة: التحليل البياني المبني على تمثيل البيانات بنقاط على رسم بياني، والاستدلال الإحصائي المبني على تحليل التباين. والهدف من التحليل البياني هو إظهار طبيعة أثار العوامل؛ عن طريق التقسيم المرئي للبيانات وفقاً لمصادر الاختلاف في الدراسة بإستخدام أقل تجميع للبيانات. فمثلاً يكون من الأفيد تمثيل البيانات الأصلية بطريقة ما بدلا من تمثيل المتوسطات للمجموعات الفرعية المختلفة للبيانات. ومن المهم تمثيل البيانات التجريبية المشاهدة عبر الزمن لاكتشاف وجود مسببات خاصة للاختلاف يمكن أن تكون قد حدثت خلال هذا الزمن.

وكما في الفصول السابقة، فإن الهدف من الاستدلال الأحصائي هو تأكيد الإستنتاجات (المقترحة غالبا من التحليل البياني) المتعلقة بالعملية المترتبة على القيام بالتجربة.

خطط المعاينة :التصميمات كاملة العشوائية والقطاعات العشوائية

في الفصول(٧)، (٨) ناقشنا خطتي معاينة: العينات العشوائية المستقلة، والعينات في قطاعات. هذه أمثلة على نوعين أساسيين لعملية المعاينة يستخدما غالبا في التجارب التي تحتوي على أكثر من عامل. خطة العينات المستقلة هي مثال لتجربة تثبت فيها جميع المتغيرات الخلفية، ووحدات المعاينة يتم تخصيصها عشوائيا على المعالجات، وتكون كل الاختلافات داخل العينة سببها متغيرات مجهولة.

ويعرف أسلوب العينات المستقلة غالبا بخطة المعاينة كاملة العشوائية **Completely Randomized Sampling Plan**. أما خطة العينات في قطاعات فهي تجربة تكون فيها وحدات المعاينة نفسها بمثابة قطاعات لأنها تختلف تماما فيما يتعلق بمتغير خلفي معين. وتعرف هذه الخطة عامة بخطة معاينة القطاعات كاملة العشوائية **Randomized Complete block Sampling Plan**.

***(١) في خطة المعاينة كاملة العشوائية* Completely Randomized Sampling Plan :-** يتم تخصيص الوحدات التجريبية على المعالجات (أو العكس) بطريقة عشوائية تماما. وتكون جميع المتغيرات الخلفية ثابتة. ويكون كل الأختلاف داخل أي معالجة ناشئاً عن وجود متغيرات مجهولة. وبالتالي يكون الأختلاف بين قيم المتغير التابع داخل كل معالجة بمثابة الخطأ التجريبي.

***(٢) في خطة المعاينة للقطاعات كاملة العشوائية* Randomized Complete block Sampling Plan :-** يقوم المحلل بوضع أكبر عدد ضروري من القطاعات تحسبا للاختلافات بين الوحدات التجريبية والناتجة عن المتغيرات الخلفية، وتكون جميع الوحدات التجريبية داخل القطاع مخصصة عشوائية على المعالجات. وكلمة "كاملة **Complete**" توضح أن كل قطاع يحتوى على جميع المعالجات، بينما تعني كلمة :عشوائية **Randomized**" أن الوحدات التجريبية في كل قطاع يتم تخصيصها عشوائيا على المعالجات. ويتوقع وجود اختلاف كبير في قيم المتغير التابع بين القطاعات بسبب وجود متغير خلفي.

اذا حدد الباحث انه لاتوجد متغيرات خلفية، أو أختار أن تكون كل المتغيرات الخلفية ثابته فإن الطريقة الملائمة لتخصيص الوحدات التجريبية على المعالجات هي خطة المعاينة كاملة العشوائية، وفي كثير من الأحيان يدرك القائم بالدراسة في البداية أنه ليس لكل الوحدات التجريبية نفس الأثر على المتغير التابع. وإذا أعتقد بوجود متغير خلفي، فإن القائم بالتجربة عليه أن يحتاط للاختلاف المتوقع أن يسببه هذا المتغير الخلفي في المتغير التابع، ويتم ذلك عن طريق حجب الأختلاف الذي يعزي للمتغير الخلفي.

في مثال البنك، ما هي خطة المعاينة التي تراها مناسبة لقياس أوقات الخدمة؟ إن هذا يعتمد على عمليات البنك التي يتولاها الصرافون. فإذا كانوا يقومون فقط بالأعمال الروتينية مثل فحص الإيداعات والمسحوبات، فإن نوع العمل غالبا يسبب اختلافاً طفيفاً في أوقات الخدمة. وعلى الجانب الأخر إذا كانت بعض الأعمال أكثر تعقيداً وأكثر استهلاكاً للوقت من الأعمال الأخرى، فإن نوع العمل هو متغير خلفي ويجب أخذه في الإعتبار كعامل قطاعي، وفي النهاية فإنه يجب تسجيل نوع التعامل حتى يمكن الرجوع إلى ذلك مستقبلا.

توثيق التجربة المصممة

لمساعدتك على التخطيط لتجربة ما، فإننا ننصح بشدة أن تقوم بتوثيق جوانب معينة في الخطة وبعناية شديدة. حيث يساعد ذلك على التأكد من أن كل المهتمين بالموضوع أصبح لديهم فكرة أساسية عن أهداف التجربة؛ وخطواتها ؛ والطريقة المتبعة في تحليلها. ويقدم الجدول(١٣-١) نموذج يحتوى على سبع أجزاء أساسية لتحقيق الغرض السابق:

جدول (١٣-١)
نموذج توثيق التجربة المصممة

(١) الهدف :
(٢) المعلومات المتاحة حاليا عن المشكلة :
(٣) المتغيرات التي يجب دراستها :

(أ) متغيرات تابعة	كيفية قياسها
١.	
٢.	
٣.	

(ب) العوامل	المستويات وطريقة الاختيار
١.	
٢.	
٣.	
٤.	
٥.	
٦.	
٧.	

(ج) المتغيرات الخلفية	طريقة التحكم فيها
١.	
٢.	
٣.	

(٤) التكرار :
(٥) طريقة التعشية :
(٦) مصفوفة التصميم : (نسخة ملحقة)
(٧) الطريقة المخططة للتحليل الإحصائي :

(١) يعتبر التحديد الجيد للهدف من التجربة عامل هام في نجاح أي تجربة جيدة التصميم. وعند التحديد يجب أن يحدد القائم بالتجربة النتائج المطلوبة لأعمال معينة.

(٢) إن توثيق المعرفة الحالية عن المشكلة هو أمر هام، لأن هذه المعرفة ترشدنا للبحث عن معرفة جديدة. وعند طلب المعرفة الجديدة، يجب أن يكون فريق البحث مستعدا للتصرف المناسب. وبالتالي تكون الخطط المحتملة لأشكال التصرف المختلفة جزءاً من التجربة جيدة التصميم.

(٣) من المهم التفرقة بين متغيرات التجربة، فنحن نحاول في النهاية أن نكشف مصادر الأختلاف

الملموس في المتغير التابع، ولذلك فإن تعريف المتغير التابع هو أمر بالغ الأهمية. ومن بين المتغيرات التي يمكن أن تسبب التغير، سيكون هناك مجموعة نريد دراسة آثارها (العوامل)، والبعض الأخر قد نرغب في الإبقاء عليه ثابتاً أو جامداً (المتغيرات الخلفية)، ويبقى البعض الآخر تكون آثارها طفيفة (المتغيرات المجهولة أو الغامضة) والتي سيتم التحكم فيها بإستخدام التكرار والتعشية.

(٤) يتيح التكرار الفرصة لقياس مدى الخطأ التجريبي. وتوجد طرق عديدة لتطبيق عملية التكرار ابتداء من الملاحظات المتكررة للمتغير التابع بإستخدام نفس الوحدات التجريبية، حتى الملاحظات المتعددة للمتغير التابع بإستخدام وحدات تجريبية مختلفة التكوين، ولكنها واحدة بالنسبة للمعالجات والمتغيرات الخلفية.

(٥) تتحقق عملية التعشية إما بالعشوائية الكاملة بتخصيص الوحدات التجريبية على المعالجات (إذا كانت الوحدات متماثلة) أو بعشوائية تخصيص الوحدات التجريبية على المعالجات داخل القطاعات المستقلة. ويمكن تحقيق العشوائية بإستخدام الأرقام العشوائية (نحصل عليها غالباً من الحاسب الآلي كما وضحت في الجزء (٥-٢)).

(٦) مصفوفة التصميم هي التحديد الكامل للشروط التجريبية (الأوضاع التجريبية) التي بموجبها ستتم ملاحظة المتغير التابع، وللترتيب المحدد الذي بواسطته سيتم تنفيذ هذه الملاحظات كما بينتها عملية التعشية.

(٧) تحليل قياسات المتغير التابع يجب أن تتضمن التحليل البياني وأسلوب مناسب من تحليل التباين.

مثـال (١٣-١)

في مثال البنك أكمل نموذج التوثيق كما في جدول (١٣-١) وذلك لتخطيط تجربة لتحديد أثر وقت العمل اليومي وعدد الصرافين المتاح على أوقات خدمة العملاء في البنك.

الحـل

وفقا للملاحظات التي ظهرت في هذا المثال خلال الجزء السابق، يمثل جدول (١٣-٢) نموذج التوثيق الكامل لهذه التجربة المصممة.

جدول (١٣-٢)

"شكل التوثيق الكامل لمثال ١٣-١"

١- الهدف :

تحديد أثر العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح على أوقات خدمة العملاء. فإذا كانت أوقات خدمة العملاء تختلف في المتوسط خلال فترات معينة من العمل اليومي، وإذا كان لعدد الصرافين المتاح أثر جوهري على وقت الخدمة، فإن فريق العمل سيعاد تنظيمه.

٢- المعرفة الحالية بخصوص الموضوع:

تبدو أوقات الخدمة أطول خلال الظهيرة. وعلى الأرجح فإن سبب ذلك هو زيادة الحركة داخل البنك أثناء ساعة الغذاء.

٣- المتغيرات الواجب دراستها :

	كيفية قياسها
(أ) المتغيرات التابعة	
١- وقت خدمة العملاء (بالثوان)	ساعة الايقاف stopwatch
(ب) العوامل	"المستويات وطريقة الاختيار"
١- زمن العمل اليومي	مقارنة أول ساعات العمل(9-10 صباحا) بساعة الظهيرة (12-1) ظهراً.
٢- عدد الصرافين	اختيار مدروس في حالة وجود اثنين أو ثلاثة أو أربعة صرافين.
(ج) المتغيرات الخلفية	"طريقة التحكم"
١- نوع الوظيفة البنكية	تسجيل النوع
٢- يوم العمل الأسبوعي	تسجيل اليوم

٤- التكـــرار

لكل توفيقه **Combination** بين زمن العمل اليومي وعدد الصرافين، سيتم إختيار خمسة من العملاء عشوائيا وسيتم تسجيل زمن الخدمة لهم.

٥-طريقة التعشية:

طالما سيتم تسجيل نوع العمل البنكي، ويوم العمل الأسبوعي، فيجب إستخدام خطة معاينة كاملة العشوائية وذلك عن طريق قياس أوقات الخدمة للعملاء المختارين عشوائيا لكل خليط أو توفيقه بين زمن العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح.

٦-مصفوفة التصميم:

زمن العمل اليومي	عدد الصرافيـــــــن 2	3	4
9 - 10صباحا	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×
12-1 ظهرا	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×

(× : زمن الخدمة بالثواني، لعميل تم إختياره عشوائياً)

٧- الطرق المخططة للتحليل الإحصائي :

سيتم فحص أي أوقات خدمة كبيرة وغير طبيعية، وخاصة بالنظر إلى نوع العمل البنكي المرتبط بها. كما سيتم عمل تحليل بياني لأوقات الخدمة لكل خليط أو مزيج بين زمن العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح، وسيتم إستخدام أسلوب مناسب لتحليل التباين لتحديد ما اذا كان لزمن العمل اليومي، وعدد الصرافين المتاح، أثر إحصائي معنوي على أوقات الخدمة.

تماريــــن

(١٣-١) لماذا يعتبر التحديد الواضح للمشكلة هو اهم عنصر في أي تجربة ؟

(١٣-١) ذكرنا أن العمليات تكون ديناميكية. ناقش أهمية هذه العبارة ؟

(١٣-٣) وضح المقصود بالأثر **effect** على المتغير التابع ؟

(١٣-٤) ناقش بإختصار مصادر الخطأ العشوائي في التجربة المصممة وما أسبابها ؟

(١٣-٥) وضح الفرق بين العوامل والمتغيرات الدخيلة ؟

(١٣-٦) إفترض أننا نعتقد بوجود متغير خلفي في موقف تجريبي معين. ناقش تأثير هذه الدقيقة وخطوات التصميم التي قد نتخذها كنتيجة لذلك؟

(١٣-٧) ما هو المبدأ العام للتجارب المصممة إحصائيا ؟

(١٣-٨) حدد مع الوصف الطرق التي بواسطتها نحاول تقليل الخطأ التجريبي ؟

(١٣-٩) في التجارب المصممة إحصائيا، يتم تخصيص الوحدات التجريبية عشوائيا على المعالجات. في سياق مثال معين، وضح ما يترتب على الإخفاق في ذلك ؟

(١٣-١٠) وضح الطريقتين الأكثر إستخداما في المعاينة في التجارب المصممة، وأشرح الفرق بينهما؟

(١٣-١١) توضح إحصائيات الحوادث أن أكثر من 50% من حوادث السيارات المميتة في الولايات المتحدة الأمريكية سببها سائقين مخمورين. إفترض إنك عينت في ادارة المرور بالولاية لفحص المدى الذي يتسبب فيه الكحول في الإخلال بقدرة الشخص على أداء مهام القيادة العادية. ناقش الجوانب الهامة للتصميم وأكمل نموذج توثيق التجربة المقترحة ؟

(١٣-١٢) تريد إحدى شركات التأمين أن تقارن بين أربعة مستشفيات رئيسية في المنطقة من حيث المدة التي يمكثها- في المتوسط- المرضى الذين يعانون من نفس المرض. ناقش تصميم التجربة الذي ينطبق على هذا الموقف وأكمل نموذج التوثيق الخاص بتصميمك؟

(١٣-١٣) بالإشارة لتمرين (٨-٣٩). ناقش إعتبارات التصميم التي يمكن أن نخفف من المشكلة المعروضة في هذا التمرين، وأكمل نموذج التوثيق لتصميمك؟

(١٣-١٤) في أي عملية تكون مألوفة بالنسبة لك، إعرض الأمثلة الممكنة لما يلي:

(أ) المتغيرات التابعة. (ب) العوامل.

(ج) المتغيرات الخلفية. (د) الوحدات التجريبية

(هـ) المتغيرات الغامضة (المجهوله). (و) القطاعات.

(١٣-٣) تصميم التجارب لاثنين أو أكثر من العوامل: التجارب العامليه

Designs For Two or More Factors: Factorial Experiments

في هذا الجزء نناقش التجارب العامليه، وهو التصميم الأكثر فعالية للتحليل الآني (في وقت واحد) لأثار عاملين أو أكثر على متغير تابع. وتأتي الفاعليه من أن أثار كل العوامل يمكن دراستها آنياً بإستخدام المعلومات عن تجربة مفردة، وهو أمر بالغ الأهمية لإجراء تجربة منفصلة لكل عامل. ويمكن إجراء التجارب العامليه إما بإستخدام خطة معاينة كاملة العشوائية أو تصميم القطاعات العشوائية

في التجربة العامليه **Factorial Experiment** تتم ملاحظة المتغير التابع لجميع المعالجات، أي أن المتغير التابع تتم ملاحظته وفقاً لجميع حالات التوافيق الممكنة بين مستويات العوامل الخاصة بالدراسة، فمثلاً إذا كان لدينا عاملان، أحدهما له أربعة مستويات والأخر له ثلاث مستويات؛ فإن المتغير التابع سيتم ملاحظته لعدد 12=({4}{3}) معالجة مختلفة. ولنفترض الأن وجود ثلاث عوامل لها 2، 3، 4 مستويات على الترتيب، فإن المتغير التابع سيتم قياسه وفقاً لـ 24 =({4}{3}{2}) معالجة مختلفة.

لنتذكر الأن مثال البنك (مثال (١٣-١)). حيث يوجد فترتين زمنيتين، وثلاث أعداد مختلفة للصرافين، فإننا نوجد إجمالي (6) معالجات ({3}{2}) ويتم ملاحظة أوقات الخدمة لكل منها. ووفقاً لمصفوفة التصميم الواردة في جدول (١٣-١) تكون المعالجات الست كالتالي:

عدد الصرافين	وقت العمل	المعالجة
2	9 – 10	1
2	12 – 1	2
3	9 – 10	3
3	12 – 1	4
4	9 – 10	5
4	12 – 1	6

الأهداف المستنتجة من تجربة عامليه ذات عاملين: الأثار الرئيسية والتفاعل:

لنواصل الحديث عن مثال البنك لنرى ما الذي نأمل في إنجازه فيما يتعلق بالإستنتاج (الإستدلال). نريد أن نكتشف ما إذا كان التغير في أوقات الخدمة في المتوسط (أي التأثير) يمكن ملاحظته إذا غيرنا عدد الصرافين الذين يقومون بخدمة العملاء. ونريد أن نعرف ما اذا كان تغير أوقات الخدمة في المتوسط له تأثير إذا غيرنا زمن العمل اليومي. وبمعنى أخر فإننا مهتمين بإكتشاف هل الأثر الفردي لعدد الصرافين هو أثر ملحوظ بغض النظر عن زمن العمل اليومي، وبالمثل نريد تحديد هل الأثر الفردي لزمن العمل اليومي هو أثر ملحوظ بغض النظر عن عدد الصرافين. وهكذا فإنه لكل عامل في التجربة العامليه، فإننا نريد قياس أثره الفردي على المتغير التابع دون النظر إلى مستويات العوامل الأخرى. وتعرف هذه الأثار الفردية بـ"الأثار الرئيسية" **Main Effects**. وبالإضافة لقياس الأثار الرئيسية، فإننا نريد تحديد ما إذا كان أثر عامل ما على المتغير التابع يعتمد على مستويات العوامل الأخرى، فإذا كان كذلك نقول أنه يوجد تفاعل (**Interaction**) بين العوامل.

في مثال البنك، وجود تفاعل بين عدد الصرافين وزمن العمل اليومي يعني أن تأثير تغير عدد

الصرافين يتوقف على الفترة الزمنية المعينة. فربما تقل أوقات الخدمة بشكل كبير عند زيادة عدد الصرافين في الفترة من 12 إلى 1 ظهراً، بينما تقل بصورة طفيفة بين 9 وإلى 10 صباحاً. وبصورة عكسية، قد يعني وجود التفاعل أن تأثير تغير الفترة الزمنية يتوقف على عدد الصرافين.

والآن إفترض أنه لدينا (3) عوامل C,B,A في تجربة عامليه وبالإضافة للآثار الرئيسية للعوامل الثلاث، يوجد أربعة آثار للتفاعل، حيث يمكن أن يوجد التفاعل بين B,A ، بين C,A ، بين C,B وأخيراً بين العوامل الثلاثة C,B,A. ويتم قياس آثار التفاعلات الأربعة لجمبع حالات التوافيق بين العوامل الثلاثة C,B,A . ويطلق على التفاعل بين عاملين "تفاعل من الرتبة الأولى **First- Order interaction**"، كما يطلق على التفاعل بين ثلاثة عوامل "تفاعل من الرتبة الثانية **Second- Order interaction**" وهكذا. وفي التجربة ذات ثلاثة عوامل، فإن التفاعلات الثلاثة من الرتبة الإولى يرمز لها بـAB, AC ,BC، بينما يرمز للتفاعل من الرتبة الثانية ABC. وفي جدول (١٣-٣) نعرض المصادر المكنة للأختلاف في المتغير التابع المتضمن بالعوامل الثلاثة C,B,A لتجربة عامليه.

جدول (١٣-٣)

مصدر الأختلاف في تجربة بها ثلاثة عوامل A,B,C

المصدر	نوع الأثر
A B C	الآثــــار الرئيسية
AB AC BC	التفاعلات من الرتبة الأولى
A B C	التفاعل من الرتبة الثانية

(١٣-٣-١) تحليل التجارب العاملية في حالة المعاينة كاملة العشوائية (التعشية الكاملة)

Analysis of Factorial Experiments when Sampling is Completely Randomized

سنتناول الآن بالشرح تحليل التجارب العامليه ذات عاملين عندما تكون المعاينة كاملة العشوائية. أي لا توجد قطاعات، ويتم تخصيص المعالجات على الوحدات التجريبية عشوائيا، وبالتالي فإن كل المتغيرات الخلفية إما أن تكون غير موجودة أو تم جعلها ثابتة.

إفترض أنه في مثال البنك اتبعنا خطة المعاينة كاملة العشوائية. هذا يعني أننا نختار عشوائيا عينة من العملاء لكل من المعالجات الست. افترض أننا قمنا بتسجيل أوقات الخدمة لعينة عشوائية(n=5) مكونة من خمس عملاء للمعالجات الستة لنحصل على 30 مشاهدة لأوقات الخدمة. فإذا كان حجم العينة متساويا لجميع المعالجات تكون التجربة العامليه متوازنة **Balanced**. وينصح بشدة بإستخدام التجارب العامليه المتوازنة لما لها من مزايا نظرية كبيرة مقارنة بكل التصميمات غير المتوازنة.

ووفقا لشكل مصفوفة التصميم في جدول(١٣-٢) . افترض أن أوقات الخدمة (بالثواني) كانت كما بالجدول (١٣-٤).

جدول (١٣-٤)
أوقات الخدمة لـ (30) عميل من عملاء البنك

زمن العمل اليومي	عدد الصرافين		
	2	3	4
9 - 10 صباحا	96 100 90 106 98	80 92 94 90 88	84 80 85 87 82
12 - 1 ظهرا	120 115 125 132 124	114 125 118 119 116	110 120 106 116 108

* التحليل البياني Graphical Analysis

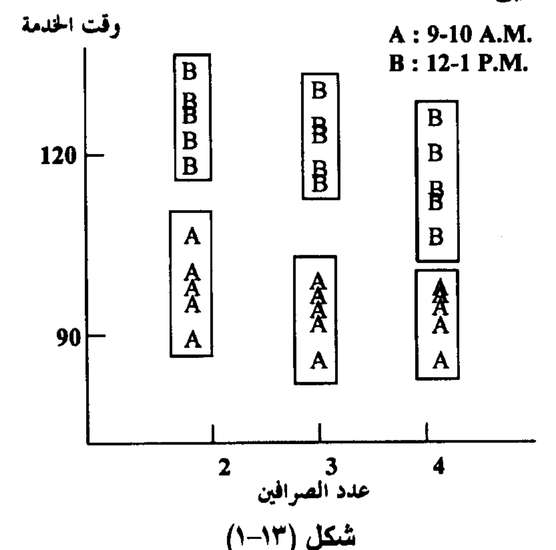
كما ورد في الفصل السابق فإن المدخل الرئيسي لتحديد ما إذا كان الأثرين الرئيسيين، وأثر التفاعل لهما تأثير ملحوظ يعتمد على التحليل البياني وشكل (١٣-١) يمثل أوقات الخدمة الواردة في جدول (١٣-٤) على المحور الرأسي مقابل عدد الصرافين على المحور الأفقي للفترتين الزمنيتين من 9-10 ورمزها (A) ومن 12-1 ورمزها (B). للحصول على هذا الشكل، نستخدم نفس الطريقة التي جاءت في الجزء(٨-٣).

ونهدف من شكل (١٣-١) إلى ثلاثة أشياء :

(1) تحديد ما إذا كان هناك اختلاف جوهري في أوقات الخدمة داخل كل معالجة من المعالجات الستة، وإلى أي مدى يختلف هذا الأختلاف بين المعالجات.

(2) قياس الآثار الرئيسية للعاملين.

(3) قياس أثر التفاعل بين العاملين.



شكل (١٣-١)
العرض البياني لأوقات الخدمة مقابل عدد الصرافين وزمن العمل اليومي

وبملاحظة الشكل (١٣-١) نجد ما يلي:

١. الأختلاف العشوائي **Random Variation:** لا يبدو الإختلاف في أوقات الخدمة داخل كل معالجة (الموضح بالمستطيلات التي تحتوي على المشاهدات الخاصة بكل معالجة) كبيراً. بالإضافة إلى ذلك يظهر مدى الأختلاف واحداً تقريباً بين المعالجات الستة، ولا تظهر أي أوقات خدمة شاذة (متطرفة).

٢. الآثار الرئيسية **Main Effects:** يتضح وجود أثر كبير يعزي لفترتي العمل اليومي، حيث تزيد أوقات الخدمة بصورة ملحوظة خلال ساعة الظهيرة. بالإضافة إلى ذلك يظهر تناقص أوقات الخدمة- في المتوسط- كلما زاد عدد الصرافين.

٣. التفاعل **Interaction:** تميل أوقات الخدمة للزيادة بنفس القدر تقريباً إذا غيرنا الفترة الزمنية من 9-10صباحاً إلى 12-1 ظهراً، بغض النظر عن عدد الصرافين. كما يبدو أيضاً تناقص أوقات الخدمة إذا غيرنا عدد الصرافين من 2 إلى 4 ، بغض النظر عن الفترة الزمنية. وكنتيجة لذلك لا يبدو أي أثر للتفاعل بين كلا العاملين.

*** أسلوب تحليل التباين : تقسيم مجموع المربعات الكلي The Analysis of Variance Procedure**

سنركز إهتمامنا الآن على تقديم أسلوب تحليل التباين لتجربة عامليه ذات عاملين بإستخدام مثال أوقات الخدمة كتوضيح. وأسلوب تحليل التباين يؤكد وجود (أو ينفي وجود) ما يمكن أن يميز احصائياً:

(1) الأثر الرئيسي الذي يعزى لزمن العمل اليومي.

(2) الأثر الرئيسي الذي يعزى لعدد الصرافين.

(3) أثر التفاعل بين أوقات العمل وعدد الصرافين.

ويعني ذلك أننا نريد أن نختبر آنيا الفروض العدمية المناظرة التالية:

(1) H_0 : لا يوجد أثر رئيسي يعزى لزمن العمل اليومي.

(2) H_0 : لا يوجد أثر رئيسي يعزى لعدد الصرافين.

(3) H_0 : لا يوجد أثر للتفاعل بين زمن العمل اليومي وعدد الصرافين.

فإذا ناقضت بيانات العينة الفرض العدمي القائل بعدم وجود أثر رئيسي يعزي لزمن العمل اليومي، فإن ذلك يؤكد استنتاجنا الأولى من التحليل البياني، ولكن اذا لم تتناقض بيانات العينة مع الفرض العدمي، فإن إستنتاجنا من الرسم البياني لايكون جوهرياً أو هاماً، فربما كان ظهور الأثر كان نتيجة للاختلاف العشوائي بين أوقات الخدمة.

وحيث أننا استخدمنا تصميم كامل العشوائية في مثال البنك، فإن مجموع المربعات الكلي لأوقات الخدمة يمكن تقسيمه إلى جزئين: الأختلاف الذي يعزي للمعالجات، والأختلاف الذي يعزي للخطأ العشوائي (الخطأ التجريبي)، وبالتالي فإن :

$$SST = SSTR + SSE$$

والمكونات السابقة معرفة كما في الجزء (٨-٢). ولكن لاحظ أن الأختلاف بين المعالجات الستة (SSTR) يمثل الاختلاف المركب الذي يعزي للأثرين الرئيسين وأثر التفاعل. وللتوضيح نرمز

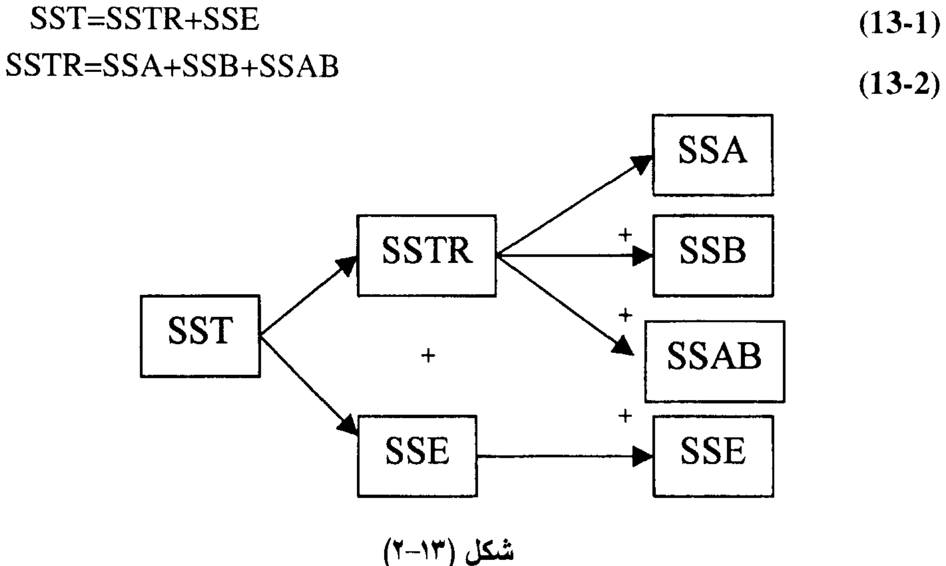
لزمن العمل اليومي بالعامل A واعدد الصرافين بالعامل (B). وبدوره ينقسم مجموع مربعات المعالجات إلى ثلاثة مجاميع مربعات منفصلة للأثر الرئيسي A، والأثر الرئيسي B، وأثر التفاعل AB، أي أن:

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB$$

ويوضح شكل (١٣-٢) تقسيم مجموع المربعات الكلي، وكذلك تقسيم مجموع مربعات المعالجات، ويتضح من هذا الشكل أن:

$$SST=SSTR+SSE \quad (13-1)$$

$$SSTR=SSA+SSB+SSAB \quad (13-2)$$



شكل (١٣-٢)

تقسيم SST, SSTR في تجربة عامليه ذات عاملين

ويتم حساب هذه المجاميع بإستخدام الحاسب الآلي. ومن المهم- على أية حال- معرفة درجات الحرية المرتبطة بها. وكما أوضحنا في الفصل الثامن، فإن درجات الحرية الخاصة بـSST هي العدد الكلي للمشاهدات الخاصة بالمتغير التابع مخصوماً منها (1). درجات الحرية لـ SSTR هي العدد الكلي للمعالجات مخصوماً منها واحد. وحيث يمكن تقسيم درجات الحرية، فإن درجات حرية SSE تساوي درجات حرية SST مطروح منها درجات حرية SSTR. ويمكن تقسيم درجات حرية SSTR لكل من SSA, SSB ,SSAB. ودرجات حريةSSA تساوي عدد المستويات الخاصة بالعاملA مطروح منها العدد (1)، ودرجات حرية SSB تساوي عدد مستويات العامل B مطروح منها (1). وأخيرا فإن درجات حرية SSAB تساوي حاصل ضرب درجات حرية SSA ودرجات حرية SSB.

وفي مثال البنك، توجد (30) مشاهدة لأوقات الخدمة، (6) معالجات، مستويين للعامل(A) وثلاثة مستويات للعامل (B). وفيما يلي درجات الحرية الخاصة بهذا المثال:

"مصدر الأختلاف"		"درجات الحرية"
المعالجات	زمن العمل اليومي (العامل A)	1
	عدد الصرافين (العامل B)	2
	زمن العمل × عدد الصرافين (AB)	2
	الخطأ	24
الكلي		29

ولتحديد ما إذا كانت الآثار الرئيسية وأثر التفاعل لها معنوية إحصائية، فإننا نستخدم تحليلاً موازياً لما استخدمناه في الفصل الثامن. أي أننا نحدد أولاً قيمة (F) لكل من الآثار الثلاثة بتكوين النسبة بين متوسط المربعات موضع الاهتمام ومتوسط مربعات الخطأ. (تذكر أن متوسط المربعات يساوي مجموع المربعات مقسوما على درجات الحرية الخاصة به) وبالتالي إذا كانت قيمة (F) كبيرة بشكل كاف مما يعني قيمة (P-Value) (P) صغيرة، فإن الفرض العدمي يثبت عدم صحته وفقا للعينة، ويكون الأثر المختبر معنويا من الناحية الإحصائية. وعلى ذلك تكون قيم (F) الخاصة بالآثار A، B، AB كما يلي :

$$F_A = \frac{MSA}{MSE} \qquad (13.3)$$

$$F_B = \frac{MSB}{MSE} \qquad (13.4)$$

$$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE} \qquad (13.5)$$

وفيما يلي جدول تحليل التباين لبيانات مثال البنك :

جدول (١٣-٥) جدول تحليل التباين لمثال البنك

المصدر	درجات الحرية DF	مجموع المربعات SS	متوسط المربعات MS	F	P
الزمن	1	5768.5	5768.5	214.31	0.000
الصرافين	2	821.6	410.8	15.26	0.000
الزمن*الصرافين	2	25.9	12.9	.48	0.624
الخطأ	24	646.0	26.9	——	——
الكلي	29	7262.0	——	——	——

ونلاحظ من الجدول أن قيم (P) للأثرين الرئيسيين تساوي الصفر تقريباً، بينما قيمة (P) لأثر التفاعل تساوي 0.624، ويؤكد ذلك استنتاجنا المبدئي القائم على التحليل البياني بأن الآثار الرئيسية لزمن العمل اليومي وعدد الصرافين لها دلالة إحصائية (قيم P=.000) بينما أثر التفاعل غير المعنوي. (قيمة P=.624).

*** إعتبارات تحسين العملية في مثال البنك:**

كيف قدمت لنا نتائج مثال البنك فرصة لتحسين عملية الخدمة؟ لعلنا عرفنا الآن أن أوقات الخدمة في ساعة الظهيرة تزيد بشكل ملحوظ عن مثيلاتها في الفترة من 9 إلى 10 صباحا، وكذلك أن أوقات الخدمة تقل كلما زاد عدد الصرافين. وبناء على ذلك فإنه لتحسين عملية الخدمة في هذا البنك- وخاصة خلال ساعة الظهيرة- فإن إدارة البنك قد تقرر تخصيص بعض واجبات (أعمال) الصرافين خلال ساعة الظهيرة على مجموعة من الموظفين الآخرين، أو تقوم بتعيين عاملين مؤقتين وتقوم بتدريبهم على تولي هذه الأعمال بكفاءة. ورغم ذلك يجب أن تلاحظ أن هذه البيانات تصف فرع واحد فقط من فروع البنك، وقد يكون من الملائم الآن أن تمتد الدراسة لفروع أخرى.

مثال (١٣-٢)

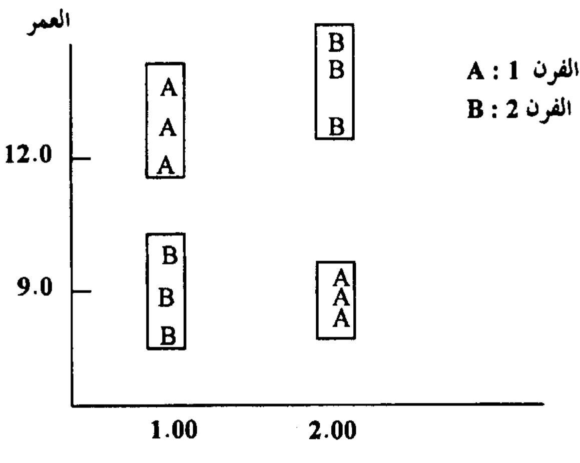
يوضح هذا المثال وجود التفاعل بين عاملين. إستخدم أحد مصنعي المواد الإلكترونية نوعين من الأفران، ودرجتي حرارة مختلفتين (الأولى أقل من الثانية)، وذلك لاختبار عمر نوع معين من المكونات، تم إختبار (12) وحدة من هذا المنتج أو المكون (الوحدات التجريبية) عشوائيا من خط إنتاج معين، وتم تخصيص ثلاثة منها عشوائياً لكن من حالات التوافيق الأربعة (المعالجات) بين الأفران ودرجات الحرارة. وكانت أعمار هذه الوحدات بالساعات كالتالي :

درجة الحرارة المستخدمة	الفرن	
	الفرن (1)	الفرن (2)
الدرجة (1)	12.5	10.2
	12.0	9.6
	13.0	8.9
الدرجة (2)	8.8	12.8
	8.6	13.9
	9.0	13.6

مثل هذه البيانات بيانيا للوصول إلى استنتاج مبدئي عن إحتمال وجود تفاعل بين الأفران ودرجات الحرارة ؟

الحـــل

يوضح التمثيل البياني لهذه البيانات (شكل ١٣-٣) أنه عند إستخدام الفرن (1) تكون الأعمار أطول عند درجة الحرارة الأقل، ولكن عند إستخدام الفرن(2) تكون الأعمار أطول عند درجة الحرارة الأعلى. ومن الواضح أن أثر الحرارة على العمر للوحدة المنتجة يتوقف على الفرن المستخدم في الإختبار، وبالتالي يوجد تفاعل بين الفرن ودرجة الحرارة. لاحظ أنه يمكن وضع خط في الرسم البياني يصل بين متوسطي المعالجتين الخاصتين بالفرن الأول(1). وخط آخر يصل بين متوسطي المعالجتين المتعلقتين بالفرن (2). هذه الخطوط الغير متوازية تدل بوضوح على وجود التفاعل.



شكل (١٣-٣): توضيح للتفاعل بين عاملين

وممّا هو جدير بالذكر أنه في [illegible] عند [illegible] التفاعل قد يجعل واحدا او أكثر من الآثار الرئيسية للعوامل [illegible] ولا يعني هذا بالضرورة أن يكون العامل غير مهم، [illegible] في مثال (١٣-٢)، هذه المتوسطات مبينة في الجدول (١٣-٦) التالي:

جدول (١٣-٦) : متوسط الأعمار للمثال (١٣-٢)

	الفرن (1)	الفرن (2)	متوسط الصف
درجة الحرارة (1)	12.5	9.57	11.03
درجة الحرارة (2)	8.8	13.43	11.12
متوسط العمود	10.65	11.50	المتوسط العام 11.08

لاحظ أن الأعمار المتوسطة [illegible] 13.43) بينما تختلف المتوسطات [illegible] (الصف، العمود) عن العمر [illegible] (11) بمقدار ضئيل. أكثر من هذا، عند درجة الحرارة الأولى، يتناقص العمر المتوسط إذا انتقلنا من الفرن (1) إلى الفرن (2)، بينما عند درجة الحرارة 2، نرى أن العمر المتوسط يتزايد عند [illegible] من الفرن (1) إلى الفرن (2). وبالتالي فإن للفرن أثر واضح. ولكن طبيعة هذا الأثر [illegible] على درجة الحرارة. ومن غير المحتمل أن يؤدي تحليل التباين إلى معنوية الآثار الرئيسية للفرن ودرجة الحرارة أحصائيا. فكلاهما يكونان مزيجا يخفي فيه التفاعل بينهما الآثار الرئيسية لهما.

(١٣-٣-٢) تحليل التجارب العامليه عندما تكون المعاينة في قطاعات عشوائية

Analysis of Factorial Experiments when Sampling is Randomized in Blocks

إذا وجد متغير خلفي، فإننا يجب أن نحتاط للتغير الذي يحدثه في المتغير التابع. وكما أوضحنا في الجزء (١٣-٢) فإن ذلك يتم بوضع (تحديد) القطاعات التي تشمل مدى المتغير الخلفي، وبالتالي حجب الاختلاف الذي يعزى للمتغير الخلفي. والمثال التالي يوضح تحليل تجربة عامليه ذات عاملين في حالة وجود متغير خلفي.

مثال (١٣-٣)

يرغب مدبر أحد المتاجر الصغيرة في مقارنة طريقتين [illegible] وفي كلتا الطريقتين [illegible] تشغيل عامل واحد من بين أربعة في عملية التجميع. ويريد المدير ايضا [illegible] الفروق - في المتوسط - بين آثار إنتاجية العمال الأربعة. فقرر القيام بتجربة عامليه تكون فيها [illegible] أحد العوامل (ولها مستويان)، والعامل القائم بالتجميع هو العامل الثاني (له أربع مستويات)، وبالتالي يكون هناك 8 معالجات (2x4). والمتغير التابع هو الإنتاجية [illegible] في اليوم، وقرر المدير إجراء التجربة خلال خمسة أيام في [illegible] وجود إختلاف بين يوم وآخر في الإنتاجية، لذلك يكون اليوم بمثابة متغير قطاعي [illegible] المعالجات الثمانية داخل كل يوم، قام المدير بإختيار أحد طريقتي التجميع [illegible] في الصباح، ويتم إستخدام الطريقة الأخرى بعد الظهر بالعمال الأربعة [illegible] عدد الوحدات المجمعة لكل مزيج أو توفيقة بين العامل والطريقة [illegible] جدول (١٣-٧). حلل نتائج هذه التجربة بإستخدام الأسلوب بين البيانات [illegible]

جدول (١٣-٧) : عدد الوحدات المجمعة لمثال (١٣-٣)

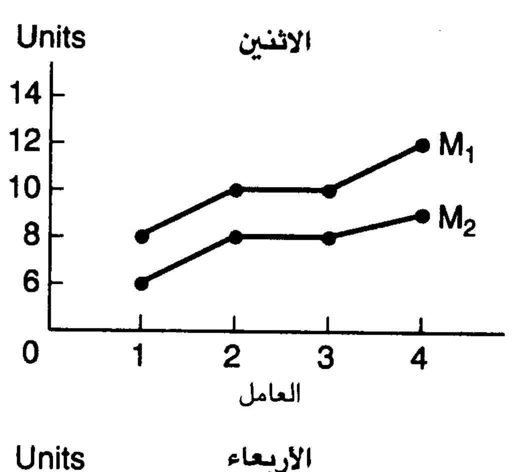
اليوم	الطريقة (1)				الطريقة (2)			
	العامل				العامل			
	1	2	3	4	1	2	3	4
الاثنين	8	10	10	12	6	8	8	9
الثلاثاء	10	11	12	14	8	9	10	11
الأربعاء	10	12	11	13	8	8	9	11
الخميس	9	11	12	12	9	10	10	10
الجمعة	8	9	9	11	7	8	7	9

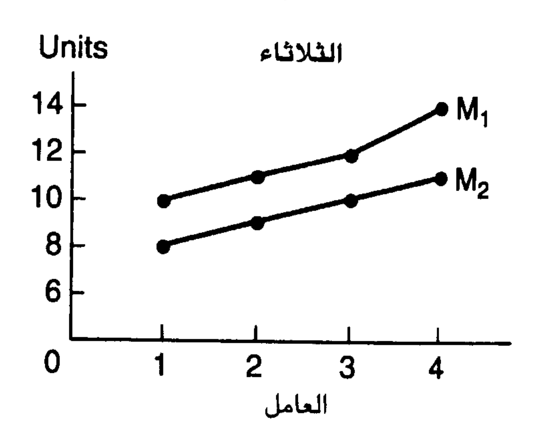
الحـل

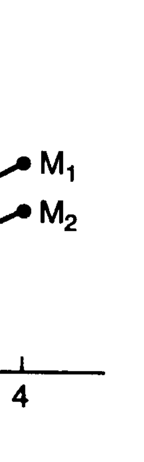
مازلنا مهتمين بتقييم الإثرين الرئيسين (طريقة التجميع، والعامل القائم بالتجميع)، وأثر التفاعل بينهما تماماً، كما في حالة تصميم المعاينة كاملة العشوائية كما في مثال البنك. ولكن هنا يجب ملاحظة أن نأخذ في الإعتبار أيضا الأختلاف الذي يعزي للمتغير القطاعي (أيام الأسبوع في هذا المثال).

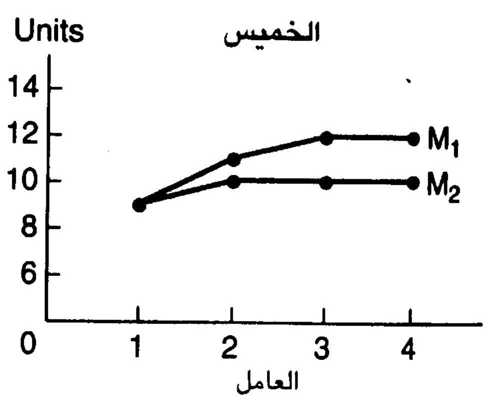
التحليل البياني

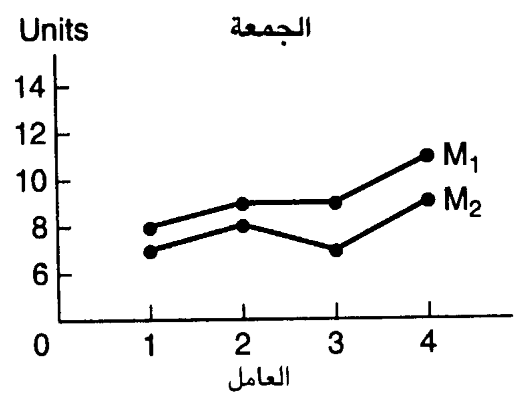
كالمعتاد سنبدأ بالطريقة البيانية، حيث نقوم بتمثيل قيم المتغير التابع (عدد الوحدات المجمعة) على المحور الرأسي، ومستويات أحد العوامل على المحور الأفقي (العمال الأربعة). سيتم إستخدام رموز مختلفة على الرسم للتفرقة بين مستويات العامل الآخر (طريقتى التجميع M_1 ، M_2). ويتم عمل أشكال منفصلة لكل قطاع (يوم). هذه الأشكال المختلفة مبينة في شكل (١٣-٤)











شكل (١٣-٤): العرض البياني لعدد الوحدات المجمعة في المثال(١٣-٣)

حيث: M_1 : الطريقة (1)، M_2 : الطريقة (2)

ويتضح من الشكل السابق ما يلي :

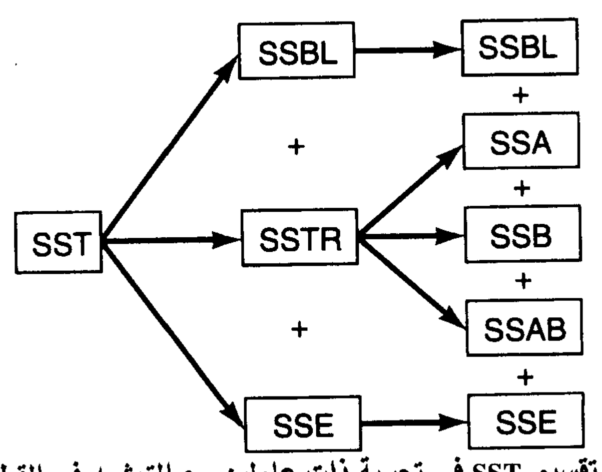
1- تختلف الطريقتان، حيث تنتج الطريقة الأولى عدد وحدات مجمعة أكبر.

2- يختلف العاملان الأول، والرابع بصورة ملحوظة، فالعامل الرابع يقوم بتجميع عدد أكبر من الوحدات مقارنة بالعمال الآخرين، بينما يجمع العامل الأول وحدات أقل.

3- حيث أن الخطوط متوازية تقريبا، فلا يوجد أثر واضح للتفاعل بين الطرق والعمال. وبالتالي يكون أثر العامل (worker) واحد تقريبا بإستخدام كلتا الطريقتين، وأثر الطريقة واحد تقريبا لكل عامل. ومن المهم ملاحظة أن هذه الإستنتاجات الأولية واحدة بالضرورة للأيام الخمسة.

أسلوب تحليل التباين: تقسيم مجموع المربعات الكلي:

كما في المثال السابق، يحدد تحليل التباين ما إذا كانت الآثار الرئيسية، وأثر التفاعل لها معنوية إحصائيا. وحيث أن التعشيه داخل القطاعات، فإن الأختلاف الكلي في عدد الوحدات المجمعة ينقسم إلي اختلاف يعزى للقطاعات، واختلاف يعزي للمعالجات، واختلاف يعزي للخطأ العشوائي. وبالتالي وفقا للشرح السابق في الجزء (٨-٣)، (١٣-٣-١) يكون تقسيم مجموع المربعات الكلي كما هو موضح بالشكل (١٣-٥) حيث يمثل العامل (A) طريقة التجميع، والعامل (B) يمثل العامل القائم بالتجميع، SSBL هو مجموع المربعات للقطاعات (الأيام).



شكل (١٣-٥): تقسيم SST في تجربة ذات عاملين مع التعشيه في القطاعات

ويتضح من الشكل السابق، وكما هو متوقع أن :

$$SST = SSBL + SSTR + SSE \quad (13\text{-}6)$$

حيث

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB$$

وحيث توجد خمس قطاعات (أيام) في هذا المثال، لذلك توجد أربع درجات حرية خاصة بـ SSBL. ودرجات الحرية الأخرى تتحدد بنفس الطريقة المستخدمة في الجزء (١٣-٣-١)، وكذلك متوسط المربعات، وقيم (F) للأثرين الرئيسين، وأثر التفاعل (انظر المعادلات {13.3 - 13.5}).

ويوضح الجدول التالي مخرجات برنامج ميني تاب في تحليل التباين للبيانات الواردة في جدول (١٣-٧)

جدول (١٣-٨)

تحليل التباين في مثال (١٣-٣)

المصدر	درجات الحرية	مجوع المربعات	متوسط المبعات	F	P
اليوم	4	29.850	7.463	19.81	0.000
الطريقة	1	38.025	38.025	100.92	0.000
العامل	3	4.275	14.092	37.40	0.000
الطريقة * العامل	3	1.275	0.425	1.13	0.355
الخطأ	28	10.550	0.377		
الكلي	39	121.975			

ونلاحظ أن قيم (P) للأثرين الرئيسين (الطريقة والعامل: Method and Worker) تساوى الصفر (تقريبا)، بينما قيمة (P) (P-value) الخاصة بأثر التفاعل تساوى (355.)، ويؤكد ذلك استنتاجنا السابق القائم على التحليل البيانى بأن الآثار الرئيسية التى تعزى لطريقة التجميع، والعامل القائم بالتجميع معنوية إحصائيا، بينما أثر التفاعل لا (غير معنوي إحصائياً).

*إعتبارات تحسين العملية في مثال (١٣-٣)

توضح نتائج هذه الدراسة أن الطريقة الأولى تنتج عدد أكبر من الوحدات المجمعة مقارنة بالطريقة الثانية وفقا لشروط التجربة، ويكون هذا الأثر واحد تقريبا لكل عامل، ولا يعني ذلك بالضرورة أن الطريقة الأولى هي التي يجب إختيارها للتطبيق. هناك بعض الاعتبارات الأخرى يجب وجودها قبل التطبيق أو الاستخدام، وتشمل جودة التجميع، وتكلفة المواد الخام المستخدمة في الطريقتين. وبالإضافة إلى ذلك نجد أن العمال الأربعة لا يقومون بتجميع نفس العدد من الوحدات يومياً في المتوسط؛ حيث يوضح شكل (١٣-٤) أن العامل (4) يجمع وحدات أكثر من الآخرين-في المتوسط - وأن العامل (1) يجمع- في المتوسط- وحدات أقل من الآخرين، وهذه النتيجة واحدة في كلتا الطريقتين. وهذا الإختلاف بين العمال يمكن تفسيره بعدم كفاية التدريب، فربما يحتاج العمال (1),(2),(3) تدريب إضافي على التجميع. إحتمال أخر أن يكون للعامل (4) رأي خاص قد يشارك فيه الآخرون. والاحتمال السابق يوضح أن الثقة والتعاون هما مكونان رئيسيان لبيئة ناجحة لتحسين الإنتاجية. فإذا كان للعامل (4) منظور خاص فلا يجب أن يشعر بمنافسة العمال الآخرين 3,2,1. فتطبيق القرارات يكون عادة مرتبطا بإمكانية تطبيق نتائج التجربة على الأوضاع القائمة عند التطبيق.

(١٣-٤) التجارب متعددة العوامل، ولكل عامل مستويان (التجارب العامليه 2^F)

Experiments with Multiple Factors At Two Levels Each: The 2^F Factorial Experiments

إن إجراء تجربة عامليه أفضل من القيام بتجربة مختلفة لكل عامل محل دراسة على حدة، ولكن حتى التجارب العامليه قد تصبح مرهقة عندما تتعدد العوامل مع زيادة المستويات الخاصة بكل عامل (ثلاثة مستويات فأكثر مثلا). وأفترض على سبيل المثال أن هناك (3) عوامل C,B,A، وللعامل A ثلاثة مستويات ولكل من C,B أربع مستويات، فيكون عدد المعالجات يساوي (48) معالجة (3x4x4)، وحتى لوكان حجم العينة المستخدمة لكل معالجة مفردتين فقط (n=2) فإن التجربة ستتطلب(96) مشاهدة (48x2) للمتغير التابع وفقا لـ(48) مجموعة من الحالات. والخطورة هنا أننا قد لا نستطيع أن نحسن التحكم في التجربة عند التنفيذ. فإذا كان عدد المشاهدات للمتغير التابع كبيرا جداً فإن وجود متغيرات غامضة مزعجة أثناء تنفيذ التجربة قد يصبح أمرا لا يمكن تجنبه.

لهذا السبب وأسباب أخرى، فإن التجارب العامليه، ولكل عامل مستويان فقط ثبت فائدتها بصورة واضحة في التطبيق. فإذا كان العامل كميا، يكون المستويان المختاران له غالبا مجموعتين من المدى الذي يأخذه هذا العامل. وهذه التجارب يشار إليها غالبا بـ" التجارب متعددة العوامل أو العامليه 2^F" حيث (2) هي عدد مستويات كل عامل و(F) تشير إلى عدد العوامل، وبالتالي(2^F) تمثل عدد المعالجات في التجربة. فمثلا تجربة متعددة العوامل أو عامليه 2^3 يكون بها (3) عوامل لكل منها مستويان بإجمالي (8) معالجات({2x2x2}) أو {2^3}). والتجربة المتعددة العوامل أو العامليه 2^4 تحتوي على أربعة عوامل لكل عامل منها مستويان بإجمالي (16) معالجة (2^4) وهكذا...

وتنبع أهمية وفائدة التجارب العامليه أو متعددة العوامل 2^F من العدد القليل نسبيا للمشاهدات الخاصة بالمتغير التابع، والتي نحتاجها للقياس الآني للآثار الرئيسية للعوامل المتعددة، وتفاعلاتها. فمثلاً إذا استخدمنا عينة حجمها (n = 2) لكل معالجة من المعالجات الثمانية في تجربة متعددة العوامل (2^3) فإننا نحتاج (16) مشاهدة فقط للمتغير التابع لقياس الآثار الرئيسية للعوامل الثلاثة، وآثار التفاعلات الثلاثة من الرتبة الأولى، وأثر التفاعل الوحيد من الرتبة الثانية. ولجوانب عديدة فإن هذا أفضل كثيرا من الحاجة إلى (96) مشاهدة للمتغير التابع لعمل نفس الشئ في المثال السابق الذي فيه (3) عوامل لها (48) معالجة. وبالترتيب على ما سبق تكون التجارب متعددة العوامل2^F مفيدة وخاصة عندما يسفر المسح المبدئي عن وجود العديد من العوامل (خمسة فأكثر مثلا).

ويوضح المثال التالي تحليل تجربةعامليه أو متعددة العوامل2^3 في حالة المعاينة كاملة العشوائية.

مثال (١٣-٤)

يتم تكليف العاملين بإحدى الشركات بأداء بعض المهام التي تتطلب مجهود بدني بصفة روتينية. وتريد الإدارة أن تحدد مدى تأثير وزن، ونوع، وعمر، كل عامل على تأدية هذه المهام بصورة مرضية. فتم إجراء تجربة لتحديد آثار هذه العوامل الثلاثة، وتفاعلاتها ان وجدت، وكانت أعمار العاملين تتراوح بين 60,20 سنة، اخترنا فئتين عمريتين من 25 إلى 35 ومن 50 إلى 60، وبالمثل تم إختيار مستويين للوزن (بالرطل) خفيف Light (L: 120-135)، وثقيل Heavy (H:165-180) وحيث أن النوع أو الجنس هو أحد العوامل المؤثرة، فإن التجربة شملت الرجال (M) والنساء(F). واختيرت مهمة معينة ليكون وقت أدائها هو المتغير التابع. لكل معالجة من المعالجات الثمانية (2 مستوى للعمر

في 2 مستوى للنوع في 2 مستوى للوزن) سيتم اختيار شخصين عشوائيا ويطلب إليهما أداء المهمة، ويتم تخصيص الأشخاص على المعالجات بصورة كاملة العشوائية. وتم تحديد يوم العمل الأسبوعي كمتغير خلفي، وقمنا بتثبيته عن طريق تسجيل جميع المشاهدات في نفس اليوم. ويمثل الجدول (١٣-٩) الأوقات المسجلة بالدقائق لهذه التجربة. لاحظ أنه تم إعطاء متوسط المشاهدات المتكررة بكل معالجة. حدد ما إذا كانت الآثار الرئيسية وآثار التفاعلات لها دلالة إحصائية.

جدول (١٣-٩)

بيانات العينة لمثال (١٣-٤)

	العمر 25 − 35		العمر 50 − 60	
	ذكر M	أنثى F	ذكر M	أنثى F
خفيف (L)	23 26	28 26	25 26	27 26
المتوسط	24.5	27.0	25.5	26.5
ثقيل (H)	15 19	24 23	19 20	25 24
المتوسط	17.0	23.5	19.5	24.5

الحل

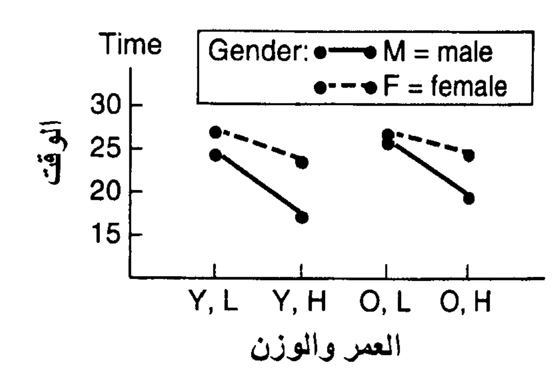
يجب أن نقيس العناصر التالية:

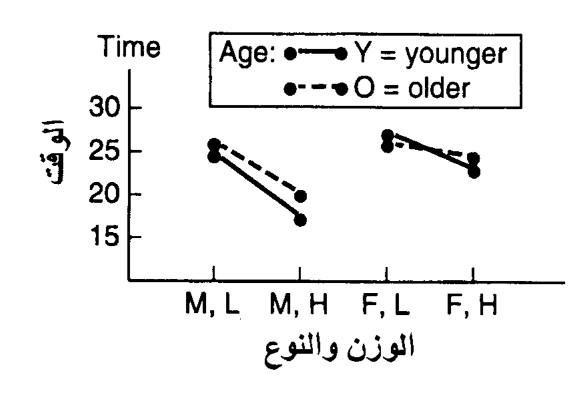
1- الآثار الرئيسية الثلاثة التي تعزي للعمر، والنوع، والوزن.

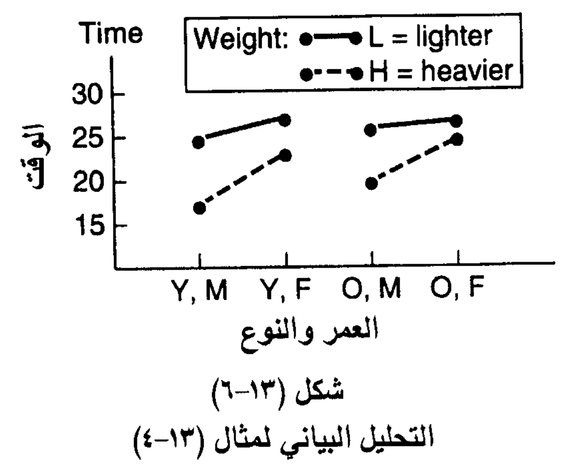
2- التفاعلات الثلاثة من الرتبة الأولى: العمر والنوع، العمر والوزن، النوع والوزن.

3- التفاعل من الرتبة الثانية: العمر والنوع والوزن.

ويمكن الوصول إلى تقدير مبدئي للآثار الرئيسية على الأقل بإستخدام التحليل البياني لمتوسطات المعالجات. وعندما يوجد أكثر من عاملين فإن تمثيل جميع القيم الفردية يسبب فوضى كبيرة لا تسمح بوضوح التفسير. وبإستخدام المتوسطات نحصل على الأشكال الثلاثة التالية: الشكل (١٣-٦) حيث يمثل المتغير التابع على المحور الرأسي.







شكل (١٣-٦)

التحليل البياني لمثال (١٣-٤)

وبالنظر إلى الأشكال الثلاثة نجد أن :

الشكل (أ): نعرف على المحور الأفقي الأربع توافيق بين مستويات النوع والوزن (ذكر/خفيف، ذكر/ثقيل. . إلخ) بينما يمثل المحور الرأسي زمن أداء المهمة. والخط المظلل المتصل يصل القيم الخاصة بالذكور عند الأعمار الصغيرة، ويصل الخط المظلل الآخر بين القيم الخاصة بالإناث عند الأعمار الصغيرة. وبالمثل يصل خط منقط القيم الخاصة بالذكور عند الأعمار الكبيرة، وخط منقط آخر يصل بين القيم الخاصة بالإناث عند الأعمار الكبيرة. ونلاحظ أن كل خط مظلل متصل يختلف بقدر ضئيل جدا عن الخط المنقط المناظر له، ويوضح ذلك أن أثر العمر على زمن أداء المهمة أثر غير رئيسي أو غير معنوي. لاحظ أيضا أن جميع الخطوط الأربعة توضح أن الوقت يكون أقل بالنسبة للعمال الأثقل وزنا مقارنة بالعمال الأخف وزنا، وبالتالي يبدو وجود أثر معنوي يعزي للوزن.

الشكل (ب): الواضح أن كلا الخطين المتصلين يقعا تحت مثيليهما المتقطع، حيث يبدو أن وقت أداء المهمة بالنسبة للذكور اقل عن الإناث (في المتوسط). ويؤدي ذلك للإعتقاد بوجود أثر رئيسي معنوي للنوع. كما تشير كل الخطوط الأربعة إلى أن أوقات أداء الخدمة تكون أقل للعمال الأثقل وزنا عن العمال الأخف وزنا (كما يوضح ذلك الشكل(أ) أيضا).

الشكل (ج): حيث أن كلا الخطين المتصلين يقعا أعلى الخطين المتقطعين المناظرين لهما، فهذا يعنى أن زمن أداء المهمة يكون أكبر للعمال الأخف وزنا عن العمال الأثقل وزنا- في المتوسط- كما في شكل (أ)، وتشير الخطوط الأربعة كذلك إلى أن الأوقات تكون أعلى للإناث عن الذكور (كما يوضح الشكل (ب)).

وتمهيدا لإجراء تحليل التباين، نتعرف كيف ينقسم مجموع المربعات الكلي في حالة وجود ثلاثة عوامل. أولا نتذكر أنه في حالة التصميم كامل العشوائية يكون مجموع المربعات الكلي هو حاصل جمع مجموع مربعات المعالجات، ومجموع مربعات الخطأ. أي أن SST=SSTR+SSE وعند وجود ثلاثة عوامل نجد أن SSTR يتكون من مجموع مربعات كل من: الآثار الرئيسية الثلاثة، والتفاعلات الثلاثة من الرتبة الأولى، والتفاعل من الرتبة الثانية، أي أن:

$$SSTR=SSA+SSB+SSC+SSAB+SSAC+SSBC+SSABC...... \quad (13.7)$$

وفي هذا المثال نجد أن العوامل C,B,A هي العمر، النوع، الوزن على الترتيب. وتظهر مخرجات ميني تاب تحليل التباين في جدول (١٣-١٠) كالآتي:

جدول (١٣-١٠)
جدول تحليل التباين لمثال(١٣-٤)

المصدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F	P
العمر	1	4.000	4.000	1.88	0.207
النوع	1	56.250	56.250	26.47	0.000
الوزن	1	90.250	90.250	42.47	0.000
العمر*النوع	1	2.250	2.250	1.06	0.334
العمر*الوزن	1	2.250	2.250	1.06	0.334
النوع*الوزن	1	16.000	16.000	7.53	0.025
العمر*النوع*الوزن	1	0.000	0.000	0.00	1.000
الخطأ	8	17.000	2.125		
الكلـــي	15	188.000			

ونلاحظ من جدول(١٣-١٠) عدم وجود أثر رئيسي معنوي يعزي للعمر (قيمة P=.207) بينما توجد آثار رئيسية معنوية لكل من النوع والوزن (قيم P=.000). ويؤكد ذلك استنتاجنا المبدئي القائم على التحليل البياني. ومن بين آثار التفاعل، نجد أن آثر التفاعل من الرتبة الأولى بين النوع والوزن هو أثر التفاعل الوحيد الذي له دلالة إحصائية (قيمة P=.025) . في الحقيقة إذا رجعنا لشكل (١٣-٦) الأجزاء (أ)، (ب) نجد أنها توضح أن أثر الوزن يبدو أكثر وضوحاً للذكور عن الإناث.

* **إعتبارات تحسين العملية لمثال (١٣-٤)**

بينت نتائج هذه الدراسة أن النساء بستغرقن أوقات أطول لأداء المهمة في المتوسط عن الذكور، واللذين من نفس الوزن. كما أن الوزن له أثر، فالأشخاص ذوي الأوزان الأخف من كلا النوعين يستغرقون وقتا أطول- في المتوسط- لأداء المهمة عن الأشخاص الأثقل وزنا من نفس النوع. وتوضح هذه النتائج أن المتغير الأساسي المؤثر هو القوة البدنية (حيث يمتلك الرجل قوة عضلية أكبر من الإناث في نفس الوزن). والإجراءات المكن أن تقوم بها الإدارة تشمل إعادة تصميم المهمة بحيث لا تكون للقوة البدنية ذات تأثير كبير، أو عمل برامج تدريب لزيادة القوة البدنية للعمال، وعمل واستمرار هذه البرامج ربما يقلل من الفروق الملاحظة بصورة كبيرة.

تماريـــن

(١٣-١٥) ما نوع التجربة الإحصائية المكن إستخدامها لقياس آثار عاملين أو أكثر؟ ووضح لماذا تكون هذه التجارب فعالة نسبيا.

(١٣-١٦) ما هي الخصائص المميزة للتجارب العامليه أو متعددة العوامل؟

(١٣-١٧) في تجربة متعددة العوامل بها ثلاث عوامل A، B، C ولها 5,4,3 مستويات على الترتيب:
(أ) حدد عدد المعالجات.

(ب) أذكر الآثار المختلفة الممكنة على المتغير التابع نتيجة العواملA، B، C ؟

(١٣-١٨) في تجربة ذات عاملين B,A لهما 4,3 مستويات على الترتيب:

(أ) ما عدد المعالجات؟

(ب)أذكر الآثار المختلفة المكنة على المتغير التابع نتيجة العاملين,B,A

(١٣-١٩) أذكر المعالجات الخاصة بتمارين (١٣-١٧)، (١٣-١٨) ؟

(١٣-٢٠) ماذا يعني مصطلح "الأثر الفردي للعامل" في تجربة متعددة العوامل ؟ صف طبيعة هذا النوع من الآثار.

(١٣-٢١) أشرح ما المقصود بأثر التفاعل بين عاملين ؟

(١٣-٢٢) تجربة متعددة العوامل بها ثلاثة عوامل C,B,A لها 2,3,3 مستويات على الترتيب، ومع إستخدام تصميم كامل العشوائية وحجم العينة (n=3) مشاهدات لكل معالجة. أذكر مصادر الاختلاف، ودرجات الحرية المناظرة.

(١٣-٢٣) تجربة بها ثلاثة عواملC,B,A لها 2,3,3 مستويات على الترتيب. وكان إختلاف اليوم عامل يؤخذ في الاعتبار، وتمت ملاحظة المتغير التابع على مدى خمسة أيام من أحد أيام أسابيع العمل، مع اعتبار الأيام كقطاعات. أذكر مصادر الاختلاف، درجات الحرية المقابلة لها.

(١٣-٢٤) تجربة متعددة العوامل بها ثلاثة عوامل C,B,A

(أ) أذكر الآثار الفردية   (ب) أذكر جميع آثار التفاعل

(ج) قسم آثار التفاعل الواردة في (ب) من حيث الرتبة.

(١٣-٢٥) تجربة متعددة العوامل بها أربع عوامل D,C,B,A قم بالإجابة على كل أجزاء تمرين(١٣-٢٤)؟

(١٣-٢٦) في تجربة ذات عاملين، وبإستخدام تصميم كامل العشوائية. عرف جميع مكونات مجموع المربعات الكلي ووضح ما يمثله كل مكون؟

(١٣-٢٧) أجب على تمرين(١٣-٢٦) إذا تم إستخدام تصميم القطاعات العشوائية؟

(١٣-٢٨) البيانات التالية لعينة مأخوذة من تجربة عامليه ذات عاملين. ارسم البيانات، حدد وفقا لما ترى هل من المناسب إستخدام تحليل التباين لتحليل هذه البيانات أم لا مع التوضيح؟

		العامل A	
		1	2
العامل B	1	25	36
		23	40
	2	99	38
		32	43
	3	36	45
		39	41

(١٣-٢٩) فيما يلي البيانات المأخوذة عن عينة في تجربة ذات عاملين. ارسم البيانات، وحدد وفقا لما ترى هل من الملائم إستخدام تحليل التباين لهذه البيانات، مع التوضيح؟

		العامل A		
		1	2	3
العامل B	1	16	17	95
		12	14	22
		13	15	18
	2	38	38	43
		11	35	39
		42	39	40

(١٣-٣٠) بالرجوع إلى مثال (١٣-٢)، حقق الإستنتاج المبدئي عن الأثرين الرئيسين، أثر التفاعل وفقا للتحليل البياني بإستخدام أسلوب استدلال ملائم.

(١٣-٣١) البيانات التالية لعينة مأخوذة عن تجربة ذات عاملين:

		العامل A		
		1	2	3
العامل B	1	4	10	8
		6	9	7
	2	8	14	12
		9	16	10

(أ) ارسم البيانات، وصف أي آثار رئيسية تعتقد أن لهما دلالة إحصائية.

(ب) اعتمادا على التحليل البياني، هل أثر التفاعل يبدو معنويا من وجهة نظرك؟ اشرح.

(ج) حلل نتائج التجربة بإستخدام أسلوب تحليل التباين، وقارن ما توصلت إليه بنتائج (أ)، (ب).

(١٣-٣٢) أجب عن جميع أجزاء تمرين(١٣-٣١) وفقا لبيانات العينة المأخوذة من تجربة ذات عاملين التي تظهر كالتالي:

		العامل A	
		1	2
العامل B	1	6	12
		6	12
	2	9	9
		7	11
	3	13	7
		11	9

(١٣-٣٣) فيما يلي جزء من جدول تحليل التباين الخاص بتجربة ذات عاملين A، B لهما 3,4 مستويات على الترتيب وعينة حجمها (n=3) مشاهدات لكل معالجة. فإذا علمت أن (SSTR=170)

أكمل جدول تحليل التباين ANOVA، حدد معنوية الآثار الرئيسية وأثر التفاعل.

المصدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F	P
العامل A			40		
العامل B		20			
التفاعل					
الخطأ					
المجموع		230			

(١٣-٣٤) فيما يلي جزء من جدول تحليل التباين لتجربة ذات عاملين قائمة على تصميم القطاعات العشوائية بأربعة قطاعات، ولكل من العاملين B,A ثلاثة مستويات. فإذا علمت أن (SST=300, SSTR=108, SSA=70, SSBL = 120). أكمل جدول تحليل التباين ANOVA ووضح ما إذا كانت الآثار الرئيسية، وأثر التفاعل لها دلالة إحصائية أم لا.

المصدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F	P
القطاعات					
العامل A					
العامل B			9		
التفاعل					
الخطأ			3		
المجموع					

(١٣-٣٥) يمتلك أحد المتاجر أربعة فروع في أربع مدن تختلف من حيث أحوالها الإقتصادية والإجتماعية، ويرغب صاحب المتجر (الفرع الرئيسي) في تحديد مدى تأثير وسيلة الدعاية (التليفزيون، الراديو، الصحف) وكذلك الجهة القائمة بالدعاية على المبيعات المحققة لكل دولار ينفقه على الدعاية في الفروع الأربعة. ولأغراض التجربة أستأجر المتجر (3) وكالات إعلان لتقديم الإعلانات في وسائل الدعاية الثلاثة، ويتم تقديم كل إعلان في المناطق الأربعة. وبسبب إختلاف الظروف الإجتماعية والإقتصادية في المناطق الأربعة فإن المبيعات أيضا ستختلف، وبالتالي يجب إستخدامها كقطاعات. وتم عمل التجربة خلال تسعة أشهر، حيث تم إختيار إحدى وكالات الإعلان الثلاثة عشوائيا لتقوم بالإعلان لمدة (3) شهور، وبمعدل شهر لكل وسيلة دعاية، وكان ترتيب إستخدام وسائل الدعاية بالسحب العشوائي أيضا. وكانت البيانات الخاصة بالعينة، والتي تمثل المبيعات لكل دولار منفق على الدعاية خلال فترة الملاحظة كما يلي:

الفرع	التليفزيون			الراديو			الصحف		
	الوكالة			الوكالة			الوكالة		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	16.1	14.8	15.3	11.2	12.4	11.6	7.2	6.8	7.9
2	18.3	19.1	18.7	10.5	9.8	10.7	5.4	4.9	5.1
3	17.4	17.1	18.2	8.9	9.2	8.6	5.7	4.8	5.3
4	22.3	21.8	22.7	13.6	13.9	12.8	4.2	4.7	4.5

حلل بيانات العينة بإستخدام الأساليب البيانية، والاستدلالية، واقترح الإجراءات التي يمكن أن يتخذها مدير المتجر وفقا لاستنتاجاتك.

(١٣-٣٦) في تجربة متعددة العوامل، لكل عامل مستويان:

(أ) ما الذي تستفيده من تقليل عدد المستويات إلى مستويان بدلا من ثلاثة مثلا؟

(ب) ما الذي تستفيده- إن وجد- إذا استخدمنا ثلاثة مسنويات لكل عامل؟

(١٣-٣٧) في تجربة عامليه أو متعددة العوامل بها أربعة عوامل D,C,B,A لكل منها مستويان. مستخدما تصميم كامل العشوائية، ومشاهدتين للمتغير التابع لكل معالجة:

(أ) أذكر الآثار الرئيسية (ب) أذكر كل آثار التفاعل

(ج) فرق بين آثار التفاعل في الجزء (ب) من حيث الرتبة

(د) أذكر مصادر الاختلاف، ودرجات الحرية المقابلة لهذه التجربة.

(١٣-٣٨) يريد أحد الباحثين قياس آثار العوامل المختلفة على جودة الأعمال التي تقوم بها وكالات بحوث التسويق. وكانت العوامل هي(1) هل يتم العمل في المنزل أو خارج المنزل، (2) هل يراقب العمل مشرفين من داخل الوكالة أو من خارجها، (3) النفاقات المخصصة لهذه الدراسة، وهل مستواها منخفض أو مرتفع. وبالتالي يوجد ثلاثة عوامل لكل منها مستويين. ومن مجتمع وكالات البحوث التي تعاملت معها الشركة التي يعمل بها الباحث، قام عشوائيا بإختيار وكالتين بكل منها ثماني معالجات، وقام بتثمين جودة العمل بإستخدام نظام تسعير محدد. وفيما يلي معدلات أسعار العينة، حيث الأكبر في الرصيد يعني الأفضل في جودة العمل.

حلل بيانات العينة بإستخدام الأسلوبين البياني والاستدلالي، ثم إستخدام ما توصلت إليه لإسداء النصيحة للباحث؟

التكلفة	المنزل		الرقابة	
	داخل المنزل	خارج المنزل	داخلى	خارجى
مرتفعة	64	78	59	73
	66	75	55	75
منخفضة	63	71	57	67
	60	74	51	72

(١٣-٥) ملخص : Summary

في هذا الفصل أكملنا ما عرضناه من طرق في الفصل الثامن ، بتقديم التجارب المصممة إحصائيا للمواقف التي تتضمن عاملين أو أكثر .

وبعد مناقشة الجوانب الرئيسية للتجارب المصممة ، قدمنا نوع من التصميمات يعرف بالتجارب العامليه أو متعددة العوامل **Factorial Experiments** وفي هذه التجارب تتم ملاحظة المتغير التابع وفقا لجميع حالات التوافيق الممكنة بين مستويات عاملين أو أكثر . وتعتبر التجارب متعددة العوامل وسيلة فعالة لدراسة آثار عاملين أو أكثر آنيا (في وقت واحد) بإستخدام البيانات المتاحة من تجربة واحدة . ويعتبر ذلك أفضل بكثير من إجراء تجربة مستقلة لدراسة أثر كل عامل على حدة . ويعتبر النوع الخاص من التجارب العامليه أو متعددة العوامل الذي يكون فيه كل عامل له مستويان ذو أهمية خاصة كوسيلة لحجب أثر عدد كبير من العوامل غير المرغوبة .

وكالمعتاد فإن الإستراتيجية الأساسية لتحليل المعلومات الخاصة بالتجربة المصممة تعتمد على خليط من الطرق البيانية وأسلوب تحليل التباين .

*المراجع : References

1) R. Moen, T.W.Nolan and L. P. Provost. *Improving Quality Through Planned Experimentation.* New York; Mc Graw-Hill, Inc, 1991.

2) C. R. Hicks, *Fundamental Concepts in the Design of Experiments* , 3 rd .Fort Worth :Saunders College Publishing, 1982.

ملحق ١٣ : Appendix -13

تعليمات الحاسب باستخدام البرنامج الإحصائي Minitab والبرنامج الإحصائي SAS

سوف نقوم باستخدام مثال البنك (أنظر جدول (١٣-٤)، (١٣-٥) وأيضاً الأمثلة (١٣-٣، ١٣-٤) لتوضيح تعليمات البرنامج الإحصائي Minitab وكذلك البرنامج الإحصائي SAS. واللذان تم استخدامهما للحصول على مخرجات هذه الأمثلة.

مثال البنك:

(A13.1)- البرنامج الإحصائي Minitab

التعليمات الآتية تعطينا الشكل (١٣-١) وكذلك تحليل التباين المدون في الجدول (١٣-٥) لهذا المثال. لاحظ أن الأمر DATA والذي يأتي بعد الأمر SET يكون الهدف منه هو تعريف C1 «الفترات الزمنية» وسوف توضع الأرقام بين قوسين في البرنامج لتحديد أنه لدينا فترتين زمنيتين. كذلك يجب ملاحظة أن الرقم 15 الذي يأتي بعد القوس المغلق يعطينا إشارة عن حاصل ضرب عدد موظفي البنك وهو 3 وفي عدد العملاء لكل معالجة «عددها 5» وبالمثل فإن أمر DATA المتبوع بالأمر SET بالنسبة لـ C2 «موظفي البنك» يعطينا عدد الفترات الزمنية أولاً متبوعة بتحديد موظفى البنك الثلاثة وتم وضع ذلك بين أقواس وبالتالى فإن عدد العملاء وهو المذكور بعد القوس المغلق. وأخيراً فإن الأمر SET لـ C3 يعطينا ستة سطور للبيانات DATA والمستخدمة للخمسة عملاء. سطر واحد لكل معالجة من المعالجات الستة. لاحظ أن الأمر الخاص بتحليل التباين ANOVA ثم تحديد المتغير التابع إلى اليسار من علامة «=» «C3» متبوعة بتحديد التأثيرين الأساسيين (C1، C2) وكذلك التفاعل بين هذين التأثيرين (C1*C2)

```
MTB > name c1='time' c2='tellers' c3='thrutime'
MTB > set c1
DATA> (1 2)15
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 2(1 2 3)5
DATA> end
MTB > set c3
DATA> 96 100 90 106 98
DATA> 80 92 94 90 88
DATA> 84 80 85 87 82
DATA> 120 115 125 132 124
DATA> 114 125 118 119 116
DATA> 110 120 106 116 108
DATA> end
MTB > lplot c3 c2 c1
MTB > anova c3=c1 c2 c1*c2.
```

- البرنامج الإحصائي SAS

التعليمات التالية تعطينا تحليل التباين باستخدام البرنامج الإحصائي SAS المعطي في نهاية القائمة التالية:

لاحظ انه في الأمر CLASS يتم تعريف العاملين كما تم تسميتهم في جملة "TELLERS, TIME" INPUT. وفي جملة النموذج "MODEL" فإن المتغير التابع تم مساواته بهذين العاملين وكذلك تفاعلهما بنفس الطريقة التي تم ذكرها في البرنامج الإحصائي Minitab.

```
INPUT TIME TELLERS THRUTIME;
CARDS;
1 1 96
1 1 100
1 1 90
1 1 106
1 1 98
1 2 80
1 2 92
  :
PROC ANOVA;
CLASS TIME TELLERS;
MODEL THRUTIME=TIME TELLERS TIME*TELLERS;
```

وللحصول على شكل بياني مماثل لشكل (١٣-١) «والذي لم يتم رسمه هنا» فإننا نستخدم التعليمات التالية:

```
PROC PLOT;
PLOT THRUTIME*TELLERS=TIME;
```

Analysis of Variance Procedure

Dependent Variable: THRUTIME

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	6616.00000000	1323.20000000	49.16	0.0001
Error	24	646.00000000	26.91666667		
Corrected Total	29	7262.00000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	THRUTIME Mean
0.911044	4.988584	5.18812747	104.00000000

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
TIME	1	5768.53333333	5768.53333333	214.31	0.0001
TELLERS	2	821.60000000	410.80000000	15.26	0.0001
TIME*TELLERS	2	25.86666667	12.93333333	0.48	0.6243

مثال (١٣-٣) (A13.2)

البرنامج الإحصائي Minitab

هذه التعليمات تعطينا جدول تحليل التباين لهذا المثال «أنظر جدول ١٣-٨».

```
MTB  > name c1='method' c2='worker' c3='day' c4='number'
MTB  > set c1
DATA > (1 2)20
DATA > end
MTB  > set c2
DATA > 2(1 2 3 4)5
DATA > end
MTB  > set c3
DATA > 8(1 2 3 4 5)
DATA > end
MTB  > set c4
DATA > 8 10 10 9 8
DATA > 10 11 12 11 9
```

```
DATA > 10 12 11 12 9
DATA > 12 14 13 12 11
DATA > 6 8 8 9 7
DATA > 8 9 8 10 8
DATA > 8 10 9 10 7
DATA > 9 11 11 10 9
DATA > end
MTB  > anova c4=c3 c1 c2 c1*c2.
```

البرنامج الإحصائي SAS

التعليمات التالية تعطينا جدول تحليل التباين باستخدام SAS. لاحظ أنه في جملة CLASS تم استخدام المتغير DAY كقطاع والعاملين الآخرين METHOD، WORKER كأسماء تم ذكرها في جملة INPUT.

```
DATA;
INPUT DAY METHOD WORKER NUMBER;
CARDS;
1 1 1 8
1 1 2 10
1 1 3 10
1 1 4 12
1 2 1 6
1 2 2 8
   :
PROC ANOVA;
CLASS DAY METHOD WORKER;
MODEL  NUMBER=DAY  METHOD  WORKER  METHOD*WORKER;
```

Analysis of Variance Procedure

Dependent Variable: NUMBER

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	11	111.42500000	10.12954545	26.88	0.0001
Error	28	10.55000000	0.37678571		
Corrected Total	39	121.97500000			

R-Square	C.V.	Root MSE	NUMBER Mean
0.913507	6.311864	0.61382873	9.72500000

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
DAY	4	29.85000000	7.46250000	19.81	0.0001
METHOD	1	38.02500000	38.02500000	100.92	0.0001
WORKER	3	42.27500000	14.09166667	37.40	0.0001
METHOD*WORKER	3	1.27500000	0.42500000	1.13	0.3546

(A13.3) مثال (١٣-٤) :

البرنامج الإحصائي Minitab

التعليمات التالية تعطينا جدول تحليل التباين لهذا المثال (أنظر جدول ١٣-١٠) لاحظ أنه في الأمر ANOVA فإن التأثيرات الثلاثة الأساسية، للعوامل الثلاثة، التأثيرات الثلاثة من الدرجة الأولى، والتأثيرات من الدرجة الثانية تم تعريفها

```
MTB  > name c1='age' c2='gender' c3='weight' c4='time'
MTB  > set c1
DATA > (1 2)8
DATA > end
MTB  > set c2
```

```
DATA > 2(1 2)4
DATA > end
MTB  > set c3
DATA > 4(1 2)2
DATA > end
MTB  > set c4
DATA > 23 26 15 19
DATA > 28 26 24 23
DATA > 25 26 19 20
DATA > 27 26 25 24
DATA > end
MTB  > anova c4 = c1 c2 c3 c1*c2 c1*c3 c2*c3 c1*c2*c3.
```

البرنامج الإحصائي SAS

التعليمات التالية تعطينا جدول تحليل التباين باستخدام SAS والمعطى في نهاية القائمة ونلاحظ أنه في جملة CLASS تم تعريف العوامل الثلاثة كما سبق تسميتها في جملة INPUT "WEIGHT, GENDER, AGE" وفي جملة النموذج "MODEL" فإن المتغير التابع تم مساواته بالعوامل الثلاثة وبالتأثيرات الثلاث من الدرجة الأولى والتأثيرات من الدرجة الثانية بنفس الطريقة السابقة في البرنامج الإحصائي Minitb.

```
DATA;
INPUT AGE GENDER WEIGHT TIME;
CARDS;
1 1 1 23
1 1 1 26
1 1 2 15
1 1 2 19
1 2 1 28
1 2 1 26
1 2 2 24
1 2 2 23
    :
PROC ANOVA;
CLASS AGE GENDER WEIGHT;
MODEL TIME=AGE GENDER WEIGHT AGE*GENDER AGE*WEIGHT
GENDER*WEIGHT AGE*GENDER*WEIGHT;
```

Analysis of Variance Procedure

Dependent Variable: TIME

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	7	171.00000000	24.42857143	11.50	0.0013
Error	8	17.00000000	2.12500000		
Corrected Total	15	188.00000000			

R-Square	C.V.	Root MSE	TIME Mean
0.909574	6.203140	1.45773797	23.50000000

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
AGE	1	4.00000000	4.00000000	1.88	0.2073
GENDER	1	56.25000000	56.25000000	26.47	0.0009
WEIGHT	1	90.25000000	90.25000000	42.47	0.0002
AGE*GENDER	1	2.25000000	2.25000000	1.06	0.3336
AGE*WEIGHT	1	2.25000000	2.25000000	1.06	0.3336
GENDER*WEIGHT	1	16.00000000	16.00000000	7.53	0.0253
AGE*GENDER*WEIGHT	1	0.00000000	0.00000000	0.00	1.0000

الفصل الرابع عشر

إختبـــارات جـــودة المطـابـقـة وجـــداول الأقتران

GOODNESS-OF-FIT PROCEDURES AND CONTINGENCY TABLES

محتويات الفصل:



الفصل الرابع عشر

إختبارات جودة المطابقة وجداول الأقتران

GOODNESS-OF-FIT PROCEDURES AND CONTINGENCY TABLES

(١٤-١) نظرة عامة على محتويات الفصل: Bridging To New Topics

في هذا الفصل، نقدم العديد من الاساليب الإحصائية الحديثة، ملامحها العامة أنها تتعامل مع بيانات العينة التي تم وضعها في فئات أو صفات. ويمكن أن تكون بيانات العينة بيانات وصفية مثل نوع التلف (العيب) في الجزء المصنع، المنطقة التي يسكن فيها العميل (المستهلك)؛ وإختيار التخصص لطلاب الكلية. يمكن أن تكون بيانات العينة أيضا بيانات كمية فعلى سبيل المثال، من الشائع لأغراض المسح الشامل طلب معلومات عن المرتبات ووضعها في فئات ,($30,000-$50,000) ($20,000 - $30,000) . . . .ألخ وبناء على ذلك فإن هذه الأساليب قد تتعامل مع النسب. فمثلا قد نأمل في الوصول إلى نتائج عن نسبة المفرادات التي تقع في كل فئة. والإستدلال الإحصائي على البيانات داخل كل طبقة يعتمد عادة على توزيع كا^{٢}، الذي تم إستعراضه في الجزء(٥-٧) (ومن المفيد لك هو أن تراجع هذا الجزء قبل مواصلة القراءة)

في الجزء (١٤-٢)، سوف تمتد اختبارات الإستدلال حول نسبة مجتمع واحد (الجزء٦-٥) لتشمل الاستدلال حول اثنين أو أكثر من النسب في المجتمع. فعلى سبيل المثال، قد نرغب مقارنة نسب العملاء الذي يعزي الاختلاف بينها إلى مصادر مختلفة. وبالإعتماد على بيانات العينة، هل من الممكن أن نستنتج أن بعض المصادر بها عملاء أكثر من المصادر الأخرى؟ الطريقة المستخدمة لهذا الغرض تعرف بأختبارات جودة التوفيق Goodness-of-fit، لأنها تقارن بين توزيع النتائج المشاهدة للعينة العشوائية مع التوزيع الذي يمكن توقع مشاهدته إذا كان ادعاء الفرض العدمي صحيحاً.

في الجزء(١٤-٣) سوف نضيف التحليل البياني للجزء (٢-٧-٢) لفحص العلاقة بين متغيرين لهم نتائج مدونة في فئات أو صفات. فعلى سبيل المثال، بإفتراض أن مهندس يريد تحديد ما إذا كان هناك علاقة بين نوع القطعة وأنواع العيوب التي يمكن أن تحدث بها. ربما بعض أنواع القطع تكون عرضة إلى عيب معين أكثر من القطع الأخرى. وتستلزم هذه الطريقة تحليل جداول الاقتران في إتجاهين. وكما تم مناقشة ذلك في الجزء(٢-٧-٢)، فإن الغرض من تحليل جداول الاقتران هو تحديد ما إذا كان المتغيرين- مثل نوع القطعة، ونوع العيب- يمكن اعتبارهما مستقلين بالنسبة لبعضهم البعض، ومن ثم غير مرتبطين.

في الجزء (١٤-٤)، سوف نقدم طريقة لاختبار الفرض (مطلوب غالبا في الفصول٥- ٨) القائل أن بيانات العينة تأتي من مجتمعات أو عمليات تتبع التوزيع الطبيعي. عمليا، سنقدم طريقتان

متكاملتان يمكن استخدامهما في ترادف. الأولى مدخل بياني والأخرى إختبار إستدلالي يعرف بأختبار ليليفورس Lilliefors

(١٤-٢) إختبار كا٢ لجودة المطابقة The Chi-Square Goodness of Fit Procedure

إفترض المثال التالي حيث نقارن عدة نسب. ترغب محللة تسويق في تحديد ما إذا كانت نسبة عملاء شركة صناعية تتوزع بانتظام على خمس أصناف رئيسية من الصناعات التي تتعامل معها شركتها. إذا وجد أن بعض الصناعات تحوز عملاء أكثر من الآخرين فإن هذا يمكن أن يؤثر على إستراتيجية التسويق. فإذا كان هناك عينة بها 50 عميل، فهي تحدد نوع الصناعة لكل عميل. أعداد العملاء بالنسبة لنوع الصناعة موضح كالتالي:

التصنيع	أعمال البنوك	التأمين	الحكومة	الأعمال الطبية	المجموع
13	7	8	10	12	50

لاحظ أنه يوجد 13 عميل من قطاع التصنيع بالمقارنة بسبعة عملاء من قطاع البنوك، هل هذا يوضح بصفة نهائية أن العملاء القادمين من قطاع التصنيع أكثر أم أن هذا التناقض الكبير يرجع ببساطة للصدفة ؟

وكما في معظم التطبيقات الإحصائية، من الأفضل رسم بيانات العينة قبل إستخدام الإستدلال الإحصائي. نظرا لأنه تم دراسة كل العملاء وعددهم (n=50) عميل، فإن توزيع نسبة هذا المجموع لأي نوع صناعة سوف يتساوى مع النسبة لكل نوع صناعة آخر فيما عدا التقلبات الناجمة عن المعاينة العشوائية. ومن هنا فإنه بمعلومية نوع الصناعة، نتوقع أن نشاهد20% من أعداد العملاء. وبإستخدام نظرية توزيع ذو الحدين "الجزء (٤-٢)"، سوف نحدد القيمة المتوقعة لأعداد العملاء لكل نوع من الصناعات الخمس لتكون: $\pi = n\,\pi = (50)\,(.2) = 10$. أعداد العملاء المشاهدة والمتوقعة (بإفتراض أن نسبة توزيع متساوية) موضحة في جدول(١٤-١):

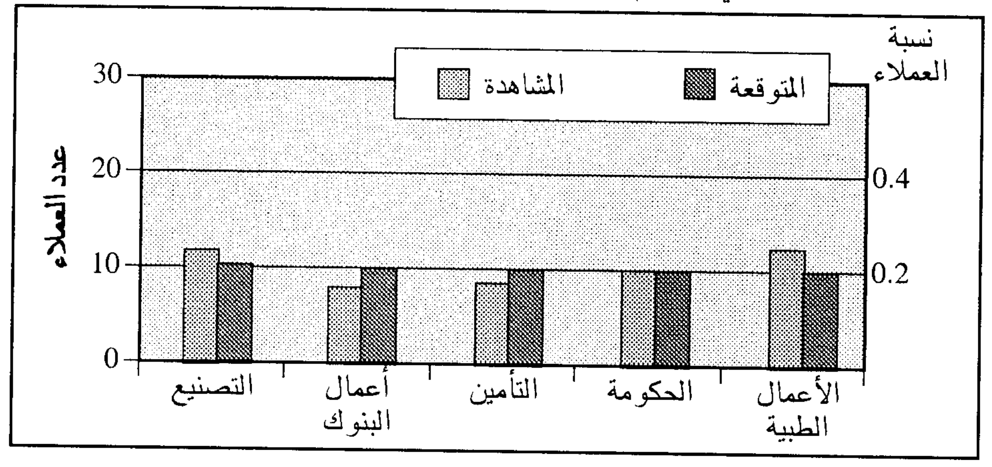
جدول(١٤-١)

أعداد العملاء المشاهدة والمتوقعة

	التصنيع	أعمال البنوك	التأمين	الحكومة	الأعمال الطبية	المجموع
المشاهدة	13	7	8	10	12	50
المتوقعة	10	10	10	10	10	50

ويمكن أن تتضح لنا الرؤية برسم بيانات العينة في الشكل (١٤-١). قارن بين الأعداد المشاهدة للعملاء والأعداد المتوقعة للعملاء لكل نوع من الأنواع الخمسة للصناعات. هل تعتقد أن الاختلافات كبيرة لدرجة أنه يمكن أن تعزى إلى إختلاف المعاينة العشوائية؟ وعلى الرغم من أن الأرقام المشاهدة للتصنيع والأعمال الطبية أكبر (إلى حد ما) من القيم المتوقعة وتلك الأرقام الخاصة بأعمال البنوك والتأمين أصغر (إلى حد ما) من القيم المتوقعة، فإن هذا التفاوت لا تظهر بشكل يمكن تقديره ويمكن بسهولة أن يحدث ذلك بالصدفة، على إعتبار أن حجم العينة صغير نسبيا (n=50) عميل. لذلك، فإنه يبدو من المقبول أن يتوزع عدد العملاء في المجتمع محل الدراسة بالتساوي على

الأنواع الخمسة من الصناعات. (إذا كان حجم العينة أكبر كثيرا-500 عميل مثلا- فلا يمكن أن تعزى كل الأختلافات إلى الصدفة، ومن المرجح ان تشكل هذه الاختلافات دليل قوي على أن عدد العملاء ليس موزع بالتساوي على الأنواع الخمس للصناعات. وهذا يوضح الحاجة إلى طرق استدلالية يمكن تقديمها لتقييم بيانات العينة بالإضافة إلى التحليل البياني). لاحظ أنه، كما هو موضح على المحور الرأسي في اليمين في شكل(١٤-١)، يمكن تحويل الأعداد المشاهدة والمتوقعة للعملاء إلى نسب ورسم هذه النسب بدون تغيير في الرسم.



شكل (١٤-١)

الأعداد المشاهدة والمتوقعة للعملاء لكل نوع صناعة

(١٤-٢-١) إحصاء جودة المطابقة وتوزيع المعاينة لها:

The Goodness - of - fit Statistic and its Sampling Distribution

لإجراء الإستدلال، نحتاج إلى وسيلة احصاء مناسبة. وفيما يتعلق بطرق جودة المطابقة، يعتمد الإستدلال على النسب، افترض أن: $\pi_5,\pi_4,\pi_3,\pi_2,\pi_1$ هي نسب العملاء في المجتمع وهي تناظر الخمس أنواع من الصناعات، ويعني التوزيع المتساوي في المجتمع أن:

$(\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = .2)$ ومن ثم يمكن أن نحدد الفرض العدمي كالتالي:

$$H_o = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = .2$$

في مقابل الفرض البديل

H_a : توجد نسبة واحدة π_i على الأقل تختلف عن الباقي

والآن، إذا كان الفرض العدمي صحيحاً، فإن العدد المتوقع للعملاء لكل من الأنواع الخمسة سيكون ((10=(.2)(50))، نظرا لأن كل النسب تساوي 2. بالاعتماد على الفرض العدمي. ومن المأمول أن قيمة وسيلة الأحصاء ستكون صفر عندما تتفق تماما الأعداد المشاهدة مع الأعداد المتوقعة وستكون كبيرة عندما يكون التناقض بينهم كبير. ومن ثم فإن القيمة الكبيرة لوسيلة الأحصاء تنتج قيمة صغيرة لـ P (P-vulue)، مما يدل على أن بيانات العينة تنكر صحة الفرض العدمي. وللوصول إلى أفضل وسيلة إحصائية، إفترض أن O_i هي الأعداد المشاهدة للحادثة (للعملاء) للفئة (نوع الصناعة) التي تأخذ الرقم i، وإفترض أن E_i هي الأرقام المتوقعة المناظرة لتلك الحادثة. للعدد k من الفئات (خمسة أنواع من الصناعات)، فإن أفضل وسيلة إحصائية يمكن تحديدها كالتالي:

$$\sum_{i-1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \qquad (14.1)$$

وتوضح النظرية الإحصائية أنه إذا كان العدد المتوقع للحادثة E_i هو 5 على الأقل، فإن توزيع المعاينة لوسيلة الأحصاء (14.1) يتبع تقريبا توزيع كا٢ بدرجات حرية (k-1). وإذا كان أي عدد من الأعداد المتوقعة أقل من 5 فيجب تجنب إستخدام توزيع كا٢. ومن ثم، وبأفتراض أن كل عدد متوقع هو 5 على الأقل، فإننا نحدد قيمة وسيلة الأحصاء ونستخدم توزيع كا٢ بدرجات حرية (k-1) لتحديد (P-value).

ويتطلب تحديد قيمة وسيلة الأختبار الواردة في الصيغة (14.1) الخطوات الثلاث التالية:

خطوات حساب قيمة وسيلة اختبار جودة المطابقة
(المقدار الجبري 14.1)

(1) لكل فئة من فئات k، قم بتربيع الفرق بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة $(O_i-E_i)^2$.

(2) اقسم كل فرق مربع على التكرار المتوقع لهذه الفئة $\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$

(3) اجمع الكميات التي حصلت عليها في الخطوة (2) .

ويعرف الاحصاء المعطي في المقدار الجبري (14.1) باحصاء جودة مطابقة كا٢ لبيرسون. **Pearson's chi-square goodness of-fit statistic** . لاحظ أن قيمة هذه الأحصاء عبارة عن مجموع كميات مربعة، بالتالي فإنه لا يمكن أن تكون سالبة أبدا. وإذا كان هناك اتفاق تام بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة فإن قيمة الأحصاء تساوى الصفر. زيادة التفاوت بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة، يعني زيادة قيمة الأحصاء.

دعنا نعود الآن إلى المثال الذي كنا نناقشه. ونرغب في إثبات النتيجة المبدئية المشتقة من شكل (١٤-١) بطريقة أكثر دقة. ولعمل ذلك سوف نطبق تحليل كا٢ الذي تم شرحه. من جدول (١٤-١) نعلم أن:

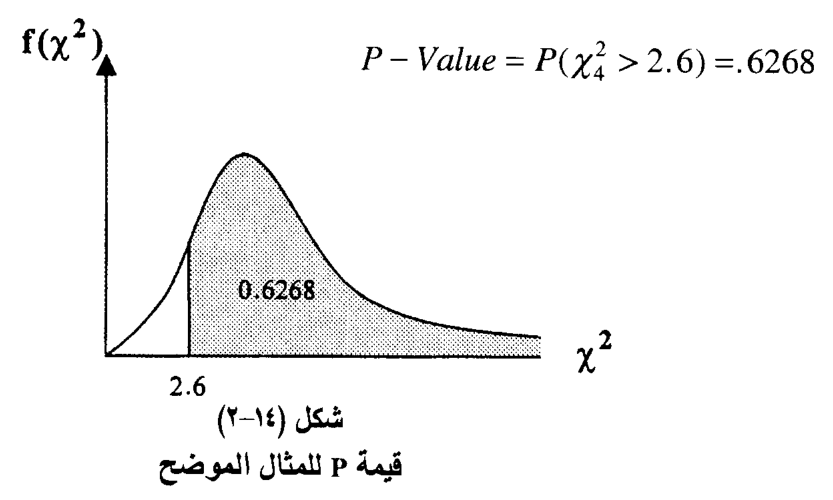
$$n=50,\ k=5,\ O_1=13,\ O_2=7,\ O_3=8,\ O_4=10,\ O_5=12$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 10$$

قيمة إحصاء إختبار جودة المطابقة هي :

$$\frac{(13-10)^2}{10}+\frac{(7-10)^2}{10}+\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(10-10)^2}{10}+\frac{(12-10)^2}{10}=2.6$$

تتذكر أنه لم يتم إنكار صحة الفرض العدمي. ونتذكر أيضاً من الجزء(٥-٧-٢) بأن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي كا٢ تساوي درجات الحرية الخاصة به. في هذه الحالة فإن القيمة المتوقعة =4 بينما القيمة المشاهدة لاحصاء جودة المطابقة كا٢ = 2.6 فقط، وهي بذلك أقل من القيمة المتوقعة. ونظراً لأن الدليل ضد الفرض العدمي يوجد في القيم الكبيرة فقط لإحصاء إختبار جودة المطابقة، نجد أن القيمة المشاهدة 2.6 لا تقدم تأييد على مناقضة الفرض العدمي. ونؤكد هذا الإستنتاج الآن بتحديد قيمة P. لدرجات الحرية (4=(k-1))، قيمة P موضحة في الشكل (١٤-٢) ومعطاة عن طريق إستخدام الحاسب الآلي لتكون:



شكل (١٤-٢)
قيمة P للمثال الموضح

نظراً لأن قيمة P تساوي 6268. وهي بالتأكيد غير صغيرة، فإنه تم تأكيد النتيجة المبدئية المعتمدة على التحليل البياني. وهي لا يمكن أن ينكر دليل العينة صحة الفرض العدمي. ومن ثم فإن دليل العينة لا يقدم أي تأييد حقيقي لإستراتيجية التسوق التي تفترض أن نسبة كبيرة من العملاء تأتي من التصنيع.

وقبل أن نواصل، لماذا نعتقد بوجود 4 درجات حرية هنا؟ الإجابة تتوقف أولاً على المفهوم المقدم في الجزء (٢-٥-٣) في الفصل الثاني. في المثال الحالي، تم إختيار مجموعة من 50 عميل. فإذا عرفنا عدد العملاء لأي أربعة أنواع من الصناعات، فإن عدد العملاء في نوع الصناعة المتبقي يتحدد تلقائياً بالعدد الذي يعطي المجموع 50. وهكذا فإنه يتم فقد درجة حرية واحدة ويتبقى 4 درجات حرية. وبصفة عامة فإن توزيع كاي تربيع لتحليل جودة المطابقة له درجات حرية عددها (k-1).

(١٤-٢-٢) التوزيع متعدد الحدود The Multinomial Distribution

في هذا الجزء سوف نوضح التشابه بين الشروط التي في ظلها يصبح إختبار جودة المطابقة مناسباً وتلك التي تظهر عند استخدام توزيع ذو الحدين، المقدم في الجزء (٤-٢). نعلم أن توزيع ذو الحدين يتعامل مع عدد النجاحات X الذي يحدث من بين عدد ثابت n من المحاولات. لاحظ أنه يوجد فئتين من النتائج (k=2)، "النجاح"، "الفشل". والشرط الضروري لتطبيق توزيع ذو الحدين هو أن إحتمال النجاح π يظل ثابتا في أي محاولة من المحاولات المستقلة التي عددها n(*).

أختبار جودة المطابقة هو امتداد لهذه الفكرة. افترض أننا نجري تجربة ما على مدى n محاولة مستقلة وصنفنا النتائج داخل فئات عددها k، حيث k أكبر من 2. افرض بعد ذلك أن إحتمال أن تقع نتيجة ما في الفئة i هو π_i حيث (i=1,2,....k) وأن هذه النسب تظل ثابته على مدى المحاولات المستقلة التي عددها n. بمعنى، كل محاولة π_1 هو إحتمال أن تقع النتيجة في الفئة 1, π_2 هو إحتمال ان تقع في الفئة 2. . . . . وهكذا. وهذا الوضع مطابق لتوزيع ذو الحدين عدا أن النتائج الممكنة يمكن أن تكون أكثر من نتيجتين في كل محاولة. ينشأ عن هذا ما يعرف بالتوزيع المتعدد الحدود **multinomial distribution**. وهكذا فإن توزيع ذو الحدين يعتبر حالة خاصة من التوزيع المتعدد الحدود عندما تكون k=2.

(*) على الرغم من أنه نظرياً، يلزم أن تكون المعاينة مع الأحلال لتأكيد الإستقلال، إلا إنه يمكن تأكيد ذلك وبتقريب جيد إذا كان حجم العينة لا يتعدى 5% من حجم المجتمع.

الإحتمالات $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k)$ هي نسب الحدوث في الأجل الطويل لفئات عددها k (بتطبيق تفسير التكرار النسبي للإحتمال) مثلما كانت π, $(1-\pi)$ هي نسب "النجاح"، "الفشل" في الأجل الطويل على التوالي، في حالة توزيع ذو الحدين. افترض أن $(O_1, O_2, ..., O_k)$ تمثل التكرارات المشاهدة التي حدثت لفئات عددها k. إذا أجريت التجربة n مرة مستقلة، فإن التكرارات المشاهدة للفئات يجب أن يكون مجموعها n، وأن الاحتمالات لعدد k فئة يجب أن يساوى واحد. أي:

$$O_1 + O_2 + ... + O_k = n \quad \text{and} \quad \pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_k = 1 \qquad (14.2)$$

بالنسبة لتجربة ذو الحدين، فإن الصغية المكافئة للعلاقة (14.2) هي:

$$x + (n-x) = n \qquad \text{and} \qquad \pi + (1-\pi) = 1$$

وكما أوضحنا سابقا، اذا عرفنا عدد النتائج المشاهدة لأي (k-1) من الفئات، يمكن أن نستنتج عدد النتائج المشاهدة للفئة المتبقية، وبذلك يوجد(k-1) درجة حرية. وفي الواقع تسمح لنا وسيلة الإختبار المعطاه في الصيغة (14.1) باختبار فرض عدمي لقيم محددة للاحتمالات $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k)$ وهي معلمات التوزيع المتعدد الحدود.

المثال التالي يوضح أنه يمكن إستخدام إختبار جودة المطابقة أيضا في تناول الإستدلال على معلمة ذو الحدين π، كما تم مناقشته في الجزء (٦-٥)، لتعطي نتائج متطابقة مع تلك التي حصلنا عليها في هذا الجزء.

مثال (١٤-١)

افترض أنه- تاريخياً- يدخل فرع أحد البنوك صباح كل يوم من أيام الأسبوع 40% من العملاء ينتظروا أداء الخدمة. بعد تنفيذ استراتيجية جديدة للخدمة، تسمح للعملية بالاستقرار، كان لابد من تحديد ما إذا كانت النسبة التي تضطر إلى الإنتظار تغيرت أم لا (نقص النسبة هو الذي نأمل في تحقيقه). وفقا لذلك فقد تم تسجيل أوقات الإنتظار لعينة عشوائية مكونة من 100 عميل صباح أحد أيام الأسبوع، ونتج عن ذلك أن30 عميل ينتظرون، 70 لا ينتظرون. هل هذه المعلومات توضح بإقناع أن العملية الآن ينتج عنها نقصاً عن السابق من 40 إلى 60 للانتظار، وعدم الإنتظار.

الحل

هذا المثال يتضمن توزيع ذو الحدين. حيث يوجد فئتين (k=2)(الإنتظار أو عدم الإنتظار)، ويوجد 100 محاولة مستقلة، كل لها إحتمال 0.4 للإنتظار، 0.6 لعدم الانتظار. وأخذا في الإعتبار إحصاء إختبار جودة المطابقة المعطي بالعلاقة (14.1) يمكن التعبير عن الفرض العدمي والفرض البديل كالتالي.

$H_o : \pi_1 = .4, \quad \pi_2 = .6$

$H_a : \pi_1$ and π_2 are other than as specified in H_o .

أي أن π_1, π_2 مختلفة عما تم تحديده في H_o .

حيث π_1, $(\pi_2 = 1-\pi_1)$ هي إحتمالات (نسب) الإنتظار وعدم الإنتظار على التوالي. أعداد العملاء

المشاهدة للانتظار وعدم الإنتظار هي $(O_1=30)$, $(O_2=70)$ على التوالي. بافتراض صحة الفرض العدمي، فإن أعداد العملاء المتوقعة للانتظار وعدم الإنتظار هي :

$$E_1 = n\pi_1 = (100)(.4) = 40 \quad \text{and} \quad E_2 = n\pi_2 = (100)(.6) = 60$$

لاحظ أن:

$$O_1 + O_2 = 30 + 70 = 100 \quad \text{and} \quad \pi_1 + \pi_2 = .4 + .6 = 1$$

قيمة إحصاء إختبار جودة المطابقة يمكن حسابها كالتالي:

$$\frac{(30-40)^2}{40} + \frac{(70-60)^2}{60} = 4.1667$$

نظرا لأن $(k=2)$ فإن هناك درجة حرية واحدة. قيمة p (P-value) معطاة من إستخدام الحاسب الآلي كالتالي :

$$\text{P-Value} = P(\chi_1^2 > 4.1667) = 0.0412$$

قيمة p هي 0.0412 وهي صغيرة بدرجة كافية لتوضيح أنه يمكن لدليل العينة أن ينكر ويناقض صحة الفرض العدمي. وهكذا يمكن أن نستنتج بأن التصنيف بين نسب الأنتظار وعدم الأنتظار في الأجل الطويل وفق أسلوب الخدمة الجديد يختلف عن التقسيمه 40، 60 .

والآن دعنا نرى النتيجة التي تم الحصول عليها بإستخدام توزيع ذو الحدين. إختبار الفروض للنسب بالإعتماد على التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين تم عرضه في الجزء (٦-٥) والفروض سوف تكون كالتالي:

$$H_o : \pi_1 = .4$$

$$H_a : \pi_1 \neq .4$$

حيث π_1 هي نسبة الأنتظار في الأجل الطويل في عملية مستقرة. (نظرا لأن نسبة من لا ينتظر هي $\pi_2 = (1-\pi_1)$، فلا داعي لظهور قيمة π_2 في أيا من الفرض العدمي H_o أو الفرض البديل H_a. فإذا عرفنا قيمة π_1 فيمكن معرفة قيمة π_2) . عند إختبار عينة من العملاء n حيث n=100 بطريقة عشوائية حيث خبرة الإنتظار بها هي 30 فإن تقدير π_1 هو ← (30/100=.3) .

تذكر أن القيمة التي تدعيها النسبة π_1 في الفرض العدمي هي 4.، بالتالي فإن قيمة Z تصبح:

$$Z = \frac{(.3-.4)}{\sqrt{\frac{(.4)(1-.4)}{100}}} = -2.0412$$

نظرا لأن الفرض البديل من طرفين، فإن قيمة P المعطاة عن طريق الحاسب الآلي (أو من جدول B في الملحق) هي :

$$\text{P-Value} = 2P(Z < -2.0412) = 2(.0206) = .0412$$

لاحظ أن الاختبارين أنتجا بدقة نفس قيمة P. فهل هناك ارتباط؟ في الواقع فإن الأمر كذلك، لأن توزيع ذو الحدين هو حالة خاصة من التوزيع متعدد الحدود عندما تكون $(k=2)$.

لاحظ أيضاً أن مربع قيمة Z هي نفسها قيمة إحصاء إختبار جودة المطابقة وهي: $(4.1667 = (-20412)^2)$. وهذا صحيح لأن مربع المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري هو متغير عشوائي يتبع توزيع كا٢ بدرجة حرية واحدة. ومن ثم، فإن الإختبار للاستدلال على نسبة واحدة في الجزء (٦-٥) حيث يستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذو الحدين- هو حالة خاصة من إختبار جودة المطابقة الذي تم مناقشته في هذا الجزء، حيث يستخدم تقريب كا٢.

مثال (١٤-٢)

في الأعوام القليلة الماضية، بلغت مساهمات السوق لمبيعات السيارات الجديدة المحلية ,%40 ,%35 %25 للمصانع C, B, A على التوالي في الولايات المتحدة الأمريكية. وكشفت عينة عشوائية مكونة من مبيعات حديثة لعدد 200 سيارة جديدة التقسيم التالي:

المجموع	C	B	A
200	40	95	65

هل تمدنا المعلومات المأخوذة من هذه العينة بدليل مقنع أنه قد تغيرت مساهمات السوق الحديثة عن النسب التاريخية؟

الحل

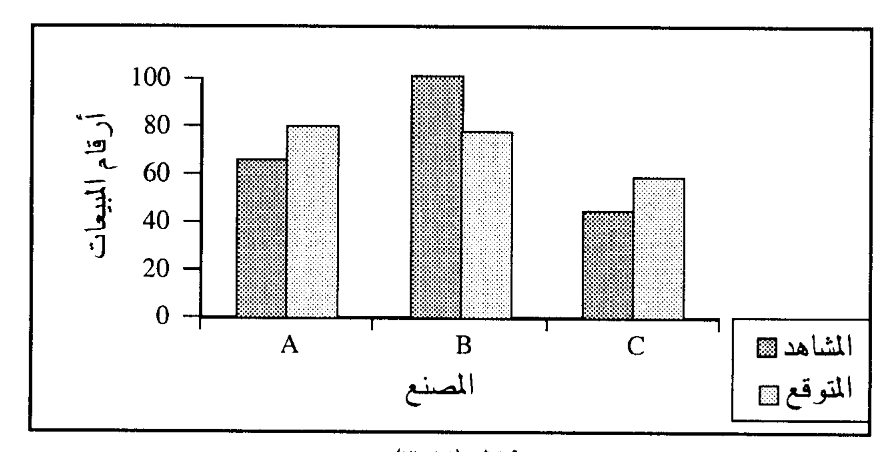
بفرض أن π_3, π_2, π_1 تعرف مساهمات السوق الجارية (النسب) لمبيعات المصانع C, B, A على التوالي. ونحن نرغب في إختبار الفرض العدمي:

$$H_o : \pi_1 = .4, \ \pi_2 = .35, \ \pi_3 = .25$$

مقابل الفرض البديل

ليس هذا الترتيب H_a: Not this arrangement

عندما تكون (n=200) فإن القيمة المتوقعة لرقم المبيعات في المصنع A (بإفتراض صحة الفرض العدمي) هي $(n\pi_1 = (200)(.4) = 80)$، بينما تلك الخاصة بالمصنع B، المصنع C هي: $(n\pi_2 = (200)(.35) = 70)$, $(n\pi_3 = (200)(,25) = 50)$ على التوالي. الرقم المشاهد للمبيعات هو: $(O_1=65)$, $(O_2=95)$, $(O_3=95)$ بالترتيب. نقارن الرقم المتوقع والرقم المشاهد بيانياً في الشكل (١٤-٣). ويوضح الشكل أن الفرق بين القيم المشاهدة والمتوقعة يمكن تقديره. وخاصة أنه أظهر أن المصنع B رفع نصيبه من السوق. ومع ذلك نحن لا نتوقع أن تتفق النسب المشاهدة مع النسب المتوقعة تماماً بسبب أخطاء المعاينة. هل هذه الفروق من قبيل الصدفة، على الرغم من أن نسب العملية الأساسية لم تتغير؟



شكل (١٤-٣)

مقارنة بين رقم المبيعات المشاهد ورقم المبيعات المتوقع

دعنا نحاول تأكيد النتيجة المبدئية بتحديد قيمة إحصاء إختبار جودة المطابقة {الصيغة (14.1)}. يمكن استخراج هذه القيمة كالتالي:

$$\frac{(65-80)^2}{80}+\frac{(95-70)^2}{70}+\frac{(40-50)^2}{50}=13.741$$

عندما (k=3) ∴ يوجد درجتان حرية، و قيمة P هي :

$$P-Value=P(\chi_2^2>13.741)=0.001$$

قيمة P التي تساوي 0.001 تعطي دليل واضح مقنع ضد الفرض العدمي. ومن ثم فإن هذه العينة العشوائية توحى وبقوة على أن مساهمات السوق للمصانع C,B,A قد تغيرت حقيقة عن النموذج التاريخي.

تمارين

(١٤-١) لتطبيق إختبار كا^2 لبيرسون، صف كيف يتم تحديد التكرارات المتوقعة؟

(١٤-٢) افترض أن هناك تفاوت كبير بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة المناظرة:

(أ) هل ستكون قيمة إحصاء إختبار جودة المطابقة بإستخدام توزيع كا^2 كبيرة أم صغيرة؟ إشرح.

(ب) هل ستكون قيمة P المناظرة كبيرة أم صغيرة؟ إشرح.

(١٤-٣) صف الشرط الذي يتطلبه توزيع المعاينة لإحصاء إختبار جودة المطابقة حيث لا يمكن إجراء التقريب لتوزيع كا^2 إلا بتوافره.

(١٤-٤) صف طبيعة الوضع الذي ينجم عنه التوزيع متعدد الحدود.

(١٤-٥) افترض تجربة متعددة الحدود حيث تم تصنيف النتائج داخل فئات عددها k. إشرح لماذا يكون هناك (k-1) درجة حرية عند إستخدام إختبار كاي تربيع لجودة المطابقة.

(١٤-٦) افترض أنه تم رمي زهرة نرد 300 مرة وحصلنا على النتائج التالية:

الرقم عند الرمى	1	2	3	4	5	6
التكرار المشاهد	45	56	52	46	42	59

(أ) بافتراض أن زهرة النرد متزنة. حدد التكرارات المتوقعة وقارن بينهم وبين التكرارات المشاهدة المناظرة بيانياً. هل يتضح لك أن زهرة النرد غير متزنة؟

(ب) هل دليل هذه العينة يمكن أن ينكر صحة الإدعاء القائل بأن زهرة النرد متزنة؟ دعم إجابتك بتطبيق طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(١٤-٧) في أيام السبت، في سوبر ماركت كبير تظل شبابيك دفع الحساب مفتوحة وعددهم ثمانية. في أحد أيام السبت، لاحظ المدير أن هناك 200 عميل تم التعامل معهم:

(أ) هل تعتقد أن إستخدام كا^2 لجودة المطابقة يكون مناسباً لتحديد ما إذا كانت أفضلية الشباك المفتوح موزعة بالتساوي؟ دعم إجابتك.

(ب) افترض أن المدير لاحظ التكرارات التالية. هل هذا دليل على إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فرق بين الأفضلية القائمة؟ {استكمل إجابتك على أساس أن الأجابة في الجزء (أ) هي "نعم" }.

Checkout counter	1	2	3	4	5	6	7	8
Observed frequency	42	18	38	29	16	22	18	17

(١٤-٨) التقديرات النهائية التي حصل عليها 100 طالب في مادة ادارة الأعمال في جامعة ما موضحة في الجدول التالي:

F	D	C	B	A	التقديــــــر
15	12	48	16	9	التكرارات المشاهدة

ويعرف الأستاذ- بالنسبة لهذا المنهج في هذه الجامعة - أن توزيع التقدير على مدى الأربع سنوات الأخيرة ظل مستقر وأنتج النسب التالية 15% بالنسبة للتقدير A، 20% بالنسبة للتقدير B ,40% بالنسبة للتقدير C، 15% للتقدير D، 10% بالنسبة للتقدير F.

(أ) عبر بيانياً عن التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة. هل من الواضح لك أن توزيع التقدير بالنسبة لهذه المجموعة من الطلبة يختلف لأسباب معينة بخلاف الصدفة والعشوائية؟

(ب) هل دليل هذه العينة يناقض صحة الإدعاء بأن توزيع التقدير لهذه المجموعة هو نفسه التوزيع التاريخي فيما عدا تأثير الإختلاف العشوائي؟ دعم إجابتك بتطبيق طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(١٤-٩) مدير محل للنبيذ (للخمر) قام بعمل استقصاء لعدد 240 عميل تم اختيارهم عشوائياً وتم توجيه أسئلة إليهم عن الطعم المفضل لهم من بين ستة أنواع لها أسعار مختلفة وبدون إعطائهم أي فكرة عن السعر. وقد تم الحصول على المعلومات التالية:

F	E	D	C	B	A	الخمر المفضـــــــل
40	42	34	42	46	36	التكرارات المشاهدة

(أ) بإفتراض أنه لا يوجد إختلاف بين نسب العملاء الذين يفضلون أنواع الخمر الستة،

حدد التكرارات المتوقعة وقارن بينهم وبين التكرارات المشاهدة المناظرة بيانياً. هل من الواضح بالنسبة لك أن هناك اختلافات موجودة بين النسب؟

(ب) هل يمكن لدليل العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق في نسب التفضيل للأنواع الستة من الخمر؟ دعم اجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(١٤-١٠) في الماضي القريب، يمكن بيان مساهمات منتجى البن في السوق في الولايات المتحدة كالتالي:

الصنف	A	B	C	الباقى
المساهمة	20%	30%	35%	15%

العينة الحالية مكونة من 250 مشتري للبن، تعكس نسب تفضيل كل منتج بن:

الصنف	A	B	C	الباقى
الأعداد المفضلة	75	55	70	50

(أ) بإفتراض أن مساهمات السوق هي نفسها كما كانت في الماضي القريب، حدد التفضيلات المتوقعة وقارن بينهم وبين التفضيلات المشاهدة المماثلة بيانياً. هل يظهر لك أن الفروق لايمكن ارجاعها إلى الإختلاف العشوائي؟

(ب) هل يمكن لدليل هذه العينة إنكار صحة الإدعاء القائل بأن مساهمات السوق لم تتغير؟ دعم اجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(١٤-١١) التوزيع التاريخي الطويل الأجل لمتوسط درجات الحرارة اليومية (بالدرجة الفهرنهيت) في مكان محدد أثناء شهر يناير كالتالي:

فئة الحرارة	< 30	30 - 39	40 - 49	≥50
نسبة عدد الأيام	10%	45%	37%	8%

في الأربع سنوات السابقة وعند ملاحظة درجات الحرارة بشهر يناير بهم تم تسجيل درجات الحرارة اليومية في هذا المكان وكانت كالتالي:

فئة درجة الحرارة	< 30	30 - 39	40 - 49	≥50
عدد الأيام	7	48	56	13

(أ) بإفتراض ثبات التوزيع التاريخي للظاهرة، احسب التكرارات المتوقعة وقارن بيانيا بينها وبين التكرارات المسجلة المناظرة لها. هل تبدو لك أي إختلافات لا يمكن أن تعزو إلى الإختلاف العشوائي؟

(ب) بالاعتماد على أشهر يناير في الأربع سنوات السابقة، هل هناك دليل مقنع على أن هناك تغيير في توزيع متوسط درجات الحرارة لشهر يناير في هذا المكان؟ دعم إجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(١٤-٣) تحليل جداول الاقتران في اتجاهين: إختبار كا^2 للاستقلالية

Analysis of Two-Way Contingency Tables: The Chi-Square Procedure For Independence

غالبا ما ينصب الإهتمام على تحديد ما إذا كان هناك علاقة بين متغيرين لهم نتائج مدونة في فئات أو صفات. وقد عرضنا مثل هذه العلاقة في مثال في الجزء (٢-٧-٢) جدول(١٤-٢) (الناتج من جدول٢-٥) الذي يوضح التصنيف المزدوج لطلاب الجامعة أخذاً في الإعتبار الكلية، المنشأ.

جدول (١٤-٢)

عدد الطلاب داخل وخارج الولاية وفق نوع الكلية

الكليـــــــــــــــة	منشـــأة الطالب	
	داخل الولاية	خارج الولاية
(Business) إدارة الأعمال	3,400	600
Arts and sciences الفنون والعلوم	2,200	600
Engineering الهندسة	800	800

وكما وضح بالشكل (٢-٢٤)، فإن نسبة الطلاب من خارج الولاية في كلية الهندسة أكبر من نسبة الطلاب من خارج الولاية في أي كلية أخرى. وإذا كان الهدف من الدراسة هو التنبؤ بنظام الالتحاق مستقبلا، فيلزم تحديد ما إذا كان: (1) إختيار الكلية له علاقة بمنشأ الطالب أو (2) الفروق المشاهدة ناتجة عن الإختلاف العشوائي لإختيار الطالب للكلية. ومن هنا نحتاج إلى إستخدام طرق الإستدلال الإحصائي لتأكيد هذه النتيجة المبدئية المعتمدة على الفحص المباشر للبيانات. وهدف هذا الجزء هو تقديم إختبار لأغراض الإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان هناك علاقة موجودة بين متغيرين لهم نتائج مسجلة في فئات أو صفات.

جدول(١٤-٢) هو مثال على ما يعرف بجداول الاقتران في اتجاهين. مثل هذا الجدول يتكون من التكرارات المشاهدة الحادثة لكل التوافيق من الفئات الخاصة بالمتغيرين وهكذا فإن جدول (١٤-٢) يحتوي على التكرارات المشاهدة لكل مجموعة من فئات الكلية ومنشأ الطالب. ويوجه تحليل جداول الاقتران المزدوجة السؤال عما إذا كان المتغيرين غير مرتبطين أى مستقلين بالنسبة لبعضهم البعض. وبناء على ذلك فإن الفرض العدمي في تحليل جداول الاقتران المزدوجة هو أن المتغيرين مستقلين. وإحصاء الإختبار التي تقدمها تقيس إلى أي مدى يختلف الفرق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة إذا كانت المتغيرات مستقلة. فإذا كانت هذه الفروق كبيرة كبراً كافياً، فإنه يتم إنكار صحة الفرض العدمي القائل بأن هناك استقلالية. ومن ثم فإن تحليل جدول الاقتران يعتمد على مفهوم جودة المطابقة.

ولتوضيح تحليل جدول الاقتران المزدوج، نفترض المثال التالي: في تجربة ما تم تتبع عينة عشوائية مكونة من 200 طالب في مادة الإحصاء، من ناحية وقت المذاكرة الكلي لهم في الفصل الدراسي بالكامل. والهدف هو إكتشاف العلاقة بين وقت المذاكرة والتقديرات. وجدول(١٤-٣) هو جدول الاقتران حيث يلخص النتائج. لاحظ أن الجدول يتضمن كل التوافيق الممكنة للفئات (أو الصفات) لوقت الدراسة والتقديرات.

جدول (١٤-٣) : جدول الاقتران في إتجاهين لوقت المذاكرة والتقدير

وقت المذاكرة	تقديـــــــر المادة					المجموع
	A	B	C	D	F	
< 20 hr	1	6	15	13	15	50
20-50	3	8	24	15	8	58
50-100	8	10	21	7	2	48
> 100 hr	13	14	13	3	1	44
المجموع	**25**	**38**	**73**	**38**	**26**	**200**

الفرض العدمي الذي نرغب في اختباره

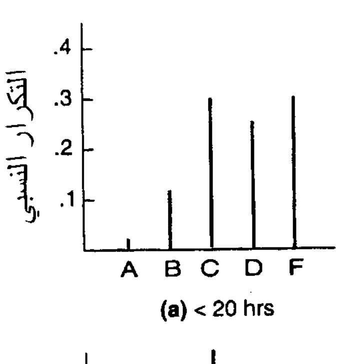
H_0: التقدير ووقت المذاكرة مستقلان

مقابل الفرض البديل H_a: التقدير ووقت المذاكرة غير مستقلان

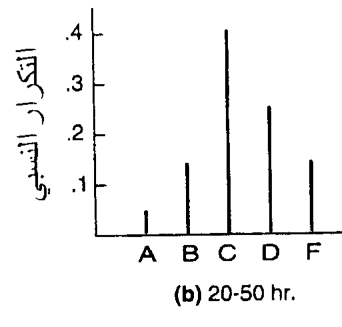
الآن، تفحص جدول(١٤-٣)، هل تعتقد أن دليل العينة كافي لأن يناقض صحة الفرض العدميH_0؟ ولماذا .

ولمساعدتك في فهم الطريقة التي سوف نعرضها. دعنا أولاً نرسم التكرارات النسبية مع الأخذ في الإعتبار التقديرات بشكل منفصل لكل فترة من زمن المذاكرة. فعلى سبيل المثال، التكرارات النسبية للفترة الزمنية أقل من 20 ساعة" للتقدير: ‎(F=15/50=.3), (D=13/50=.26), (C=15/50=.3)‎, ‎(B=6/50=.12), (A=1/50=.02)‎ ويتبع نفس الأجراء لكل فترات الوقت المتبقية، بذلك يتم تحديد التكرارات النسبية وقد تم رسمها في الشكل (١٤-٤).

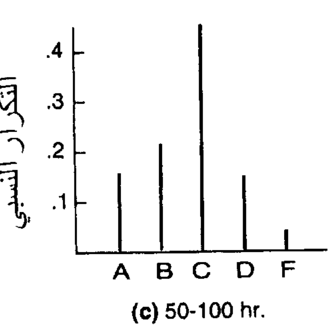
لاحظ أن هذه التوزيعات لا تبدو متشابهة. فعلى سبيل المثال، إذا كان الوقت الكلي الذي يقضيه الطالب في المذاكرة أقل من 20 ساعة، فإن أغلب التقديرات التي يحصل عليها الطالب هي C أو أسوء منها (الجزء a). أما إذا كان زمن المذاكرة يتعدى 100 ساعة فإن أغلب التقديرات التي يحصل عليها هي C أو أفضل منها (الجزء {d}).



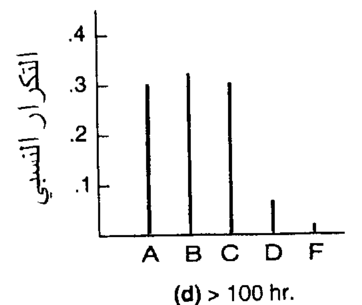
(a) < 20 hrs



(b) 20-50 hr.



(c) 50-100 hr.



(d) > 100 hr.

الشكل (١٤-٤) : التكرارات النسبية للتقديرات مع الأخذ في الإعتبار فترة وقت الدراسة

وإذا كان الفرض العدمي صحيحاً، فهل تتوقع أن تظهر هذه التوزيعات مختلفة كما هي في شكل (١٤-٤)؟ في مثل هذه الحالة يجب أن تبدو التوزيعات متشابهة بصفة أساسية لأن التقدير الذي يحصل عليه الطالب أصبح مستقل عن طول الوقت الذي يقضيه الطالب في المذاكرة. لذا، في هذا المثال يبدو واضحا أن دليل العينة يناقض أو ينكر الإدعاء القائل بأن هناك استقلال. هل الفروق في الأشكال تعكس الصدفة العشوائية؟ للإجابة عن هذا السؤال، يجب أن نعرض طريقة للاستدلال الإحصائي تعتمد على وسيلة إحصاء مناسب. ولكن ما هي وسيلة الأحصاء المناسبة هنا؟ هي بصفة أساسية تتشابه مع إحصاء إختبار جودة المطابقة التي تم مناقشته سابقا في هذا الفصل. وهكذا فهو يعتمد على التفاوت بين التكرارات المشاهدة "المرسومة في الشكل(١٤-٤)" والتكرارات المتوقعة المناظرة إذا كان التقدير الذي يحصل عليه الطالب وزمن المذاكرة في الحقيقة مستقلين.

دعنا نفكر في التكرارات التي يجب أن نتوقعها هنا. لاحظ في جدول (١٤-٣) لمجموعة كاملة من 200 طالب، النسب التي حصلنا عليها للتقديرات F,D,C,B,A . هي:

$$(A) = \frac{25}{200} = .125 \quad , \quad (B) = \frac{38}{200} = .19$$

$$(C) = \frac{73}{200} = .365 \quad , \quad (D) = \frac{38}{200} = .19$$

$$(F) = \frac{26}{200} = .13$$

إذا كان الفرض العدمي صحيحاً، فإن نسب التقديرات المتوقعة تكون متساوية للطلبة في كل الفترات الزمنية الأربعة للمذاكرة. فعلى سبيل المثال بالنسبة لعدد 50 طالب الذين يذاكرون أقل من 20 ساعة التكرارات المتوقعة هي:

للحصول على التقدير A $50(25/200) = 6.25$

للحصول على التقدير B $50(38/200) = 9.50$

للحصول على التقدير C $50(73/200) = 18.25$

للحصول على التقدير D $50(38/200) = 9.50$

للحصول على التقدير F $50(26/200) = 6.50$

(وتذكر أن "المتوقع" تعني القيمة المتوقعة أو المتوسط في الأجل الطويل على مدى عينات عشوائية متكررة. لذلك فمن المقبول أن يكون التكرار المتوقع به كسور)

بالنسبة لعدد الطلبة 58 الذين يذاكرون من 20 ساعة إلى 50 ساعة، نتوقع:

للحصول على التقدير A $(58)(25/200) = 7.25$

للحصول على التقدير B $(58)(38/200) = 11.02$

للحصول على التقدير C $(58)(73/200) = 21.17$

للحصول على التقدير D $(58)(38/200) = 11.02$

للحصول على التقدير F $(58)(26/200) = 7.54$

لاحظ بساطة النظام الذي يعطي القيم المتوقعة. لكل مجموعة فرعية، نقوم ببساطة بضرب المجموع الكلي للعمود (مجموع عدد الطلاب في فئة التقدير) في المجموع الكلي للصف (مجموع عدد الطلاب في فئة وقت المذاكرة)، ثم نقوم بقسمة هذا المقدار على مجموع عدد الطلاب الكلي. وبالاستمرار في هذا الإجراء، نستطيع أن نحدد التكرارات المتوقعة للفترتين الآخيرتين لزمن المذاكرة. التكرارات المشاهدة والمتوقعة للفئات الأربع لزمن المذاكرة معطاة في الجدول (١٤-٤).

جدول (١٤-٤)

التكرارات المشاهدة والمتوقعة للتقدير مقابل زمن المذاكرة

فئة زمن المذاكرة		تقدير المادة					مجموع
		A	B	C	D	F	
<20HR	المشاهدة المتوقعة	1 6.25	6 9.50	15 18.25	13 9.50	15 6.50	50 50
20-50Hr	المشاهدة المتوقعة	3 7.25	8 11.02	24 21.17	15 11.02	8 7.54	58 58
50-100Hr	المشاهدة المتوقعة	8 6	10 9.12	21 17.52	7 9.12	2 6.24	48 48
>100Hr	المشاهدة المتوقعة	13 5.5	14 8.34	13 16.06	3 8.36	1 5.72	44 44
مجموع	المشاهدة المتوقعة	25 25	38 38	73 73	38 38	26 26	200 200

دعنا الآن نوسع هذا الإختبار ونضع طريقة عامة للتعامل مع أي جدول اقتران مزدوج. إفترض أن هناك c عمود، r صف. إفترض أن O_{ij} ، E_{ij} هي التكرارات المشاهدة والمتوقعة على التوالي، في الصف i والعمود رقم j. في جدول (١٤-٤) على سبيل المثال، $(c=5)$، $(r=4)$، $(O_{11}=1)$، $(E_{11}=6.25)$، $(O_{12}=6)$، $(E_{12}=9.50)$، $(O_{21}=3)$، $(E_{21}=7.25)$، وهكذا.

وكما ذكرنا، الصيغة البسيطة لتحديد أي تكرار متوقع لمجموعة خاصة من الصف والعمود هي ضرب مجموع الصف في مجموع العمود وقسمة الناتج على الحجم الكلي للعينة. في جدول (١٤-٤) وعلى سبيل المثال، يتم إيجاد التكرار المتوقع E_{12} للصف الأول والعمود الثاني عن طريق ضرب مجموع الصف الأول (50) في مجموع العمود الثاني (38) وقسمة الناتج على n=200 وهي كالتالي:

$$E_{12} = \frac{(\text{مجموع العمود 2})\,(\text{مجموع الصف 1})}{\text{حجم العينة}} = \frac{(50)\,(38)}{200} = 9.5$$

وبصفة عامة، يتم تحديد قيمة التكرار المتوقع للصف رقم i والعمود رقم j كالتالي:

$$E_{ij} = \frac{(\text{مجموع العمود } j)\,(\text{مجموع الصف } i)}{\text{حجم العينة}} \qquad \textbf{(14.3)}$$

تذكر، أن الهدف هنا هو نفسه هدف طريقة إختبار جودة المطابقة الذي عرض في هذا الفصل: وهو مقارنة التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة لكل مجموعة من الفئات، وبالإعتماد على قيمة

Pلتحديد ما إذا كان التباين كافي بينهم لإنكار صحة الفرض العدمي القائل بأن هناك إستقلالية. ويمكن تعريف إحصاء إختبار تحليل جدول الاقتران كالتالي:

$$\sum\sum\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad (14.4)$$

حيث يوضح المجموع المزدوج في الصيغة (14.4) أن الكميات $(O_{ij}-E_{ij})^2/E_{ij}$ يجب أن يتم جمعها على مدى كل الصفوف والأعمدة. وبعد تحديد قيمة إحصاء الإختبار، نحدد قيمة P المناظرة. فإذا كانت صغيرة بدرجة كافية، فيتم إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه يوجد إستقلالية.

إحصاء الإختبار المعطى في الصيغة (14.4) هو متغير عشوائي توزيعه العيني هو تقريب جيد لتوزيع كا٢ بدرجات حرية (r-1)(c-1) بموجب شروط معينة. الشرط الضروري هو أن يكون حجم العينة كبير بدرجة كافية لكي يكون كل تكرار متوقع 5 على الأقل. فعلى سبيل المثال، لاحظ في جدول(١٤-٤) لا يوجد أي تكرار متوقع أقل من 5. فإذا وجد واحد أو أكثر من التكرارات المتوقعة أقل من 5 في جدول الاقتران، فإن البديل المعقول هو أخذ عينة ذات حجم أكبر. وإذا كان هذا غير متاح، فإنه يتم إدماج كل فئتين في فئة واحدة والذي بدوره يتم دمج تكراراتهم المتوقعة.

دعنا نحدد قيمة إحصاء الإختبار وكذلك قيمة P في هذا المثال. ويتم تحديد قيمة إحصاء الإختبار كالتالي:

	العمود الأول . . . . العمود الخامس
الصف الأول	$\frac{(1-6.25)^2}{6.25}+\cdots\cdots+\frac{(15-6.50)^2}{6.50}$
الصف الثاني	$+\frac{(3-7.25)^2}{7.25}+\cdots\cdots+\frac{(8-7.54)^2}{7.54}$
الصف الثالث	$+\frac{(8-6)^2}{6}+\cdots\cdots+\frac{(2-6.24)^2}{6.24}$
الصف الرابع	$+\frac{(13-5.5)^2}{5.5}+\cdots\cdots+\frac{(1-5.72)^2}{5.72}$
المجموع	= 50.61

وعند درجات حرية تساوي 12=(4-1)(5-1) ، قيمة P هي: ($P(\chi^4_{12} > 50.61) = 0.00$). نظرا لأن قيمة P هي في الواقع صفر، فإن دليل هذه العينة يناقض بقوة صحة الفرض العدمي القائل بأن هناك استقلال. ويؤكد هذا الإستدلال النتيجة التي وصلنا إليها من فحص الرسم الموضح بالشكل(١٤-٤)، وبناء على ذلك فإنه في المجتمع محل الدراسة، التقدير الذي يحصل عليه الطالب في مادة الإحصاء له ارتباط قوي بعدد الساعات التي يقضيها في مذاكرة المادة أثناء الفصل الدراسي.

إستخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

لتوضيح إستخدام أمر Minitab المسمى بـ كا٢ chi-square لجداول الاقتران المزدوجة. نستخدم المثال التالي.

مثال (١٤-٣)

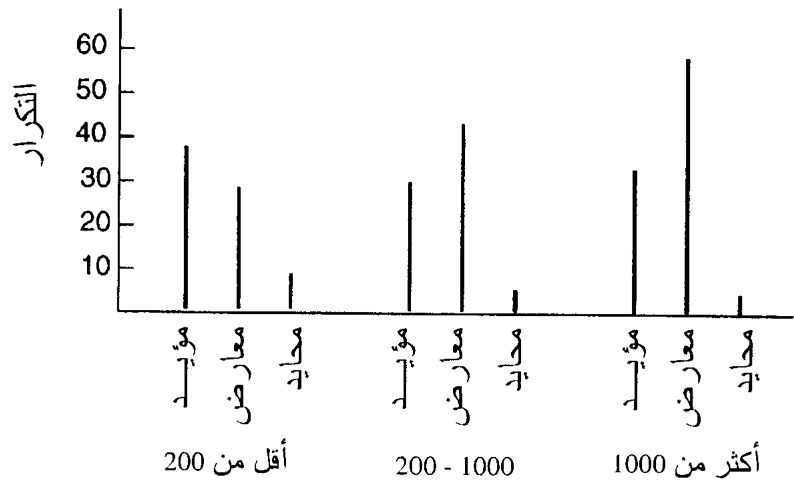
تقوم شركة مساهمة بتقييم الاندماجات المقترحة. قام المجلس بإجراء مسح شامل لعينة من المساهمين لتحديد ما إذا كان هناك علاقة بين رأي المساهمين المتعلق بالاندماجات المقترحة وعدد الأسهم. المعلومات الموجودة بجدول (١٥-٥) تمثل عينة عشوائية من 250 مساهم. هل المعلومات المأخوذة من هذه العينة تقدم دليل مقنع على أن الرأي بخصوص الاندماج المقترح مستقل عن عدد الأسهم المملوكة؟

جدول (١٤-٥)
جدول الاقتران في إتجاهين لرأي المساهم مقابل عدد الأسهم المملوكة

الأسهم المملوكة	الرأى			المجموع
	مؤيد	معارض	لم يقرر	
أقل من 200	38	29	9	76
200 – 1000	30	42	7	79
أكثر من1000	32	59	4	95
المجموع	**100**	**130**	**20**	**250**

الحـل

قبل أن نقدم نتائج الحاسب الآلي، دعنا أولاً نقوم بفحص جدول (١٤-٥) حيث يظهر لنا أنه تتزايد نسبة المساهمين الذين يعارضون الإندماج بتزايد عدد الأسهم التي يملكونها. فعلى سبيل المثال، يعارض فكرة الإندماج 62% من المساهمين الذين يملكون أكثر من 1000 سهم بالمقارنة مع نسبة 38% من المساهمين الذين يمتلكون أقل من 200 سهم. فإذا كان الرأى مستقل عن عدد الأسهم المملوكة، فيلزم أن تكون نسبة المعارضة تقريباً واحدة في الثلاث مجموعات لمالكي الأسهم. هذا النمط تم توضيحه في شكل (١٤-٥). لكن هل نتج نمط الرأي الموضح بالشكل بالصدفة؟، بمعنى، هل يعكس النموذج أو النمط المشاهد ببساطة إختلاف المعاينة العشوائية، بينما الرأي وعدد الأسهم المملوكة هي ظواهر مستقلة؟.



شكل (١٤-٥)
توزيع الرأي بالإعتماد على عدد الأسهم المملوكة

دعنا نضع الفروض كالتالي:

H_o: الرأي وعدد الأسهم المملوكة مستقلين

H_a: الرأي وعدد الأسهم المملوكة غير مستقلين

مخرجات الحاسب الآلي معطاة في جدول(١٤-٦) . لاحظ أنه كما في جدول (١٤-٤) تشتمل مخرجات Minitab في جدول(١٤-٦) على التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة بنفس الترتيب. وقد تم إيجاد قيمة إحصاءة الإختبار (10.796) في نهاية الجدول لكل مجموعة من فئة الرأي، فئة الأسهم. وقد أعطيت درجات حرية (df=4) أيضاً في النتائج. ولكن لم يعطينا برنامج Minitab قيمة P، ولكن يمكن تحديد قيمة P بسهولة في Minitab بإستخدام أمر CDF (دالة التوزيع التراكمي). وتم حساب قيمة P لتكون (0.029) وهي صغيرة بدرجة كافية لإنكار صحة الإدعاء بالإستقلال ونؤكد هذه النتيجة المبدئية بالإعتماد على الشكل (١٤-٥) حيث أن الرأي ليس مستقلاً عن عدد الأسهم المملوكة.

جدول (١٤-٦): مخرجات برنامج ميني تاب لمثال (١٤-٣)
الأعداد المتوقعة مطبوعة أسفل الأعداد المشاهدة

```
Expected counts are printed below observed counts

              C1        C2        C3      Total
   1          38        29         9         76
           30.40     39.52      6.08

   2          30        42         7         79
           31.60     41.08      6.32

   3          32        59         4         95
           38.00     49.40      7.60

Total        100       130        20        250

ChiSq =    1.900  +  2.800  +  1.402 +
           0.081  +  0.021  +  0.073 +
           0.947  +  1.866  +  1.705 = 10.796
df = 4
```

تمارين:

(١٤-١٢) المقادير الموجودة في جدول الاقتران المزدوج التالي هي التكرارات المتوقعة. أكمل جدول التكرارات المتوقعة بإفتراض إستقلال كل من الصف والعمود.

المجموع				
100			40	
		50		
200	20			المجموع

(١٤-١٣) مجاميع الصفوف والأعمدة في جدول الاقتران المزدوج كما هو موضح أدناه، بإفتراض الإستقلال، حدد جدول التكرارات المتوقعة.

					المجموع
					15
					20
					20
					15
المجموع	20	25	10	15	70

(١٤-١٤) تم إستجواب 200 بالغ إختيروا عشوائياً عما إذا كان العروض التليفزيونية في مجملها هي في الأصل مسلية، ثقافية، أو مضيعة للوقت. (يجب إختيار إجابة واحدة فقط) وقد تم تصنيف المستجوبين على أساس النوع. وإجاباتهم معطاه في الجدول التالي:

النوع	الرأى		
	مسلى	ثقافى	مضيعة للوقت
أنثى	52	38	30
ذكر	28	12	50

(أ) بالنسبة لكل نوع، أرسم الآراء الموضحة. هل من الواضح لك أن هناك علاقة بين الرأي والنوع؟ وإذا كان كذلك، صف هذه العلاقة.

(ب) هل ما سبق دليل مقنع بأن هناك علاقة بين النوع والرأي في المجتمع محل الدراسة؟ دعم إجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي؟

(١٤-١٥) في جامعة كبيرة، تم تصنيف 500 خريج اختيروا عشوائياً وفقاً لتخصصهم ومتوسط نقطة التقدير الحالي، وقد نتج عن هذه الدراسة المعلومات التالية:

متوسط التقدير GPA	التخصص			
	إدارة	تربية	هندسة	علوم
2.0 – 2.5	35	10	50	55
2.5 – 3.0	50	15	60	75
3.0 – 3.5	50	35	10	15
3.5 – 4.0	15	15	5	5

(أ) لكل مدى في GPA (متوسط تقدير)، ارسم الأعداد المشاهدة من الطلبة في التخصصات الأربع. هل تظهر لك علاقة بين GPA والتخصص؟ فإذا كان كذلك، صف هذه العلاقة.

(ب) هل هناك دليل مقنع على أن هناك علاقة بين GPA والتخصص في هذه الجامعة؟ دعم إجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(١٤-١٦) خلال فترة ثلاثة أشهر، لاحظ بائع تجزئة للسيارات الكبيرة أن المبيعات المتعاقد عليها تتم عن طريق أفضل ثلاثة رجال بيع لديه وقد تم تصنيفهم وفقاً لحجم السيارة المباعة، وحصلنا على جدول التصنيف المزدوج التالي:

رجل البيع	حجم السيارة			
	subcompact	Compact	Intermediate	Large
A	15	14	18	13
B	9	16	16	9
C	6	10	16	8

(أ) لكل رجل بيع، ارسم الأعداد المشاهدة من السيارات المباعة للأحجام الأربع. هل تظهر لك علاقة بين رجل البيع وحجم السيارة؟ وإذا كان كذلك صف هذه العلاقة.

(ب) هل يوجد دليل مقنع على أن هناك علاقة بين رجل البيع وحجم السيارة؟ دعم إجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(ج) صف المجتمع أو العملية بناء على ما توصلت إليه من الاستدلال في الجزء (ب).

(١٤-١٧) يعمل مصنع لتصنيع أجزاء السيارات ثلاث ورديات. يقوم مدير المصنع بإختيار عينات عشوائية بصفة دورية من الأجزاء المجمعة ويقوم بفحصها وذلك للتأكد من أن جودة الإنتاج واحدة في الثلاث ورديات. وتظهر نتائج العينة الحالية لجزء معين التصنيف التالي:

الوردية	عدد الأجزاء	
	مقبول	به عيوب
الأولى	95	4
الثانية	89	12
الثالثة	68	14

(أ) إرسم لكل وردية الأعداد المشاهدة للأجزاء المقبولة والتي بها عيوب. هل تظهر لك علاقة؟ إذا كان الأمر كذلك، صف هذه العلاقة.

(ب) هل تمدنا هذه البيانات بدليل مقنع على أن جودة الإنتاج ليست واحدة في الثلاث ورديات؟ دعم إجابتك بإستخدام طريقة مناسبة للاستدلال الإحصائي.

(ج) صف المجتمع أو العملية على ضوء استدلالك الإحصائي المطبق في الجزء (ب).

(١٤-٤) إختبار ليليفورس Lilliefors لاختبار فرض الاعتدالية :

The Lilliefors Procedure For Testing An Assumption of Normality

عند تطبيق الاستدلال الإحصائي، غالبا ما يكون من الضروري افتراض أن توزيع المجتمع الأصلي أول العملية هو التوزيع الطبيعي. وكما أشرنا في الفصل (٥)، (٧) أن فرض الاعتدالية لأغراض الاستدلال عن الأوساط الحسابية بالاعتماد على توزيع T عادة لاتكون جادة شريطة أن تتكون العينة من 15 مشاهدة على الأقل. ولكن عند الاستدلال عن تباينات المجتمع، يكون استخدام توزيع كاي تربيع وتوزيع F حساس تماما لفرض الاعتدالية حتى لأحجام العينة الكبيرة نسبيا.

في هذا الجزء، سوف نقدم طريقة بيانية، وطريقة استنتاجية مرتبطة بها لفحص فرض الاعتدالية. وتعرف الطريقة الإستدلالية بإختبار ليليفورس **Lillefors Test** . وقد تم تقديمه خصيصا للتعامل مع الوضع المعتاد عندما تكون قيم متوسط المجتمع والإنحراف المعياري قيم غير معلومة.

وتكمن الإستفادة من الطريقة البيانية وطريقة ليليفورس عندما يكون حجم العينة كغير نقبياً، وهو الوضع الذي يكون فيه فرض الطبيعة له أهمية كبيرة. وما يجب ملاحظته هو أنه يمكن إستفدام اختبار آخر معتمد على مفهوم جودة المطابقة لتوزيع كا^2 لإختبار فرض الاعتدالية. ومع ذلك، غالبا ما تكون طريقة كا^2 غير عملية، لأنها تتطلب أن يكون حجم العينة كبير نقبياً حتى يمكن تصنيف بيانالا العينة في كفالا أو فئالا، شريطة أن يوجد في كل فئة خمس تكرارالا متوقعة على الأقل (وهذا هو الشرط المطلوب لإستفدام تقريب كا^2).

الطريقة البيانية: خريطة الاحتمال الطبيعي: Graphic Method: The Normal Probaility Plot

سوف نقتفدم هنا الطريقة البيانية المعروفة بالرسم البياني للإحتمال الطبيعي. في هذه الخريطة يتم تقفيم المحورين بطريقة ما كما هو موضح بالشكل، فإذا كانت بيانالا العينة مأخوذة من توزيع طبيعي، فإن نقط البيانالا المرسومة تظهر تقريبا كفط مقتقيم. وإذا كانت العينة ليقت مأخوذة من توزيع طبيعي، فإن الرسم البياني عادة ما يصور إنحناء معين. وكلما ظهر الإنحناء بوضوح، كلما كان هناك دلالة قوية على أن العينة ليقت مأخوذة من توزيع طبيعي.

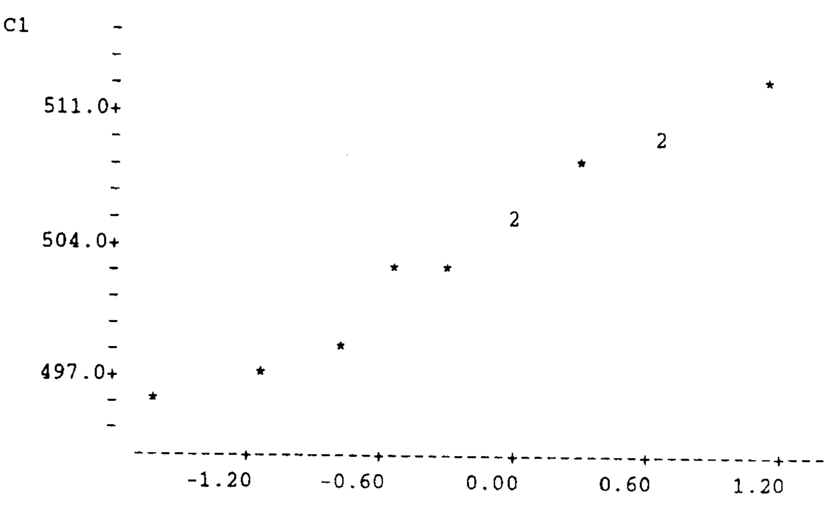
ويعرض برنامج Minitab طريقة سهلة لتوليد الرسم البياني للإحتمال الطبيعي. وللتوضيح، نقتفدم بيانالا العينة في مثال (٦-١١) في الجزء(٦-٤-٦)، حيث تتتابع كالتالي:

502, 496, 510, 508, 506, 498, 512, 497, 515, 503, 510, 506.

هل تبدو هذه البيانالا على أنها مأخوذة من توزبع طبيعي؟ بعد إدخال البيانالا (بفرض إنها في العمود c1)، سوف نقتفدم الأمران التاليان للحصول على خريطة للإحتمال الطبيعي في شكل (١٤-٦)(*).

```
MTB > nscores c1 c2
MTB > plot c1 c2
```

في الشكل(١٤-٦) تقع النقط تقريبا في خط مقتقيم. فلا يوجد سبب لكي نهتم بفرض الاعتدالية لهذه البيانالا.



شكل (١٤-٦): خريطة للإحتمال الطبيعي لبيانات العينة في مثال (٦-١١)

(*) عندما نستخدم برنامج (Minitab) مع الأمر NSCORES، فإن قيم C2 يتم إيجادها عن طريق Minitab. لذلك أنت لست في حاجة لإيجاد قيم C2. وفيما يتعلق بما تهدف إليه، فليس من المهم بالنسبة لك ان تعرف ماذا تمثل C_2.

إختبار ليليفورس: The Lilliefors Procedure

يقارن إختبار ليليفورس بين دالة التوزيع التراكمي للعينة مقابل دالة التوزيع التراكمي لتوزيع طبيعي له الوسط والإنحراف المعياري المحدد من بيانات العينة. (لمراجعة دوال التوزيع التراكمي، انظر الأجزاء (٣-٦)، (٣-٧).

وإستناداً إلى المناقشة في الجزء (٣-٦) فإن دالة التوزيع التراكمي للعينة - تعرف بالرمز S(x)- هي نسبة من قيم العينة التي تكون أقل من أو تساوي قيمة محددة x. ومن السهل تحديد دالة التوزيع التراكمي للعينة. وللتوضيح، دعنا نرجع إلى بيانات مثال (٦-١١). ولتحديد قيمة S(x)، نرتب بيانات العينة ترتيبا تصاعديا كالتالي :

496 , 497 , 498 , 502 , 503 , 506 , 506 , 508 , 510 , 510, 512 , 515

نظرا لأن القيمة 496 هي أصغر قيمة في الإثني عشر قيمة، فإن نسبة القيم التي تقل عن أو تساوي 496 هي:

$$S(496) = \frac{1}{12} = .0833$$

القيمة الأصغر التالية هي 497، لذلك فإن نسبة القيم التي تقل عن أو تساوي 497 هي:

$$S(497) = \frac{2}{12} = .1677$$

وباستمرار هذه العملية، يمكن أن نحدد التوزيع التراكمي للعينة كالتالي:

x	496	497	498	502	503	506	508	510	512	515
S(x)	.0833	.1667	.2500	.3333	.4167	.5833	.6667	.8333	.9167	1.000

لاحظ أنه بالنسبة لقيم العينة المتشابهة، يتم عرض القيمة مرة واحدة فقط.

ويختبر إسلوب ليليفورس الفرض العدمي القائل بأن بيانات العينة مأخوذة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط وإنحراف معياري كما تم تحديده من معلومات العينة. وقد تم حساب الوسط والإنحراف المعياري من بيانات العينة لتكون 505.25 , 6.15 على التوالي. ويمكن كتابة الفروض كالتالي:

H_0 : العينة مأخوذة من توزيع طبيعي

H_a: العينة ليست مأخوذة من توزيع طبيعي

إفترض مؤقتا أن الفرض العدمي صحيح، ونقوم بتقييم دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي عند القيم المحددة في العينة. وعندئذ نقارنها مع دالة التوزيع التراكمي للعينة. فإذا كان الفرض العدمي صحيحاً نتوقع أن تتطابق دالتي التوزيع التراكمي فيما عدا الإختلاف الناتج عن التغير العشوائي. فإذا كانت الاختلافات كبيرة بدرجة كافية، فيمكن إنكار صحة الفرض العدمي، وأن التوزيع هو توزيع آخر بخلاف التوزيع الطبيعي المحدد في الفرض العدمي.

وكما تم إيضاحه في الجزء(٤-٣) [خاصة الصيغ (4.10),(4.14)]، تحدد دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي F(x : 505.25, 6.1) بتحويل قيم العينة إلى قيم Z وتتبع ما تم في الجزء (٤-٣) -على سبيل المثال،

$$P(x \le 496) = P(Z \le \frac{496-505.25}{6.15}) = P(Z \le -1.50) = .0668$$

$$P(x \le 497) = P(Z \le \frac{497-505.25}{6.15} = P(Z \le -1.34) = .0901$$

وبإستمرار هذه العملية نحدد قيم(F(x :505.25,6.15 كالتالي:-

x	496	497	498	502	503	506	508	510	512	515
F(x)	.0668	.0901	.1190	.2981	.3557	.5478	.6736	.7794	.8643	.9441

ويرمز لإحصاء إختبار ليليفورس بالرمز D وتعرف بأنها أكبر فرق مطلق بين(S(x) ,F(x كالتالي :

$$D = \max |F(x) - S(x)| \qquad (14.5)$$

في جدول(١٤-٧)، قمنا بتحديد الفرق المطلق بين S(x) ,F(x) لكل قيمة من قيم العينة وأكبر فرق مطلق هو D = .1310 .

جدول (١٤-٧)

تحديد قيمة إحصاء إختبار ليليفورس وفقا لبيانات مثال (٦-١١)

X	F(x)	S(x)	|F(x) – S(x)|
496	.0668	.0833	.0165
497	.0901	.1667	.0766
498	.1190	.2500	.1310
502	.2981	.3333	.0352
503	.3557	.4167	.0610
506	.5478	.5833	0355
508	.6736	.6667	.0069
510	.7794	.8333	.0539
512	.8643	.9167	.0524
515	.9441	1.000	.0959

إذا كانت قيمة إحصاء ليليفورس كبيرة بدرجة كافية، نستنتج من ذلك أن دليل العينة ينكر ويناقض صحة ادعاء الفرض العدمي. وكما في اختبارات الاستدلال السابقة، نعتمد على قيمة P (P-value) في إتخاذ القرار. وقيمة P في إختبار ليليفورس هي إحتمال أن تكون قيمة إحصاء الإختبار أكبر من القيمة المحددة من العينة الفعلية. وفي جدول(١٤-٨) ، نعطي قيم الجانب الأعلى لتوزيع المعاينة للاحصاءD. وشكل هذا الجدول متسق مع الجداول الإحصائية الأخرى في هذا الكتاب. لاحظ أنه عندما (n=12)، أقرب قيمة للاحصاء (D=.1310) هي 199. . ولكن القيمة 199. هي النسبة الـ 80% من توزيع المعاينة للاحصاء D عندما (n=12). ونظرا لأن (D=.1310) تقع على يسار 199.، يتبع ذلك أن تصبح قيمة P أكبر من 2.

$$P\text{-value} = P(D > .1310) > .20$$

ومن المؤكد أن قيمة P أكبر من 2. لا تشكل دليل مقنع ضد الفرض العدمي. هذا الإختبار مثل

الإختبار البياني يقدم سبب ضعيف كى نشك بأن فرض الأعتدالية معتمد على بيانات هذه العينة .

جدول (١٤-٨)

القيم الجدولية لإحصاء إختبار ليليفورس (*)

	الإحتمال التراكمى				
n	.80	.85	.90	.95	.99
4	.300	.319	.352	.381	.417
5	.285	.299	.315	.337	.405
6	.265	.277	.294	.319	.364
7	.247	.258	.276	.300	.348
8	.233	.244	.261	.285	.331
9	.223	.223	.249	.271	.311
10	.215	.224	.239	.258	.294
11	.206	.217	.230	.249	.284
12	.199	.212	.223	.242	.275
13	.190	.202	.214	.234	.268
14	.183	.194	.207	.227	.261
15	.173	.187	.201	.220	.257
16	.173	.182	.195	.213	.250
17	.169	.177	.189	.206	.245
18	.166	.173	.184	.200	.239
19	.163	.169	.179	.195	.235
20	.160	.166	.174	.190	.231
25	.142	.147	.158	.173	.200
30	.131	.136	.144	.161	.187
>30	$\frac{.736}{\sqrt{n}}$	$\frac{.768}{\sqrt{n}}$	$\frac{.805}{\sqrt{n}}$	$\frac{.886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.031}{\sqrt{n}}$

(*) Source (المصدر) : H.W Lilliefors. "On the Kolmogorov Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown" Journal of the American Statistical Association 62, pp. 399-402, 1967

تماريـــــــن

في التمارين التالية، استخدم بيانات العينة للتمارين السابقة لعمل التحليل البياني بإستخدام الرسوم البيانية للإحتمال الطبيعي و إختبارليليفورس في إختبار فرض الأعتدالية.

(١٤-١٨) بالإشارة إلى تمرين (٦-١٦)

(١٤-١٩) بالإشارة إلى تمرين (٦-٢٠)

(١٤-٢٠) بالإشارة إلى تمرين (٦-٢٥)

(١٤-٢١) بالإشارة إلى تمرين (٦-٢٨)

(١٤-٢٢) بالإشارة إلى تمرين (٦-٣٠)

(١٤-٥) ملخص : Summary

في هذا الفصل قدمنا طريقتين للإستدلال الإحصائي متضمنة البيانات التصنيفية وطريقة لتحديد ما إذا كانت بيانات العينة مأخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي أم لا. وتسمى الطريقة الأولى للإستدلال الإحصائي باختبارات جودة المطابقة. وهدف اختبارات جودة المطابقة هو تحديد ما إذا كان توزيع بيانات العينة- بعد تصنيف هذه البيانات في عدد من الفئات- يطابق التوزيع المحدد في الفرض العدمي أم لا. وقدمنا أيضا المدخل البياني الذي يلقي الضوء على هذه المسألة. وأوضحنا أن إختبار جودة المطابقة هو تعميم للاختبار المذكور في الجزء (٦-٥) المتعلق بالاستدلال على نسبة مجتمع واحد. ويعتمد هذا الأختبار على التوزيع المتعدد الحدود، الذي هو امتداد لتوزيع ذو الحدين. وفي ظل شروط معينة يمكن تقريب توزيع المعاينة لإحصاء إختبار جودة المطابقة إلى توزيع كا^2.

ثانيا، قدمنا إختبار لتحليل جداول الاقتران في إتجاهين. وهدفها هو تحديد ما إذا كان المتغيرين الذين لهم نتائج مدونة في الفئات يمكن اعتبارهما مستقلان أى غير مرتبطان. ويستخدم التحليل الإستدلالي لجداول الاقتران في إتجاهين مفهوم جودة المطابقة عن طريق مقارنة التكرارات المشاهدة مع مثيلاتها المتوقعة إذا كان المتغيران مستقلان.

وأخيراً، قدمنا الرسم البياني للإحتمال الطبيعي وإختبار ليليفورس، وهما طريقتان متكاملتان لبعضهم البعض للحكم على ما إذا كان توزيع المجتمع أو العملية، المأخوذة منه العينة، يتبع التوزيع الطبيعي أم لا. ويعتبر إفتراض التوزيع الطبيعي أو إفتراض الاعتدالية العنصر الرئيسي في العديد من الطرق المقدمة في الفصول من 6 إلى 10.

المراجـــع : Refernces

1-B.W.Lindgren. *Ststistical Theory* , 3 rd ed .New York: Macmillan, 1967

2. J. Neter , W. Wassermann and G .Whitmore . *Applid Statistics,* 3ed ed.Boston :Allyn and Bacon 1988.

تمارين إضافية :

(١٤-٢٣) اعتماداً على سجلات محل لبيع الملابس (بوتيك)، يتم بيع 50% من الفساتين التي اشتراها المحل لمواجهة الطلب في فصل ما بسعر التجزئة كاملا. ويتم بيع 25% من الفساتين بعد تخفيض 20% من السعر، ويتم بيع 15% من الفساتين بعد تخفيض 40% من السعر، ويتم بيع الفساتين المتبقية بتخفيض 60% من السعر. وبالنسبة للفصل الجاري، تم شراء 300 فستان ويتم بيعهم كالتالي :

السعر كاملا	تخفيض 20%	تخفيض 25%	تخفيض 60%
140	90	30	40

بإستخدام كل من التحليل البياني والإستدلالي، حدد ما إذا كانت البيانات توضح أن توزيع المبيعات لهذا الفصل يختلف عن الفصل السابق وذلك بخلاف التغير العشوائي.

(١٤-٢٤) في مستشفى كبيرة، كانت الأعداد المشاهدة للمواليد في كل شهر في عام معين هي كالتالي :

يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيه	يوليه	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
95	105	95	105	90	95	105	110	105	100	95	100

بإستخدام التحليل الإستدلالي والبياني، حدد ما إذا كان توزيع المواليد على مدى 12 شهر ليس توزيعاً منتظماً.

(١٤-٢٥) يدعي صاحب مصنع أن عملية ما تنتج 5% وحدات معيبة. أشترى بائع كبير بطريقة عشوائية 100 وحدة ووجد بها 10 وحدات معيبة:

(أ) استخدم إختبار كا^{٢} لجودة المطابقة لتحديد ما إذا كان هناك سبب كافي لإنكار صحة هذا الإدعاء.

(ب) استخدم الطريقة الإستدلالية التي تم مناقشتها في الجزء(٦-٥) لإختبار الفرض العدمي القائل بأن نسبة الوحدات المعيبة هي 05. قارن إجابتك بالإجابة التي حصلت عليها في الجزء (أ).

(ج) هل يوجد علاقة بين قيمة إحصاء الإختبار التي حصلت عليها في الجزء(أ)وقيمة إحصاء الإختبار التي حصلت عليها في الجزء (ب) ؟ اشرح.

(١٤-٢٦) ترغب منظمة أمن الطرق في تحديد ما إذا كان وقوع حوادث السيارات المميته له علاقة بلون السيارة التي وقعت لها الحادثة. وحصلت المنظمة على عينة عشوائية مكونة من 600 حادثة سيارة حيث يوجد بها حادثة واحدة على الأقل أدت إلى حدوث كارثة، وتم ملاحظة لون السيارة. وقد تم تحديد التصنيف التالي:

أزرق	رمادى	أبيض	أصفر	بنى	أحمر
115	135	80	70	125	75

(أ) استخدم التحليل البياني والإستدلالي لتحديد ما إذا كانت نسب الحوادث التي حدثت للألوان الستة تختلف بأكثر مما يمكن أن يعزى إلى الصدفة.

(ب) هل يوضح تحليلك في الجزء (أ) أن بعض الألوان أكثر أمانا في القيادة من الألوان الأخرى؟ (فكر بحرص، هذه النتيجة هي مغرية ولكنها قد تكون غير صحيحة).

(١٤-٢٧) في دراسة طبية استمرت 20 عاما متصلة، لتحديد- بين أشياء أخرى - ما إذا كان من الممكن أن تؤثر عادات التدخين على الإصابة بمرض القلب. وقد أصيب 160 رجل بمرض القلب خلال هذه المدة. وقد تم تصنيف هؤلاء كالتالي: مدخنين بشدة، مدخنين متوسطين، مدخنين معتدلين، غير مدخنين. والأعداد المشاهدة للرجال في كل فئة معطاة في الجدول التالي:

غير مدخن	مدخن معتدل	مدخن متوسط	مدخن بشدة
12	36	54	58

(أ) استخدم التحليل البياني والإستدلالي لتحديد ما إذا كان يمكن إنكار صحة الإدعاء القائل بأن النسب في هذه الفئات متساوية.

(ب) هل يوضح تحليلك في الجزء (أ) أن الإصابة بمرض القلب له علاقة بدرجة التدخين؟ إذا كان لا، فماذا نحتاج من معلومات للإجابة على هذا السؤال؟

(١٤-٢٨) في عملية إنتاجية ما، تم أخذ عينة عشوائية مكونة من 100 وحدة من الإنتاج اليومي وقد تم فحصها لمعرفة عدد الوحدات المعيبة. وقد تم ملاحظة عدد الوحدات المعيبة في خمسة أيام عمل من أسبوع معين وكانت كالتالي:

الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
12	7	6	5	10

استخدم التحليل البياني والإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان يمكن إنكار صحة الإدعاء القائل بأن هذه العملية تنتج نسب يومية متساوية من الوحدات المعيبة.

(١٤-٢٩) مجاميع الصفوف والأعمدة في جدول الاقتران في إتجاهين هي كالتالي:

				10
				12
				15
8	14	10	5	37

بإفتراض الاستقلالية، حدد جدول التكرارات المتوقعة.

(١٤-٣٠) في تمرين (٢-٧٨)، عينة عشوائية مكونة من 135 عطل مأخوذة من مرحلة إنتاج مستقرة حيث تستخدم أربع آلات. صنفت هذه الأعطال وفقا للآلة والوردية التي حدث بها العطل. وقد تم اعادة عرض البيانات هنا كالتالي:

الوردية	الآلة			
	A	B	C	D
1	10	12	8	14
2	15	8	13	8
3	12	9	14	12

استخدم الطريقة البيانية والإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان هناك علاقة بين الوردية التي حدث فيها العطل والآلة التي حدث عنها العطل. فإذا استنتجت علاقة، صف هذه العلاقة.

(١٤-٣١) في تمرين (٢-٨٣) تم إدارة مسح عشوائي شامل للمواطنين لتحديد ما إذا كان هناك علاقة بين الانتماء إلى حزب معين والرأى بشأن تملك الأسلحة الشخصية. وقد تم إعادة البيانات في الجدول التالي. استخدم التحليل البياني والإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان يمكن إنكار صحة الإدعاء القائل بأن هناك أستقلالية بين الرأي والحزب المنضم عن طريق تلك البيانات. وإذا تم إنكار صحة الإدعاء، صف العلاقة التي ظهرت.

	مؤيد	معارض	محايد
ديمقراطي	110	64	26
جمهوري	90	116	14
مستقل	55	35	10

(١٤-٣٢) في تمرين(٢-٨٥)، تم تصنيف عينة عشوائية من حديثي التخرج بكلية ما وفقا لسمتين: هما متوسط نقطة التقدير، SAT score. وقد تم اعادة البيانات بالجدول التالي. استخدم التحليل البياني والاستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان يمكن إنكار صحة الإدعاء القائل بأن هناك إستقلالية بين SAT score ومتوسط نقطة التقدير. وإذا تم إنكار الإدعاء صف العلاقة التي ظهرت.

SAT score

GPA متوسط نقطة التقدير	901–1100	1101–1300	1301–1500
> 3.5	50	65	38
3.0–3.5	78	72	42
2.5–3.0	97	80	25
2.0–2.5	105	25	18

(١٤-٣٣) في تمرين (٢-٧٧) تم تصنيف عينة عشوائية مكونة من 300 حادثة سيارة وفقاً لحجم السيارة ونتيجة الحادث (ما إذا كان هناك ضحايا من عدمه). وقد تم إعادة البيانات في الجدول التالي. استخدم التحليل البياني والاستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان يمكن إنكار صحة الإدعاء القائل بأن هناك استقلالية بين حجم السيارة ونتيجة الحادث. وإذا تم إنكار صحة الإدعاء، صف العلاقة التي ظهرت.

النتيجة	صغيرة	متوسطة	كبيرة
وجود ضحية واحدة على الأقل	42	35	20
لا يوجد ضحايا	78	65	60

(١٤-٣٤) تم إدارة مسح شامل لتحديد ما إذا كانت تختلف تفضيلات المستهلكين لثلاثة أصناف متنافسة - الأصناف C , B , A- بإختلاف المنطقة الجغرافية للمستهلك. وقد تم الحصول على المعلومات التالية من عينة عشوائية للمستهلكين من ثلاثة مناطق مختلفة. استخدم التحليل البياني والإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان يمكن إنكار صحة الإدعاء القائل بأن هناك استقلالية بين الصنف المفضل والمنطقة الجغرافية. وإذا كان كذلك، صف كيف تعتمد تفضيلات المستهلكين على المنطقة الجغرافية.

	منطقة 1	منطقة 2	منطقة 3
الصنف A	40	52	25
الصنف B	52	70	35
الصنف C	68	78	60

(١٤-٣٥) في تمرين (٦-٥٠)، تم اجراء الإستدلال الإحصائي لتباين أوزان 18 عبوة مملوءة بمشروب غير مسكر. يتطلب تحليل كا^{2} افترض أن توزيع مجتمع الأوزان هو التوزيع الطبيعي. وقد تم اعادة بيانات العينة في الجدول التالي. إرسم الشكل البياني للإحتمال الطبيعي وطبق إختبار ليليفورس لتحديد صحة إفتراض الاعتدالية.

أوزان العبوات المملوءة بمشروب غير مسكر					
11.84	11.98	11.91	11.75	12.06	11.83
11.95	11.86	11.97	12	11.96	11.96
11.95	11.86	11.03	11.82	11.85	11.95

(١٤-٣٦) بالإشارة إلى تمرين (١٤-٢٦). لا تقدم هذه الدراسة معلومات كافية لتحديد ما إذا كان ألوان بعض السيارات أكثر أمانا للقيادة عن الآخرى. فإذا كان اللون لا يمثل عاملاً، فإنه ليس بالضرورة ان يكون توزيع الحوادث الناتج عنها ضحايا للستة ألوان هو التوزيع المنتظم؛ ويمكن أن يعكس توزيع ألوان السيارات مجتمع القيادة. الجدول المرافق هو جدول الاقتران الذي يوضح نسب السيارات التي يحدث لها حوادث ينجم عنها ضحايا والتي لا يحدث لها حوادث في عام معين وفقا للون السيارة وذلك لعينة مكونة من 20000 سيارة. استخدم الطرق البيانية والإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان هناك علاقة بين اللون والحوادث التي ينجم عنها ضحايا.

	أحمر	بنى	أصفر	أبيض	رمادى	أزرق	المجموع
حادثة	**16**	**13**	**5**	**18**	**77**	**18**	**147**
لا يوجد حادثة	**3,528**	**787**	**682**	**5,012**	**8,493**	**1,351**	**19,853**
المجموع	**3,544**	**800**	**687**	**5,030**	**8,570**	**1,369**	**20,000**

(١٤-٣٧) في تمرين (٧-٥٦)، تم إجراء الإستدلال الإحصائي لمتوسط تكلفة الإصلاح لنوعين من السيارات. وقد تم إعادة البيانات في الجدول التالي. إرسم الشكل البياني للإحتمال الطبيعي وطبق إختبار ليليفورس لتقييم فرض الاعتدالية المطلوب عن طريق إختبار T المستخدم في تمرين (٧-٥٦).

النوع X	النوع Y
88	339
221	101
149	189
44	181
310	244
720	388
121	199
310	479

دراسة حالة عملية (١٤-١): تحليل لقضايا تتضمن اختيار أسلوب التصنيع:

يمكن لأصحاب المصانع (أو المنتجون) أن يختاروا ما بين أسلوب الانتاج في شكل دفعات انتاج متغيرة أو منتجات متغيرة وأسلوب الانتاج المستمر. وهذا الاختيار له أهمية سواء للعمل أو أداء الشركة أو المؤسسة. ويكون هذا التأثير جيد عندما تتلائم أساليب التصنيع مع أهداف الشركة ومتطلبات السوق. فعلى سبيل المثال، نجد أن معظم مصانع السيارات تفضل أن تكون عمليات خطوط التجميع للسيارات مستمر، وخصوصاً تلك المصانع أو المنتجين الذين يقومون بإنتاج عدد صغير من الأنواع المنتجة ويريدون الوصول إلى الحجم الاقتصادي المناسب. ومن ناحية أخرى نجد أن المنتجين الذين يفضلون أن تكون منتجاتهم متعددة ومتغيرة ومرنة، لابد لهم من استخدام أسلوب في الانتاج يمكنهم من تكرار المنتج الجديد ويمكنهم من التحول والتغير إلى ذلك المنتج الجديد. وقد قام إليوت مينور Elliott Minor[1] بدراسة البيانات المأخوذة من مسح شامل كبير عن أصحاب المصانع لتحديد ما إذا كان إختيارهم للعمليات متسق مع ما تقتضيه أدبيات إستراتيجية التصنيع، وقد تم بدء الدراسة بالشك بأن التغيرات السريعة في البيئة التنافسية تتعدى مقدرة أصحاب المصانع لتكييف عملياتهم بطريقة مناسبة.

ولقد تم جمع البيانات نتيجة للمسح الشامل الذي أدارته الجمعية الدولية للمحاسبين، وقد تم وصف البيانات عن طريق Howell, Brown, Soucy and Seed[2] وقد كان هدف المسح الشامل هو تقييم المحاسبة الإدارية في مواجهة تغيرات بيئة التصنيع. وقد تكونت العينة من 61 مستجوب عرفوا أنفسهم بأنهم مع إستخدام نظام الانتاج المستمر للطلبيات فقط، 92 يفضلون استخدام الأسلوب المتكرر

(1) Minor, E.D., Manufacturing process choice: An Empirical Analysis of Relevant IS sues. Working paper, Virginia commonwealth University.

(2) Howell R.A., J. D. Brown, S.R. Soucy and A.H. seed. Management accounting in the new manufacturing Environment. National Association of accountant, Montvale, NI, 1987.

أو الانتاج المتغير فقط، 44 يستخدمون أكثر من أسلوب إنتاج في التحليل. وقد تم إعطاء الأسئلة والتي لها صلة وثيقة بالموضوع والمأخوذة من المسح الشامل في نهاية وصف هذه الحالة.

ويمكن أن تقوم بعمل تحليل إحصائي بحيث يكون الاهتمام الأول فيه للعلاقات المحتملة بين المتغيرات في هذه الدراسة. ومن العلاقات المحتملة التي لها أهمية هنا هي تلك العلاقة بين نوع العملية المستخدم في التصنيع وأحد النقاط التالية (١) الحجم (حجم الانتاج)، (٢) عدد أنواع المنتجات، (٣) السلع المنتجة للتخزين أو للطلبيات. بالاضافة إلى ذلك فانه يكون من الأهمية بمكان معرفة العلاقة بين نوع عملية التشغيل وتوزيع تكلفة التصنيع على المواد، العمل المباشر والمصروفات الاضافية. أيضاً يمكنك استخدام اختيارات مناسبة للاستدلال الأحصائي والتي يمكن من خلالها إثبات وجود العلاقة والارتباط المقترح، كذلك يمكنك تقديم ما تصل إليه من استنتاجات من شأنها توضيح بيئة التصنيع.

وتوجد البيانات الخاصة بهذه الحالة الدراسية على القرص المرن المرفق بالكتاب في الملف والذي إسمه CASE 1401، وتتكون البيانات من 197 مشاهدة (صف)، وكل صف يمثل بيانات شخص من الأشخاص الذين تم استجوابهم. وكل عمود يمثل متغير. والمتغيرات هي C1 وتمثل نوع الأسلوب (١- محل الأعمال job shop، ٢ - حالة الانتاج المتكرر repetitvie، ٣- الانتاج المستمر continu-ous)، C2 عبارة عن حجم الوحدة Vnit valume (١- مرتفع high، ٢- منخفض low)، C3 عبارة عن عدد أنواع المنتج nunaber of product type (١- كثير many، ٢- قليل low)، C4 عبارة عن الانتاج بغرض التخزين تلبية الطلبيات make to stocke/to order (١- للمخازن to stocke، ٢- لتلبية الطلبيات to order)، C5 عبارة عن تخصيص نسبة التكاليف للمواد الخام، C6 عبارة عن تخصيص نسبة التكاليف من العمالة المباشرة، C7 عبارة عن تخصيص نسبة التكاليف من التكاليف العامة.

ملحق ١٤ : Appendix -14

تعليمات الحاسب الآلي لتحليل جداول الاقتران في اتجاهين (جزء ١٤-٣):

يمكن أن يكون مثال (١٤-٣) كتوضيح التعليمات لإستخدام البرنامج الإحصائي Minitab أو البرنامج الإحصائي SAS.

البرنامج الإحصائي Minitab

يستخدم أمر CHISQUARE لإنتاج مخرجات Minitab وذلك لتحليل جدول الاقتران في إتجاهين الموضح في جدول (١٤-٦). فيمكن أن تدخل التكرارات المشاهدة "انظر جدول (١٤-٥)" مباشرة في Data Window، أويمكن أن تستخدم أمر READ لإدخال التكرارات في شكل أعمدة (حيث التكرارات الخاصة بمؤيد، معارض ومحايد) وذلك في أعمدة Minitab (C1, C2 and C3) على التوالي.

ففي مثال (١٤-٣)، تعطي التعليمات التالية مخرجات الحاسب الآلي المماثلة كتلك المعطاة في جدول(١٤-٦).

```
MTB > read C1 C2 C3
DATA > 38  29 9
DATA > 30   42   7
DATA > 32  59   4
DATA > end
MTB > chi-square C1 , C2 , C3
```

البرنامج الإحصائي SAS

ومرة أخرى يجب أن تستخدم العبارات (DATA, INPUT and CARDS) وكما في التطبيقات SAS السابقة، تستخدم عبارة INPUT لتعريف الصفوف (الأسهم)، الأعمدة (الرأي) والتكرارات المشاهدة (التكرار frequncy)، بهذا الترتيب . لاحظ أن الاسم المختصر "Frequncy" يستخدم حتى لا تتعدى عدد الأحرف ثمانية حروف. وأسهل طريقة لإدخال التكرارات المشاهدة في الحاسب الآلي هو إستخدام الأرقام (1.2 or 3) لتوضيح عدد الأسهم، وأحد نفس هذه الأرقام (1,2 or 3) لتوضيح الرأي، ومن ثم التكرار المشاهد. ولكن قد يوجد تكرار مشاهد واحد في سطر، لذلك فإنك تثبت عدد الأسهم حتى يتم استنفاذ الآراء الثلاثة. ومن ثم نغير عدد الأسهم ونكرر هذه العملية، وتستمر هذه العملية حتى يتم إدخال كل التكرارات المشاهدة في الحاسب الآلي.

وسوف ينتج عن الأمر PROC FREQ جدول تحليل الاقتران في إتجاهين. وتوجد عبارتين تتبع PROC FREQ على سطرين منفصلين. عبارة TABLES تحتوى على أسماء الصفوف والأعمدة المعطاة في عبارة " INPUT " ملحقة بعلامة نجمية (share* opinion) . وبعد ذلك يوجد علامة فاصلة(/)متبوعة بأختيارات EXPECTED CELLCHI2 CHISQ NOPERENT NOROW and NOCOL . ويعطي الإختيار الأول(EXPECTED) التكرارات المتوقعة لكل مجموعة مكونة من صف - عمود؛ ويعطي الإختيار الثاني (CELLCHI2) مساهمة الصف والعمود لقيمة إحصاء إختبار كا٢، ويحسب الإختيار الثالث (CHISQ) قيمة إحصاء إختبار كا٢. وتمنع الثلاث إختيارات الأخيرة

(NOPERENT NOROW and NOCOL.) حساب النسبة المئوية للصفوف والأعمدة- شئ ما قد لا يكون ملائم لهذا التحليل. وتكرر عبارة (WEIGHT) الاسم المعطى للتكرارات المشاهدة في عبارة INPUT (Frequncy).

في مثال(١٤-٣)، سوف تنتج التعليمات التالية- مع المعلومات الأخرى التي تحتاجها فلا تقلق بشأنها- جدول في إتجاهين الذي يتكون من التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة، مساهمة الصف- العمود في قيمة إحصاء الإختبار، وقيمة إحصاء إختبار كا٢ (10.796)، ودرجات الحرية (DF=4) وقيمة P (0.029).

-تعليمات SAS ومخرجات الحاسب الآلي لمثال (١٤-٣) :

```
DATA :
INPUT SHARES OPINION FREQUNCY,
CARDS :
1    1    38
1    2    29
1    3    9
2    1    30
2    2    42
2    3    7
3    1    32
3    2    59
3    3     4
PROC FRE
```

```
TABLES SHARES*OPINION/EXPECTED CLLCHI2
CHISQ NOPERCENT NOPOW
NOCOLE ;
WEIGHT FREQUNCY
```

TABLE OF SHARES BY OPINION

SHARES — OPINION

Frequency / Expected / Cell Chi-Square	1	2	3	Total
1	38	29	9	76
	30.4	39.52	6.08	
	1.9	2.8004	1.4024	
2	30	42	7	79
	31.6	41.08	6.32	
	0.081	0.0206	0.0732	
3	32	59	4	95
	38	49.4	7.6	
	0.9474	1.8656	1.7053	
Total	100	130	20	250

STATISTICS FOR TABLE OF SHARES BY OPINION

Statistic	DF	Value	Prob
Chi-Square	4	10.796	0.029
Likelihood Ratio Chi-Square	4	11.063	0.026
Mantel-Haenszel Chi-Square	1	0.780	0.377
Phi Coefficient		0.208	
Contingency Coefficient		0.203	
Cramer's V		0.147	

Sample Size = 250

الفصل الخامس عشر

الطـــــرق اللامعلـمــية

Nonparametric Methods

محتويات الفصل:



الفصل الخامس عشر

الطـــــرق اللامعلمـــية

Nonparametric Methods

(١٥-١) نظرة عامة على محتويات الفصل: Bridging To New Topics

تتسم طرق الإستدلال الإحصائي التي نوقشت سابقاً بسمة واضحة ومشتركة وهي إعتماد هذه الطرق على إفتراض معلومية التوزيع الأصلي للمجتمع أو العملية. وبناء على هذا الإفتراض يكون من السهل تحديد توزيع المعاينة لإحصاء الإختبار التي يعتمد عليها الإستدلال الإحصائي. فعلى سبيل المثال، يعتمد إحصاء T المستخدم في الفصول ٦، ٧، ٩، ١٠ على إفتراض أنه تم إختيار العينات من مجتمعات أو عمليات تتبع التوزيع الطبيعي، كذلك تعتمد إحصاءة الإختبار F المستخدمة في الفصول (٧-١٠) على نفس الإفتراض السابق. كل الإختبارات الاستدلالية- التي نوقشت سابقاً- تمثل تقييما احصائياً لمعلمات التوزيع محل الإهتمام(مثل الوسط الحسابي أو التباين أو النسبة). حيث نفترض معلومية نوع التوزيع وتكون المهمة عندئذ هي التوصل إلى إستنتاج (تقدير) لمعلمات التوزيع. ولهذا السبب تعرف مثل هذه الإستدلالات بالطرق المعلمية **Parametric Methods**.

عندما تكون أحجام العينات كبيرة نسبياً، فإن أغلب الطرق المعلمية التي قدمناها، تعتبر تقريب جيد حتى إذا أختلف التوزيع الأصلي عن التوزيع المفترض. والإستثناء الرئيسي هنا هو الإستدلال الخاص بالتباينات. أما في العينات الصغيرة الحجم، فبصفة عامة تكون الطرق المعلمية حساسة بالنسبة فرض الاعتدالية "**Normality**". فإذا كانت الطرق غير صحيحة، فيمكن أن تعطى نتائج تقريبية غير صحيحة. وبالإضافة إلى ذلك، فإن استخدام الطرق المعلمية بصفة عامة يكون قاصراً على العينة المقاسة إما بفترة أو نسبة (**interval or ratio scaled**). لذلك فهي تقيس حجم أو عدد الأشياء، مثل حجم المبيعات الأسبوعي، حجم المادة المسكوبة داخل الحاوية، طول الفترة الزمنية اللازمة لإتمام المعاملة المصرفية، وهكذا.

وهدف هذا الفصل هو تقديم الإختبارات الإستدلالية التي :(1) لا تتقيد بفرض معلومية التوزيع الأصلي للمجتمع. (2) لاتشترط ضرورة أن تكون مشاهدات العينة مقاسة بفترة أو نسبة. وتعرف هذه الإختبارات بالطرق الامعلمية **Nonparametric Methods**. ونظرا لأن هذه الطرق لا تتطلب أن يكون توزيع المجتمع أو العملية معلوم، فيطلق عليها أيضاً طـــرق التوزيعات الحرة (**free distributions**). وبصفة عامة، تعتمد الطرق اللامعلمية على بيانات العينة المرتبة: حيث يتم تحويل بيانات العينة إلى ترتيبات أو رتب نسبية. وبناء على ذلك، فهي مفيدة بصفة خاصة لأغراض دراسة الحالات، مثل دراسة الأنواع المفضلة، حيث تكون بيانات العينة موضوعة في ترتيب منتظم (مثل الإختيار الأول، الإختيار الثاني، وهكذا).

وقد ظهرت طرق لامعلمية عديدة، متضمنة طرق تحليل التباين اللامعلمي، والإنحدار اللامعلمي. وعملياً، فإن كل طريقة للاستدلال تم تناولها من قبل لها نظير لا معلمي. وتتطلب الطرق اللامعلمية افتراضات أقل من تلك التي تتطلبها نظائرها المعلمية، وبصفة عامة، فإن الطرق اللامعلمية أسهل في الفهم وكذلك في التطبيق عن الطرق المعلمية المناظرة. وهدفنا هنا عرض المفاهيم الأساسية للإحصاء اللامعلمي وتقديم بعض الطرق المفيدة لإجراء ذلك. وبالتحديد، سوف نناقش الإختبارات اللامعلمية التي يمكن إستخدامها كبدائل للطرق المعلمية التي تم تقديمها سابقا، متضمنة: (1) إختبار T للمقارنة بين متوسطي مجتمعين بالإعتماد على العينات المستقلة والعينات ذات القراءات المزدوجة (الجزء ٧-٣، ٧-٤). (2) إختبار تحليل التباين للمقارنة بين متوسطات مجتمعات عديدة بالإعتماد على العينات المستقلة والعينات المختارة في قطاعات "الجزء (٨-٢)، (٨-٣)". (3) الإرتباط الخطي "الجزء (٩-٧)". وتقدم هذه الإختبارات اللامعلمية وسائل للإستدلال عن المشاكل القابلة للمقارنة عندما يكون فرض الاعتدالية "**Normality**" محل اهتمام حقيقي.

وتكون الطرق اللامعلمية مفيدة بصفة خاصة عندما تتكون مشاهدات العينة الأصلية من رتب **ranks**. أما إذا كانت قياسات العينة معرفة على مقياس فترى أو نسبي وتوزيع المجتمع يقترب من التوزيع الطبيعي، أو إذا كان حجم العينة كبيراً بدرجة كافية، تكون الطرق المعلمية بصفة عامة، أكثر كفاءة من نظائرها اللامعلمية.

(١٥-٢) ترتيب بيانات العينة Ranking Sample Data

تعتمد جميع الطرق اللامعلمية التي سيتم مناقشتها في هذا الفصل على الرتب. فإذا كانت مشاهدات العينة معرفة على أساس مقياس فتري أو نسبي، فيجب أن يتم تحويلها إلى رتب **ranks** قبل بدء التحليل.

ولوضع مشاهدات العينة في رتب والتي هي أساساً مقاسة بالفترات أو النسب، يجب أولا ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً. فإذا كان لدينا n مشاهدة، فأنه يتم تخصيص الترتيب رقم(1) للمشاهدة ذات أقل قيمة، والترتيب رقم (2) للمشاهدة التالية في الصغر، ويتم الإستمرار في ذلك حتى يتم إسناد الترتيب رقم (n) للمشاهدة ذات أكبر قيمة. فعلى سبيل المثال، إفترض أن البيانات التالية تمثل الأجور المدفوعة في الساعة لعينة عشوائية مكونة من عشرة من ميكانيكي السيارات في منطقة حضرية كبيرة: مع ملاحظة أن المبالغ بالدولار ,14.65, 13.85,12.20, 14.80, 14.35, 12.45, 16.20 14.50, 13.20 , 15.25 . ولتحديد الرتب لهذه المشاهدات، نقوم أولا بترتيب هذه المشاهدات من الأصغر إلى الأكبر ومن ثم نحدد الرتب من (1) إلى (10) كالتالي :

المشاهدات المرتبة	$ 12.20	12.45	13.20	13.85	14.35
الترتيب	1	2	3	4	5
المشاهدات المرتبة	$ 14.50	14.65	14.80	15.25	16.20
الترتيب	6	7	8	9	10

وقد يوجد في البيانات مشاهدتين أو أكثر لهم نفس القيمة، ويمكن حل هذه المشكلة بإستخدام طريقة متوسط الترتيب **midrank method**، حيث يتم تحديد الترتيب للمشاهدات المتساوية (ذات نفس القيمة) **Tied Observation** بأخذ متوسط ترتيب هذه المشاهدات في ترتيبها المتتالي. فعلى سبيل المثال، إفترض أن عينة تتكون من سبعة قيم مرتبة هي: 2.1 , 3.8 , 4.4 ,4.4 ,5.6 ,7.9 ,11.4 لاحظ أن قيم المشاهدات الثالثة والرابعة متماثلة. ونظراً لأن هذه المشاهدات تحتل الترتيب الثالث والرابع في الترتيب المتتالي، فتكون الرتبة الخاصة بكل منهم هي 3.5، وهي متوسط الترتيبين الثالث والرابع.

مثال (١٥-١)

البيانات التالية عينة من درجات أحد الإمتحانات لعدد (n=12) طالب في قسم الإحصاء وهي: 75,88,53,65,55,94,88,96,88,75 ,72,82. ضع هذه الدرجات على شكل رتب.

الحل

الجدول التالي يوضح ترتيب الدرجات والرتب الخاصة بها

الدرجات المرتبة	53	55	65	72	75	75	82	88	88	88	94	96
الرتب	1	2	3	4	5.5	5.5	7	9	9	9	11	12

لاحظ أنه في المتتالية المرتبة، تحتل الدرجتان اللتان لهما القيمة 75 الترتيب الخامس والسادس؛ لذلك فإن رتب كل منهم هي 5.5، وهو متوسط العددين5، 6 . وبالمثل، تحتل الدرجات الثلاث ذات القيمة (88) الترتيب الثامن، والتاسع، والعاشر في المتتالية المرتبة؛لذلك فإن رتبة كل منهم هي9، وهي متوسط الثلاثة أعداد 10,9,8 .

عندما يتم وضع البيانات في رتب، يمكنك إختبار النتائج التي توصلت إليها بإستخدام الحقيقة القائلة بأن مجموع الأعداد الصحيحة من1 إلىn يمكن إيجاده كالتالي:

$$1 + 2 + 3 + \dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(15.1)}$$

فعلى سبيل المثال، عندما نضع (n=12) مشاهدة في رتب، فيلزم أن يكون مجموع الرتب (غالبا ما يسمى**rank sum**) هو{12(12+1)/2=78}. ويلزم أن يكون مجموع الرتب 78 حتى إذا تواجدت مشاهدات متعادلة (متساوية) ولتوضيح ذلك بالنظر إلى مجموع الرتب في مثال (١٥-١) نجد أنه يساوي:

$$1+2+3+4+5.5+5.5+7+9+9+9+11+12=78$$

(١٥-٣) الإختبارات اللامعلمية للمقارنة بين مجتمعين أو عمليتين:

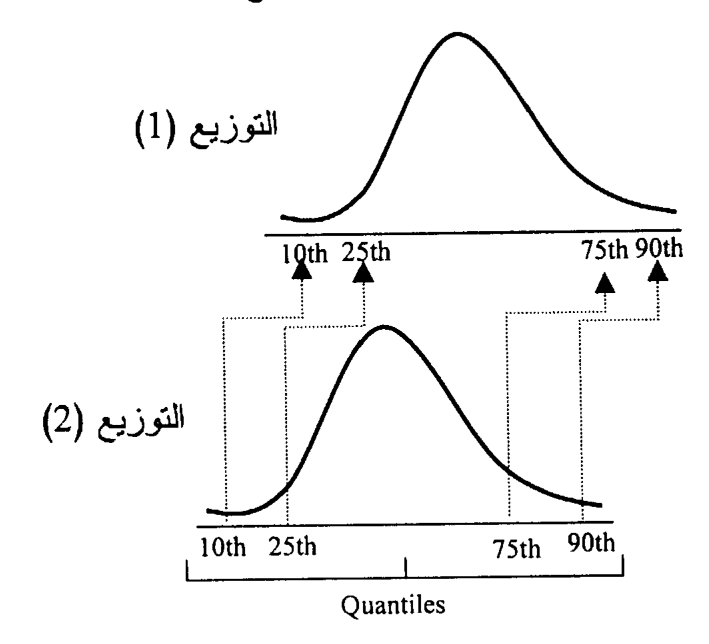
Nonparametric Procedures for Comparing Two Populations or Processes

في الجزء (٧-٣)، تم مناقشة إختبار T التجميعي لمقارنة متوسطي مجتمعين أو عمليتين يتوزعا توزيعاً طبيعياً وذلك بالإعتماد على العينات المستقلة. وفي الجزء (٧-٤) تم مناقشة إختبارT لمقارنة متوسطي مجتمعين أو عمليتين بالإعتماد على العينات ذات القراءات المزدوجة. وفي هذا الجزء، سوف نقدم البدائل اللامعلمية لهذه الإختبارات المعلمية. وتعرف هذه البدائل بإختبار مجموع الرتب لويلكوكسن **Wilcoxon rank sum Test** (العينات المستقلة) وإختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن **Wilcoxon signed rank Test** (للعينات ذات القراءات المزدوجة).

(١٥-٣-١) إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن Wilcoxon rank sum Procedure

يقتفدم إختبار مجموع الرتب لويلكوكقن، الرتب للمقارنة بين مواقع مجتمعين أو عمليتين وذلك بالإعتماد على العينال العشوائية المقتقلة المأخوذة من المجتمعين. (وسوف نرى الآن لماذا نقتفدم مصطلح أكثر تعميما وهو "موقع" "location" بدلاً من التركيز بصفة خاكة على المتوسطال means) وعلى الرغم من أن إفتراض الطبيعية ليس مطلوباً، إلا أنه يتم إفتراض أن توزيع المجتمع أو العملية هو توزيع مقتمر. وكما في إختبار T التجميعي المناقش في الجزء(٧-٣)، يلزم أن يتم إفتراض أن للمجتمعين نفس الشكل ونفس التباين (الأختلاف). وبمعني آخر، فإن طريقة مجموع الرتب لويلكوكقن قادرة فقط على اكتشاف الفروق بين مواقع توزيعي المجتمعين ولكنها غير قادرة على اكتشاف الفروق في الشكل shape أو الإختلاف variation.

ما معنى القول بأن التوزيعين المتفقين في الشكل وفي الإختلاف، بينهم فروق في الموقع؟ التوزيعين المتفقين في الشكل وفي الإختلافال يكون بينهم فرق في الموقع نظراً لإختلاف المتوسط والوسيط الخاص بكل مجتمع. فعلى سبيل المثال، إذا كان أحد التوزيعين لديه وسيط أكبر من الأخر، فإن المتوسط وجميع القيم الجزيئية الأخرى تكون هي أيضاً أكبر من نظائرها في التوزيع الأخر [طالما لم يفتلف كل من الشكل والأختلاف (التباين) لكلاهما]. وبذلك، وكما هو موضح في شكل(١٥-١) تقع القيم الخاكة بالتوزيع (1) وهي 10%، الربيع الأول، الوسيط، الربيع الثالث، 90% من التوزيع، وغيرها تقع أعلى من تلك الخاكة بالتوزيع (2).



شكل رقم (١٥-١)

توضيح إختلاف الموقع بين توزيعين لهم نفس الشكل والأختلاف (التباين)

أدرس المثال التالي. إفترض أن شركة ما تشك في وجود تمييز على أساس الجنس في المرتبال التي يتقاضاها موظفيها. وقد تم إختيار عشر سيدال وثمان رجال عشوائيا من مجتمع موظفين لديهم نفس المقئوليال ونفس خبرة العمل وقد كانت رواتبهم القنوية بآلاف الدولارال كالتالي:

سيدات	23.8	26.5	24.6	29.2	23.2	22.7	24.9	25.6	24.8	28.2
رجال	24.7	27.6	28.4	30.0	29.4	29.9	30.5	29.6		

هل توضح هذه البيانات وبإقناع أن هذه العينات العشوائية مأخوذة من مجتمعات لها توزيعات مختلفة في الموقع ؟

ونظراً لأننا نفترض أن توزيعي المجتمعين لهم نفس الشكل ونفس التشتت (التباين)، لذلك يمكن صياغة الفرض العدمي والفرض البديل كالتالي:

H_o : توزيعي المجتمعين متماثلين في الموقع

H_a : توزيعي المجتمعين مختلفين في الموقع

ويمكن أيضا أن يكون الفرض البديل ذو جانب واحد. ويوضح الفرض البديل ذو الجانب الواحد أن توزيع أحد المجتمعين يقع إلى اليسار (أقل من) أو إلى اليمين (أكبر من) من توزيع المجتمع الأخر.

ويعتمد إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن على خلط العشرة رواتب السنوية للسيدات مع الثماني رواتب السنوية للرجال كما لو كانت مسحوبة من نفس المجتمع، وهى حالة تكون صحيحة فعلاً إذا كان الفرض العدمي صحيحاً. وهكذا يتم ترتيب مجموعة مكونة من 18 مشاهدة للرواتب ترتيباً تصاعدياً. ومن ثم يخصص ترتيب لكل راتب سنوي في المتتالية المرتبة، حيث يتم البدء بالترتيب رقم 1 (لأقل راتب) والإنتهاء عند الترتيب 18 (أعلى راتب). ويتم ترتيب الرواتب وكذلك الرتب الخاصة بها وفقا للجنس.

الجنس	F	F	F	F	M	F
الراتب	22.7	23.2	23.8	24.6	24.7	24.8
الرتبة	1	2	3	4	5	6
الجنس	F	F	F	M	F	M
الراتب	24.9	25.6	26.5	27.6	28.2	28.4
الرتبة	7	8	9	10	11	12
الجنس	F	M	M	M	M	M
الراتب	29.2	29.4	29.6	29.9	30.0	30.5
الرتبة	13	14	15	16	17	18

إذا كانت العينات العشوائية مأخوذة من مجتمعات لها نفس التوزيع، فمن المتوقع أن تكون الرتب موزعة بانتظام جيد بين العينتين (أو الجنسين). ولكن إذا كانت المواقع مختلفة بدرجة كبيرة، فمن المتوقع أن تكون رتب المشاهدات في كل عينة مجمعة بوضوح مع بعضها البعض عند أحد الأطراف. وبعد فحص ا لرتب الخاصة بهذا المثال، هل تعتقد أنها موزعة داخليا بشكل كافي فيما يتعلق بجنس الموظف لتصبح متسقة مع الفرض العدمي؟ يبدو أن توزيع المرتبات للرجال يقع أعلى من ذلك الخاص بالسيدات، هل يمكن أن تنسب هذه الفروق إلى تغيرات المعاينة العشوائية؟ يحدد إختبار

مجموع الرتب لويلكوكسن بشكل جوهري ، متى تكون المجموعة المشاهدة من الرتب كافية لإنكار صحة الفرض العدمي ، وبذلك فهي تدعم الفرض البديل القائل بأن العينات العشوائية مأخوذة من مجتمعات ذات توزيعات مختلفة في الموقع (**in location**).

ويعتمد إحصاء ويلكوكسن على مجموع الرتب للعينتين. وبدون أي تشويه للصورة العامة، دعنا نرمز لأحجام العينات بالرموز n_1، n_2 حيث تمثل n_1 العينة الأصغر حجماً . وبالطبع، يمكن أن تكون أحجام العينات متساوية. لذلك، بصفة عامة فإن $(n_1 \leq n_2)$. وبالنسبة لهذا المثال، فإن العينة الأصغر حجماً هي $(n_1=8)$ للرجال والعينة الأكبر حجماً هي $(n_2=10)$ للسيدات. لذلك فإن مجموع الرتب لرجال هو:(يعرف مجموع الرتب للرجال بالرمز R_1).

$$R_1 = 5 + 10 + 12 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 107$$

بينما مجموع الرتب للسيدات هو:

$$R_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 13 = 64$$

وأنه لمن المفيد معرفة أنه يمكن الوصول إلى مجموع R_1, R_2 بإستخدام المقدار الجبري التالي:

$$R_1 + R_2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2} \qquad \textbf{(15.2)}$$

وهذا يقدم طريقة جيدة لإختبار العمل الذي قمت به. ففي هذا المثال، الملاحظ ان $(n_1=8)$,$(n_2=10)$ لذلك فإن :

$$R_1 + R_2 = 107 + 64 = \frac{(8+10)(8+10+1)}{2} = 171$$

اذا كان مجموع الرتب R_1 يساوي مجموع الرتب R_2، فإن هذا يرجح وجود إنتشار داخلي كافي للرتب فيما يتعلق بالعينتين العشوائيتين؛ لذلك فلا يمكن لبيانات العينة أن تظهر دليل على إنكار صحة الفرض العدمي. ولكن إذا كان مجموع الرتب مختلف اختلافاً جوهرياً، فإن ذلك يعني تجمع الرتب عند إحدى النهايتين، وبذلك يمكن إنكار صحة الفرض العدمي.

والمقدار الإحصائي لويلكوكسن، المعروف بالرمز R، هو مجموع رتب العينة الأقل حجما. ففي هذا المثال قيمة R هي $(R=R_1=107)$. إذا كانت $(n_1=n_2)$ فإن قيمة الاحصاء R تساوى قيمة R_1 أو R_2. (وتعطي نفس النتيجة في الحالتين). وقد تم تكوين توزيع المعاينة للمقدار الإحصائي R على هيئة قيم جدولية بشكل شامل موضحة في جدول G في الملحق. وشكل جدول G هو نفسه كشكل جدول توزيعT. والقيم الذيلية (**Quantile Values**) المعطاة في الجدول أخذاً في الأعتبار أحجام العينات n_2,n_1 ، توضح المساحة على يسار القيمة الذيلية المعطاة وهي تقريباً نفس القيمة الموجودة في عنوان العمود.

وكما في إختبارات الإستدلال المعلمية، يمكن أن نقرر قبول أو رفض الفرض العدمي بتحديد قيمةP(P-Value) ، وهي إحتمال أن تكون قيمة المقدر الإحصائي لويلكوكسن الجدولية أكبر بكثير(في اتجاه الفرض البديل) من القيمة المحددة بالإعتماد على البيانات المشاهدة. فإذا كانت قيمة P(P-Value) صغيرة بدرجة كافية، نستنتج من ذلك أن البيانات تناقض وتنكر صحة الفرض العدمي وتدعم الفرض البديل.

ففي المثال السابق ، (R=107) والفرض البديل ذو جانبين . لذلك ، فإن قيمة P(P-Value) هي تقريباً ضعف إحتمال أن تتعدى قيمة R الرقم107 وهي

$$P\text{-Value} = 2\,P(R > 107)$$

ومن جدول G حيث $(n_1=8),(n_2=10)$ ، نجد أن: $(P(R > 105)=1-.995) = .005)$ حيث إن القيمة 105 هي أكبر قيمة موجودة في هذا الصف . وبناء على ذلك ، فإن $\{P(R > 107) < .005\}$ وقيمة P(P-Value) أقل من $\{2(.005)=.01\}$. وطبقاً لذلك فإن دليل العينة ينكر بقوة صحة الفرض العدمي . لذلك ، يؤكد إختبار ويلكوكسن الإستنتاج الأولي المعتمد على الفحص المبدئي للبيانات وهو أن مواقع توزيعات المرتبات للرجال والسيدات ليست واحدة .

مثال (١٥-٢)

البيانات التالية هي عينات عشوائية مستقلة لسعر ماركة أو موديل معين للغسالات الكهربية في ثمانية أسواق في Atlanta وستة أسواق في Washington, D.C. . هل تمدنا هذه البيانات بدليل مقنع أن موقع توزيع السعر في Atlanta أقل من موقع توزيع السعر في Washington؟

Atlanta	$525	$460	$480	$515	$500	$470	$510	$490
Washington	$540	$525	$505	$485	$560	$555		

الحـل:

العينة المأخوذة من Washington هي العينة الأصغر حجماً. وبناء على ذلك، نشير إلى Washington على أنها مجتمع 1 وأسواق Atlanta على أنها مجتمع2 . لذلك فإن $\{n_1= 6(\text{Washington})\}$, $\{n_2=8\ (\text{Atlanta})\}$. نخلط $(n_1+n_2=14)$ الأربعة عشرة مشاهدة ونقوم بترتيبهم تصاعديا، ونضعهم في رتب كالتالي :

المدينة	A	A	A	W	A	A	W
السعر	460	470	480	485	490	500	505
الرتبة	1	2	3	4	5	6	7
المدينة	A	A	A	W	W	W	W
السعر	510	515	525	525	540	555	560
الرتبة	8	9	10.5	10.5	12	13	14

ويمكن صياغة الفرض العدمي والفرض البديل كالتالي:

H_o: لا يوجد إختلاف بين توزيعات المجتمعات .

H_a: توزيع السعر في Washington يقع على يمين توزيع السعر في Atlanta .

وعلى الرغم من أننا نرغب في تحديد ما إذا كان توزيع Atlanta يقع على يسار توزيع Washington، فإننا نستخدم هنا الفرض البديل المناظر ذو جانب واحد في إتجاه الحد الأقصى Upper one- Side نظراً لأنه تم وصف أسواق Washington بأنها المجتمع رقم 1. وبأسلوب آخر، إثبات أن

توزيع مجتمع Washington يقع على يمين توزيع مجتمع Atlanta هو نفسة إثبات أن توزيع مجتمع Atlanta يقع على يسار توزيع مجتمع Washington.

ويظهر فحص البيانات المرتبة المخلوطة مع بعضها البعض، يتضح أن أسعار أسواق Atlanta مجمعة أسفل معظم أسعار أسواق Washington، وبذلك فإن هذا يدعم الفرض البديل. ولتحديد ما إذا كان هذا التجميع يمكن أن ينسب إلى المعاينة العشوائية وحدها، نطبق إختبار ويلكوكسن Wilcoxon. مجموع الرتب لأسعار أسواق Washington هو:

$$R_1 = 4 + 7 + 10.5 + 12 + 13 + 14 = 60.5$$

بينما مجموع الرتب لأسعار أسواق Atlnata هو:

$$R_2 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10.5 = 44.5$$

ولإختبار صحة هذه الحسابات، نجد من الصيغة (15.2) أن:

$$(14)(15)/2 = 105 = R_1 + R_2$$

ونظراً لأن العينة المأخوذة من مجتمع أسواق Washington هي العينة الأصغر حجماً، فإن قيمة المقدر الإحصائي لويلكوكسن هو $\{R = R_1 = 60.5\}$. وقيمة P(P-Value) بالنسبة للفرض البديل ذو الجانب الواحد في إتجاه الحد الأعلى هي:

$$P\text{-Value} = P(R > 60.5)$$

ومن جدول G حيث $(n_1=6), (n_2=8)$ نجد أن القيمتين التي تقع بينهم القيمة 60.5 هما 61,58 حيث $\{P(R > 58) = 0.05\}, \{P(R > 61) = 0.025\}$ وبناء على ذلك فإن قيمة P صغيرة بدرجة كافية لإنكار صحة الفرض العدمي. ويبدو بوضوح أن توزيع السعر في أسواق Atlanta في الواقع يقع على يسار توزيع السعر في أسواق Washington.

- إستخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

لتوضيح إستخدام البرنامج الإحصائي Minitab في إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن، دعنا ندرس مخرجات البرنامج الإحصائي Minitab للأمثلة التي تم مناقشتها في هذا الجزء. وهذه المخرجات موضحة في الجدول(١٥-١)، (١٥-٢) والأمر المستخدم في البرنامج الإحصائيMinitab لهذه المخرجات هو MANN-WHITNEY نظرا لأن البرنامج الإحصائي Minitab يجري إختبار مكافئ يعرف بإختبار Mann- Whitney. وبأسلوب أخر، إن إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن في جوهرة هو نفسه إختبار Mann- Whitney. وفي أمر MANN-WHITNEY، يتم وضع العمود الأول الذي يحتوي على بيانات العينة الأصغر حجماً للمحافظة على الإتساق في العرض.

لاحظ من المخرجات (النتائج) في جدول(١٥-١)، (١٥-٢) أن قيم المقدرات الإحصائية متساوية مع تلك التي قمنا بتحديدها (W = 107.0, W = 60.5). نفس الحال بالنسبة لقيم P -Value (P-Value=.0067 and P-Value=.0264) ويعطي البرنامج الإحصائي Minitab معلومات إضافية مثل

القيم الوسيطية للعينات وفترة الثقة بين وسيطي المجتمعين. ويستخدم البرنامج الإحصائي Minitab الرمز "ETA" للإشارة إلى وسيط المجتمع.

وقد تلاحظ من جدول G أن القيم الجدولية Quantile Values معطاة فقط لأحجام العينات أقل من (10). وماذا نفعل إذا كانت أحجام العينات n_1, n_2 اكبر من (10)؟ إذاكانت $(n_1 > 10), (n_2 > 10)$ فيتم تقريب توزيع المعاينة للمقدر الإحصائي لويلكوكسن R إلى التوزيع الطبيعي. وفي الماضي كانت الميزة المبدئية لإستخدام التقريب للتوزيع الطبيعي هو تجنب ضرورة وجود جداول كبيرة يتطلبها تنفيذ إختبار ويلكوكسن لجميع أحجام العينات التي من الممكن أن تنشأ. وقد أصبح الوصول إلى الحسابات الإحصائية أكثر شمولية، وبالتالي تلاشت الحاجة إلى ذلك.

جدول (١٥-١)

مخرجات البرنامج الإحصائي Minitab لمثال (الراتب- الجنس)

```
Mann-Whitney Confidence Interval and Test

C1         N =      8     Median =    29.500
C2         N =     10     Median =    24.850
Point estimate for ETA1-ETA2 is       -3.900
95.4 pct c.i. for ETA1-ETA2 is (-5.601, -1.200)
W = 107.0
Test of ETA1 = ETA2 vs. ETA1 n.e. ETA2 is significant at 0.0067
```

جدول (١٥-٢)

مخرجات البرنامج الاحصائي Minitab لمثال (السعر -المدينة)

```
Mann-Whitney Confidence Interval and Test

C1         N =      6     Median =    532.50
C2         N =      8     Median =    495.00
Point estimate for ETA1-ETA2 is        35.00
95.5 pct c.i. for ETA1-ETA2 is (0.01, 70.01)
W = 60.5
Test of ETA1 = ETA2 vs. ETA1 g.t. ETA2 is significant at 0.0264
The test is significant at 0.0263 (adjusted for ties)
```

(١٥-٣-٢) إختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن Wilcoxon signed Rank Procedure

سوف نناقش في هذا الجزء طريقة الإشارة والرتبة لويلكوكسن وهو بديل لامعلمي لإختبار T المعلمي للعينات ذات القراءات المزدوجة (الجزء ٧-٤). وكما في إختبار ويلكوكسن للعينات المستقلة، فقد تم تصميم طريقة الإشارة والرتبة لإكتشاف الفروق في مواقع المجتمعين.

ولتوضيح هذا الإختبار ، ادرس المثال التالي . إفترض أنه تم إختيار 11 طالب عشوائياً من قسم كبير للإحصاء . وقد كانت درجاتهم في امتحانين متتاليين كالتالي:

الطالب	امتحان 1	امتحان 2
1	94	85
2	78	65
3	89	92
4	62	56
5	49	52
6	74	78
7	80	79
8	82	84
9	62	48
10	83	71
11	79	82

هل تقدم هذه البيانات دليل مقنع على أن متوسط درجات المجتمع في الإمتحان الأول أعلى من ذلك الخاص بالإمتحان الثاني ؟

الإختلاف الأساسي بين هذا المثال وتلك الأمثلة الخاصة بإختبار مجموع الرتب لويلكوكسن هو أن العينتين في هذه الحالة غير مستقلتين . حيث تعتمد درجات الامتحانين لأي طالب على قدراته ability level. وكما في الفصل السابع ، يمكن أن نستبعد أثر الاختلاف بين الطلبة بإستخدام بيانات العينة ذات القراءات المزدوجة لكل طالب . وهذا يسمح بالمقارنة بين الأختبارين ، غير متأثرين بالأختلافات بين الطلبة .

ولإجراء إختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن ، نقوم بتحديد الفروق بين كل زوج من درجات الامتحانين (n=11). وبعد ذلك نقوم بترتيب هذه الفروق بدون الأخذ في الإعتبار الإشارة ترتيبا تصاعديا . حيث توضع أصغر قيمة مطلقة للفروق في الترتيب 1 وتوضع أكبر قيمة مطلقة للفروق في الترتيب 11. وأخيراً يتم إلحاق إشارة كل فرق برتبة هذا الفرق وبذلك يتحقق اسم إختبار الإشارة والرتبة. يتم معالجة التساوي بين الفروق بنفس الأسلوب المستخدم في إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن (بمعني، إستخدام طريقة متوسط الرتب midrank method). وإذا كان الفرق يساوي الصفر ، يتم استبعاد هذا الزوج من المشاهدات وبالطبع يتم تعديل قيمة n.

في هذا المثال ، الفروق (امتحان1 – امتحان2)، والرتب ، الرتب ملحقة بإشارتها هي كالتالي:

الطالب	امتحان 1	امتحان 2	الفرق	الرتبة	الرتبة مع إشارتها
1	94	85	9	8	8
2	78	65	13	10	10
3	89	92	-3	4	-4
4	62	56	6	7	7
5	49	52	-3	4	-4
6	74	78	-4	6	-6
7	80	79	1	1	1
8	82	84	-2	2	-2
9	62	48	14	11	11
10	83	71	12	9	9
11	79	82	-3	4	-4

لاحظ أنه عندما يتم ترتيب الفروق نتجاهل الإشارات تماماً. وبعد الإنتهاء من وضع الفروق في رتب، يتم إضافة إشارة الفرق لكل رتبة.

ويمكن صياغة الفرض العدمي والفرض البديل كالتالي:

H_o:توزيع الامتحانين متماثلين.

H_a:توزيع الامتحان1 يقع على يمين توزيع الامتحان2.

الفرض البديل يوضح أن الإختبار من جانب واحد، نظرا لأن الهدف هو تحديد ما إذا كان- في المتوسط- قد تم تحقيق درجات أعلى في الامتحان الأول من تلك التي تم تحقيقها في الامتحان الثاني.

ويعتمد المقدر الإحصائي لإختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن- المعرف بالرمز W - على مجموعة الرتب الموجبه- المعرفة بالرمز R_+. (ويمكن أن يعتمد أيضا على مجموع الرتب السالبة، وفي هذه الحالة يرمز لها بالرمز R_-) وبدون فقد صفة العمومية، يمكن تعريف المقدر الإحصائي W بأنه مجموع الرتب الموجبة. فإذا كان الفرض العدمي صحيحاً (بمعنى أن المشاهدات في كل زوج مأخوذة من مجتمعات لها توزيعات متماثلة)، فيكون حدوث أي تتابع للرتبة والاشارة له نفس فرصة أي تتابع ممكن من الإشارة السالبة والإشارة الموجبة. وبأسلوب أخر، بإفتراض أن الفرض العدمي صحيح، فنتوقع أن تكون قيم R_+,R_- متساوية. وكلما كان الفرق بين R_+,R_- كبيراً، كلما أظهرت العينة إنكار صحة الفرض العدمي.

وعندما نجمع رتب الفروق ذات الإشارة الموجبة، نحصل على R_+ . وعندما نجمع رتب الفروق ذات الإشارة السالبة، نحصل على R_-. وفي هذا المثال، مجموع الرتب للفروق ذات الإشارة الموجبة هي:

$R_+ = 8 + 10 + 7 + 1 + 11 + 9 = 46$

بينما مجموع الرتب للفروق ذات الإشارة السالبة هي:

$R_- = 4 + 4 + 6 + 2 + 4 = 20$

لاحظ أنه عند تحديد مجموع الرتب للفروق ذات الإشارة السالبة، نقوم بجمع القيم المطلقة للرتب لأي رتبة فرق ذات إشارة سالبة. ويمكن إختبار صحة الرتب التي حددناها بنفس الأسلوب المستخدم في إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن. بمعنى عندما(n=11)، فإن

$\{R_+ + R_- = 46 + 20 = 66 = (11)\ (12)/2\}$

ونظرا لأن قيمة المقدر الإحصائي لويلكوكسن(W) هو مجموع رتب الفروق ذات الإشارة الموجبة ولدينا $R_+=46$. ونظراً لأن الفرض البديل هو فرض من جانب واحد في اتجاه الحد الأقصى **Upper one-sided** وعندما تكون قيمة W كبيرة كبراً كافياً، فإنها تنكر وتناقض صحة الفرض العدمي. وبناء على ذلك قيمة P (P-Value) لهذا المثال هي:

$P\text{-Value} = P\ (W > 47)$

ويقدم جدول H في الملحق القيم الجدولية لتوزيع المعاينة للمقدر الإحصائيW. وطبقا لذلك، فإن المساحة على يسار أي قيمة جدولية معطاة يساوي تقريباً نفس القيمة الموضحة في عنوان العمود.

ولتحديد قيمة $P\ (W > 47)$ تحت إفتراض أن الفرض العدمي صحيح، فإننا نبحث في جدولH عندما(n=11) نجد أن [$P\ (W > 48)=.1$] لذلك فمن الممكن بسهولة توقع أن [$P\ (W > 46)>0.1$]. ونظراً لأن (48 > 46)، فإن قيمةP تتعدى 0.1، لذلك فإن دليل هذه العينة لا يمكن إنكار صحة الفرض العدمي. ويبدو بوضوح أن هذه البيانات لا تدعم الملاحظة القائلة بأن توزيع الامتحان1 يقع على يمين توزيع الامتحان2.

مثال (١٥-٣)

أعداد عقود الزواج الشهرية المصدرة في عامين متتاليين في موقع Locality معين هي كالتالي :

الشهـــــر	العام 1	العام 2
يناير	120	125
فبراير	132	128
مارس	145	140
أبريل	182	194
مايو	206	210
يونيو	285	265
يوليو	250	256
أغسطس	238	228
سبتمبر	218	214

أكتوبر	195	189
نوفمبر	168	168
ديسمبر	149	156

هل تقدم هذه البيانات سبب كافي للإعتقاد بأن النزعة المركزية لأعداد عقود الزواج في العامين مختلفة إستناداً إلى إختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن؟

الحـــل

نظراً لأننا نرغب في تحديد ما إذا كان هناك إختلاف في المواقع في أنشطة عقود الزواج بين العامين والتي لا يمكن ان تعزى إلى الصدفة العشوائية، فإنه يمكن صياغة الفروض كالتالي :

H_o: توزيعي المجتمعين متماثلين

H_a:توزيعي المجتمعين مختلفين

وبتحديد الفروق المشاهدة بين العامين1، 2، فإن الفروق ، الرتب والرتب مضافا إليها إشارة الفرق هي كالتالي:

الشهـر	الفرق	القيمة المطلقة للفرق	الرتبة	الرتبة مضافا إليها إشارة الفرق
يناير	−5	5	4.5	−4.5
فبراير	4	4	2	2
مارس	5	5	4.5	4.5
أبريل	-12	12	10	−10
مايو	−4	4	2	−2
يونيو	20	20	11	11
يوليو	−6	6	6.5	−6.5
أغسطس	10	10	9	9
سبتمبر	4	4	2	2
أكتوبر	6	6	6.5	6.5
نوفمبر	0	0	(drop)	(drop)
ديسمبر	−7	7	8	−8

لاحظ أن الفرق في شهر نوفمبر هو 0، لذلك يتم إسقاط المعلومات عن هذا الشهر ، وبالتالي تقلn إلى 11.

مجموع رتب الفروق ذات الإشارة الموجبة هو :

$$R_+ = 2 + 4.5 + 11 + 9 + 2 + 6.5 = 35$$

بينمامجموع رتب الفروق ذات الإشارةالسالبة هي:

$$R_{-} = 4.5+10+2+6.5+8 = 31$$

ولإختيار صحة ذلك، لاحظ أن: $\{R_{+} + R_{-} = 66 = (11)(12)/2\}$

ومن المناقشة السابقة، فإن قيمة المقدر الإحصائيW هو $(R_{+}=35)$. ونظراً لأن الفرض البديل ذو جانبين فإن:

$$P\text{- value} = 2P(W > 35)$$

ومن جدول H نجد أن: عند $(n=11)$، فإن $\{P(W > 48) = 0.1\}$. وبالتالي فإن $P(W>35)$ أكبر من 0.1 وقيمة P(P-Value) تتعدى 0.2 وعلى ذلك لا تقدم البيانات دليل مقنع مقابل الفرض العدمي. وبذلك فهي لا تقدم سبب كافي للإعتقاد بأن مواقع هذين المجتمعين مختلفة.

إستخدام الحاسب الآلي: Using the Computer

والآن نستخدم بيانات المثالين في هذا الجزء لتوضيح مخرجات البرنامج الإحصائي Minitab لإختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن، بإستخدام الأمر WTEST . مخرجات البرنامج الإحصائي Minitab للمقارنة بين الدرجات في إمتحانين متتالين معطاه في جدول (١٥-٣)، ومخرجات البرنامج الإحصائي Minitab لعقود الزواج الشهرية (مثال ١٥-٣) معطاه في جدول (١٥-٤). وفي هذه النتائج لاحظ أن قيم المقدرات الإحصائية هي نفس القيم التي حددناها سابقاً (W=46, W=35). وكذلك قيم P(P-Value) هي 133. ,864. على التوالي.

جدول (١٥-٣)

نتائج البرنامج الإحصائي Minitab للمقارنة بين درجات الإمتحانين

TEST OF MEDIAN = 0.000000 VERSUS MEDIAN G.T. 0.000000

	N	N FOR TEST	WILCOXON STATISTIC	P-VALUE	ESTIMATED MEDIAN
C1	11	11	46.0	0.133	4.250

جدول (١٥-٤)

نتائج البرنامج الإحصائي Minitab لمثال (١٥-٣)

TEST OF MEDIAN = 0.000000 VERSUS MEDIAN N.E. 0.000000

	N	N FOR TEST	WILCOXON STATISTIC	P-VALUE	ESTIMATED MEDIAN
C1	12	11	35.0	0.894	0.2500

تمارين:

(١٥-١) ناقش الإختلاف الأساسي بين الإختبارات المعلمية والإختبارات اللامعلمية؟

(١٥-٢)ما هو الإختبار المعلمي الذي يستخدم كبديل لإختبار مجموع الرتب لويلكوكسن؟ قارن بين هذين الإختبارين.

(١٥-٣)ما هو الإختبار اللامعملي الذي يستخدم كبديل قابل للتطبيق للمقدر الإحصائي T للعينات ذات القراءات المزدوجة؟ قارن بين هذين الإختبارين.

(١٥-٤) ضع البيانات التالية في رتب وتأكد من أن مجموع الرتب الذي حصلت عليه صحيح؟

36 23 26 23 48 39 48 19 55 53 12 23 19 23 48

(١٥-٥) ضع البيانات التالية في رتب وحدد مجموع الرتب. تأكد من أن مجموع الرتب صحيح؟

18.6 8.9 32.8 26.2 12.3 8.9 26.2 19.3 18.6 26.2

(١٥-٦) تم سحب عينات عشوائية مستقلة من مجتمعين، وقد أسفرت عن النتائج التالية. إستناداً إلى هذه البيانات، هل يمكن إستنتاج أن توزيعي المجتمعين مختلفين في المواقع؟

العينة 1	42	36	39	44	48	42	36	50
العينة 2	38	29	36	38	26	45		

(١٥-٧) تم سحب عينات عشوائية مستقلة للسيدات والرجال في التخصصات الإدارية في جامعة ما ذلك بغرض المقارنة بين متوسطات نقط للتقدير (GPAs). البيانات كالتالي:

سيدات	**2.9**	**2.6**	**3.2**	**2.8**	**3.3**	**3.5**	**2.7**	**3.4**	**2.5**	**2.9**
رجال	**2.7**	**2.4**	**3.1**	**2.7**	**3.2**	**2.6**	**2.9**	**3.2**	**2.8**	**2.5**

(أ) ارسم شكل بياني على هيئة نقط رأسية بوضع (GPA) على المحور الرأسي والجنس على المحور الأفقي. هل يرجح هذا الشكل أن موقع توزيع (GPAs) للسيدات يقع على يمين توزيع (GPAs) للرجال؟

(ب) طبق طريقة لامعلمية مناسبة للإستدلال الإحصائي لتحديد ما إذا كان توزيع (GPAs) للسيدات يقع على يمين تلك الخاص بالرجال.

(١٥-٨)إذا إستخدمت طريقة معلمية في التمرين (١٥-٧)، فما هي الطريقة الأكثر ملائمة؟ برر إجابتك.

(١٥-٩) تم إختيار عشرة من مالكي السيارات في أمريكا (محلية ومستوردة) بطريقة عشوائية، وطلب منهم ترتيب اقتناعهم بتلك السيارات بإستخدام مقياس يبدأ من 1 (لا يفضلها بشدة) إلى 5 (يفضلها بشدة)، وكانت البيانات كالتالي:

Domestic (محلى)	2	2	3	1	1	4	2	2	3	2
Import (مستورد)	3	4	4	3	2	4	4	5	5	4

(أ) بالاستناد إلى طريقة مناسبة للإستدلال، هل يمكن إستنتاج أن توزيعي المجتمعين مختلفين في الموقع؟

(ب) في الجزء (أ)، وأنت مخير في إستخدام إختبار معلمي أو إختبار لامعلمي. برر إختيارك واشرح لماذا تعتقد أنه بديل مناسب.

(١٥-١٠) البيانات التالية هي نتائج مشاهدات لعينات ذات قراءات مزدوجة مأخوذة من مجتمعين. بالإعتماد على هذه المعلومات، هل يوجد سبب للإعتقاد أن هناك إختلاف في الموقع:

الزوج pair	1	2	3	4	5	6	7	8
العينة 1	14.8	15.9	16.2	15.8	14.8	14.7	15.2	15.6
العينة 2	16.2	16.4	14.9	16.5	14.6	15.8	15.2	61.1

(١٥-١١)في تجربة ما، طلب من اثنين من المسئولين عن القروض في أحد البنوك أن يقوموا بترتيب اثنا عشر طلبا للقروض بإستخدام المقياس 1 (أقل رغبة) إلى 5 (رغبة عالية).

الطلب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
موظف 1	3	5	1	1	2	3	2	2	4	5	3	2
موظف 2	2	3	4	2	3	5	3	1	2	4	4	1

(أ) ارسم شكل بياني موضحا فيه ترتيب الرغبة على المحور الرأسي ورقم الطلب على المحور الأفقي. إستخدم رموز مختلفة في الرسم للتعبير عن الترتيب للموظف 1 والموظف 2. هل يوضح هذا الرسم أن مواقع توزيعي الترتيبين لهذين الموظفين مختلفة؟

(ب) إستخدم طريقة لامعلمية للإستدلال للتأكد عما إذا كانت هذه الترتيبات تقدم دليل مقنع على أن المواقع لتوزيعي الترتيبين لهذين الموظفين ليست واحدة. لاحظ ما اذا كان يتفق استنتاجك مع النتيجة المبدئية التي قمت بتحديدها في الجزء (أ).

(١٥-١٢) تم إعداد دراسة لتحديد ما إذا كان الترتيب المقدم من الطلبة الحاليين عن الأساتذة القائمين بالتدريس senior-level courses يتجه إلى أن يكون أقل تأييداً من ذلك المقدم من الخريجين الجدد. بإستخدام المقياس 1 (درجة سلبية كبيرة) إلى 10 (درجة إيجابية كبيرة)، قد تم الحصول على ترتيبيات مجمعة عن اثنا عشر أستاذاً من الطلبة الحاليين. وقد تم الحصول على مجموعة أخرى من الترتيبات من الخريجين الذين تسلموا درجاتهم قبل عامين من هذه الدراسة. هل تقدم البيانات التالية دليل مقنع على أن الترتيب المقدم من الطلبة الحاليين يتجه لأن يكون أقل تأييد عن ذلك المقدم من الخرجين الجدد، في المتوسط؟

الأستاذ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الطلبة الحاليين	7	4	5	6	4	8	9	7	7	3	4	7
الخريجين الجدد	9	5	7	7	3	7	10	6	10	5	3	9

(١٥-٤) الإختبارات اللامعلمية للمقارنة بين عدة مجتمعات أو عمليات

Nonparametric Procedures For Comparing Several Populations or Processes

في الأجزاء (٨-٢)، (٨-٣) تم مناقشة إختبارات تحليل التباين المعلمية لمقارنة متوسطات عدة مجتمعات أو عمليات، أو مستويات عوامل عملية تستخدم إما في حالة العينات المستقلة أو العينات المختارة في قطاعات. في هذا الجزء، سوف نفحص البدائل اللامعلمية وصولاً إلى نفس الهدف. هذه البدائل هي إختبار كروسكال-واليس **Kruskal - Wallis** وإختبار فريدمان **Friedman** على التوالي.

(١٥-٤-١) إختبار كروسكال - واليس لعدد K من العينات المستقلة :
The Kruskal - Wallis proedurce for K Independent Samples

وفي هذا الجزء نقدم البديل اللامعلمي لإختبار تحليل التباين المقدم في الجزء (٨-٢) لإختبار الفرض العدمي القائل بأن متوسطات الظواهر العديدة متقاوية. وكان يعتمد إختبار تحليل التباين على إفتراض أنه تم إختيار العينات العشوائية المقتقلة التي عددها k من مجتمعات أو عمليات تتبع التوزيع الطبيعي. وقد تم تقديم الطرق اللامعلمية لنفس الغرض؛ وتكون ملائمة طالما أن البيانات من النوع الترتيبي وتكون توزيعات المجتمعات الأكلية مقتمرة. واحدى هذه الطرق هي إختبار كروسكال - واليس **Kruskal - Wallis** الذي يفتبر الفرض العدمي القائل بأن العينات العشوائية التي عددها K مأخوذة من مجتمعات لها توزيعات متماثلة. ويمكن كياغة الفرض العدمي والفرض البديل كالتالي:

H_0: توزيعات المجتمعات التي عددها K متماثلة

H_a: يوجد على الأقل توزيع واحد من توزيعات المجتمعات يفتلف عن الباقي

إختبار **Kruskal - Wallis** هو اختبار حقاس خاكة للفروق في الموقع ومن المهم جداً استفدامه عندما يشك الفرد أنه من الممكن أن تفتلف التوزيعات الأكلية فقط في هذا الخصوص. وطبقاً لذلك، فإنه يعتبر بصفة عامة إمتداداً لإختبار مجموع الرتب لويلكوكقن الفرق الجوهري الوحيد، هو وسيلة الاختبار المقتفدمة. وفي الواقع يشتمل إختبار-Kruskal - Wallis على نفس الخطوات الموجودة في إختبار مجموع الرتب لويلكوكقن؛ الفرق الوحيد والجوهري، هو وسيلة الاختبار المقتفدمة. وسوف يتم وكف الإختبار هنا ثم يتم توضيحه بمثال (١٥-٤) . وكما في إختبار مجموع الرتب لويلكوكقن، نقوم أولا بتجميع البيانات لعدد k عينة. وفي الخطوة الثانية نضع البيانات المجمعة داخل رتب. ويتم التعامل مع الرتب المتقاوية بإستفدام طريقة متوسط الرتب midrank method، كما في إختبار مجموع الرتب لويلكوكقن. وفي الخطوة الثالثة نجمع الرتب لكل عينة من العينات التي عددها k . وأخيراً نقوم بحقاب قيمة المقدر الإحصائي لإختبار كروسكال - واليس وتحديد قيمة P(P-Value).

والفكرة التي يقوم عليها اختبار كروسكال - واليس هي كالتالي: بالنقبة للعينات العشوائية التي عددها k ، إفترض أن n_j تمثل عدد المشاهدات في العينة رقم j. وبالتالي فإن أحجام العينات سيكون $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$. وإفترض أن $(n=n_1+n_2+n_3+.....+n_k)$ تمثل العدد الكلي للمشاهدات في كل العينات. إفترض أن R_j تمثل مجموع رتب العينة رقم J. وبالتالي فإن $R_1, R_2, ..., R_k$ تمثل مجموع الرتب في تلك العينات. فإذا كان الفرض العدمي القائل بأن العينات مأخوذة من مجتمعات لها نفس التوزيع هو فرض كحيح، فيجب أن يكون مجموع الرتب لجميع العينات متقاوي، ويفتلف فقط بقبب التغيرات في أحجام العينات والاختلافات العشوائية. وبذلك، يحدد إختبار Kruskal - Wallis ما إذا كان الإختلافات بين مجاميع الرتب بعد الأخذ في الإعتبار أحجام العينات كافي لإنكار كحة الفرض العدمي.

المقدر الإحصائي لإختبار كروسكال - واليس Kruskal - Wallis هو :

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left\{\frac{R_1^2}{n_1}+\frac{R_2^2}{n_2}+.........+\frac{R_k^2}{n_k}\right\}-3(n+1) \qquad (15.3)$$

وبالنسبة لأحجام العينات الكبيرة نسبياً، يكون توزيع المعاينة لهذا المقدر الإحصائي هو تقريب جيد لتوزيع كا^{2}بدرجات حرية(K-1). وبصفة عامة، فإن تقريب كا^2 يعطي نتائج مرضية إذا لم تكن K=3 ويجب أن تكون أحجام العينات أكبر من 5 . وتؤدي الفروق الكبيرة في مجاميع الرتب إلى وجود قيم كبيرة للمقدر الإحصائي لإختبار Kruskal - Wallis وبناء على ذلك، عندما تكون قيمة للمقدر الإحصائي لإختبار Kruskal - Wallis كبيرة، فإن قيمة P (P-Value) تكون صغيرة ويصبح الفرض العدمي مشكوك في صحته.

مثال (١٥-٤)

تم إختبار عينات عشوائية ومستقلة للمنازل المباعة حديثا من أربعة أحياء سكنية متميزة في مدينة كبيرة. وقد كان الإهتمام منصب على ما إذا كان تقييم الممتلكات بطريقة عادلة أم لا. وبتحديد أكثر، هل يوجد إختلافات بين الأربعة أحياء فيما يتعلق بالعلاقة بين قيمة الممتلكات والقيمة السوقية الفعلية؛ فعلى سبيل المثال، إذا تم تقييم المنازل في أحد الأحياء على أساس أنها تساوي 80% من القيمة السوقية، بينما تم تقييم المنازل في حي أخر على أساس أنها تساوي 90% من القيمة السوقية، فإن ذلك غير عادل. والبيانات التالية هي نسبة سعر البيع الفعلي إلى قيمة الممتلكات التي حددها مكتب تثمين العقارات بالمدينة. (القيم بين الأقواس في الجدول عبارة عن رتب المشاهدات بعد أن تم خلط المشاهدات وترتيبها ترتيباً تصاعدياً) إستخدم إختبار Kruskal - Wallis في تحديد ما إذا كانت هذه العينات مأخوذة من مجتمعات لهانفس التوزيع أم لا.

الأحياء			
4	3	2	1
1.12 (7.5)	.98 (2)	1.08 (4.5)	1.19 (15)
1.14 (10)	1.19 (15)	1.23 (17.5)	1.05 (3)
1.31 (22)	1.08 (4.5)	1.26 (20)	1.14 (10)
1.12 (7.5)	.93 (1)	1.10 (6)	1.25 (19)
1.19 (15)	1.23 (17.5)	1.18 (12.5)	1.29 (21)
	1.18 (12.5)	1.14 (10)	

الحل

لاحظ أن $(n_1 = n_4 = 5; n_2 = n_3 = 6)$, $(n = 5 + 6 + 6 + 5 = 22)$

والفرض العدمي والفرض البديل كالتالي :

H_o: توزيع الأحياء الأربعة متماثل

H_a: يوجد على الأقل واحد من هذه التوزيعات يختلف عن الباقي.

وبخلط البيانات ووضعها في رتب نحصل على:

الترتيب	1	2	3	4.5	4.5	6	7.5
نسبة التقييم	.93	.98	1.05	1.08	1.08	1.10	1.12
الحى	3	3	1	2	3	2	4
الترتيب	7.5	10	10	10	12.5	12.5	15
نسبة التقييم	1.12	1.14	1.14	1.14	1.18	1.18	1.19
الحى	4	1	2	4	2	3	1
الترتيب	15	15	17.5	17.5	19	20	21
نسبة التقييم	1.19	1.19	1.23	1.23	1.25	1.26	1.29
الحى	3	4	2	3	1	2	1
الترتيب	22						
نسبة التقييم	1.31						
الحى	4						

مجموع الرتب لكل عينة من العينات الأربع هو كالتالي :

$R_1 = 15+3+10+19+21 = 68$

$R_2 = 4.5 + 17.5 + 20 + 6 + 12.5 + 10 = 70.5$

$R_3 = 2 + 15 + 4.5 + 1 + 17.5 + 12.5 = 52.5$

$R_4 = 7.5 + 10 + 22 + 7.5 + 15 = 62$

وقيمة المقدر الإحصائي لإختبار Kruskal - Wallis

$$H = \frac{12}{22(22+1)}\left\{\frac{(68)^2}{5} + \frac{(70.5)^2}{6} + \frac{(52.5)^2}{6} + \frac{(62)^2}{5}\right\} - 3(22+1) = 1.70$$

من جدول E في الملحق، حيث (K-1)=3 درجات حرية، نجد أن قيمة P

$$\text{P-Value} = P(\chi^2_3 > 1.70) > 0.1$$

وبذلك فإن هذه البيانات لا تبين بإقناع أنه توجد إختلافات بين الأحياء في قيم الممتلكات عند مقارنتها بسعر البيع. ومن المقبول في هذا الشأن أن ترجع الإختلافات المشاهدة إلى التغيرات في المعاينة العشوائية وحدها.

إستخدام الحاسب الآلي : Using the Computer

لتوضيح إستخدام الحاسب الآلي لإختبار كروسكال – واليس Kruskal - Wallis، سوف نرجع إلى مثال (١٥-٤) ونعرض نتائج الحاسب الآلي بإستخدام أمر Kruskal - Wallis في البرنامج الإحصائي Minitab . ويحتوي جدول (١٥-٥) على هذه النتائج.

جدول (١٥-٥)

نتيجة البرنامج الإحصائي Minitab. لمثال (١٥-٤)

LEVEL	NOBS	MEDIAN	AVE - RANK	Z VALUE
1	5	1.190	13.6	0.82
2	6	1.160	11.8	0.11
3	6	1.130	8.7	-1.22
4	5	1.140	12.4	0.35
OVERALL	22		11.5	

H=1.70 d.f.=3 p=0.636

H=1.72 d.f.=3 p=0.0634 (adj.For ties)

لاحظ أن قيمة المقدر الإحصائي لإختبار Kruskal - Wallis هو(H=1.70) كما حصلنا عليه من قبل) وقيمة P(P-Value) هي عبارة عن 0.636 ولاحظ أيضاً أن نتيجة البرنامج الإحصائي Minitab تشمل القيمة المعدلة للموشر الإحصائي-(H=1.72) حيث قد تم التعديل للرتب المتقاوية. فإذا كان عدد الرتب المتقاوية كبير، فيتم اقتراح معامل التصحيح للمقدر الإحصائي لإختبار Kruskal - Wallis. ويزيد التصحيح دائماً من قيمة المقدر الإحصائي. ومن ثم يقلل من قيمة P(P-value). ومع ذلك، ففي معظم الحالات يتم إهمال هذا الأثر حتى إذا كان يوجد رتب متقاوية عديدة. والإختلاف في هذه الحالة يمكن إهماله. وقد تم تقديم معلومات إضافية في المخرجات، مثل أحجام العينات (5,6,6,5)، وسيط لكل عينة (1.14,1.13,1.16,1.19)، وهكذا.

(١٥-٤-٢) إختبار فريدمان لعدد K من العينات موضوعة في عدد n من القطاعات

The Friedman procedure for K Samples Matched in Blocks

يمكن تطبيق إختبار فريدمان عندما نرغب في مقارنة ثلاثة مواقع للمعالجات أو أكثر وتكون البيانات مجمعة في قطاعات. لذلك، فإن هذا الإختبار هو البديل اللامعلمي لأسلوب تحليل التباين في حالة وجود قطاعات والذى قدم في الجـزء(٨-٣) . ويلـزم أن تكون القياسات على الأقل من النوع الترتيبي.

وكما في اختبار تحليل التباين المناظر، يتم تجميع البيانات في قطاعات وذلك لعزل أثر التغيرات المكنة في متغير الإستجابة التي يقبيها التغير في القطاعات. داخل كل قطاع يتم تفصيص الوحدات التجريبية على المعالجات بطريقة عشوائية. وبذلك يحتوى كل قطاع على عدد K من المشاهدات، حيث تمثل كل مشاهدة معالجة من المعالجات. وكما كان الحال سابقاً، نقوم بتنظيم البيانات بحيث تكون القطاعات ممثلة في الصفوف وتكون المعالجات ممثلة في الأعمدة.

الفرض العدمي لإختبار فريدمان هو أن أثر المعالجات متقاوية- بمعنى أن المجتمعات الأكلية للمعالجات لها توزيعات متماثلة. والفرض البديل هو أن الآثار الناتجة عن المعالجات مفتلفة. اكتشاف فروق بين المعالجات تعني وجود فروق في المواقع(كما كان الحال في إختبار Kruskal - Wallis).

وكما كان الحال في الإختبارات اللامعلمية التي تم مناقشتها، فإن إختبار فريدمان يعتمد أيضاً على مجموع الرتب. وبالنقبة لكل قطاع (بمعنى، لكل كف من البيانات) نقوم بترتيب المشاهدات في رتب تبدأ بالرتبة رقم 1 وتنتهي بالرتبة رقم k. وبعد ذلك نقوم بجمع هذه الرتب لكل معالجة. فإذا كان الفرض العدمي كحيحاً، فإن الآثار الناتجة عن المعالجات تكون متقاوية داخل كل قطاع،

وتختلف البيانات بسبب العشوائية فقط. ويجب أن تكون الرتب داخل كل قطاع في تتابع عشوائي للأعداد الصحيحة من I إلى K، وستكون كل التتابعات المكنة متساوية إحتمالياً. وبالنسبة لكل معالجة نتوقع أن تظهر الرتب من 1إلى K بنفس التكرار تقريباً لكل القطاعات في لتجربة. فإذا كانت الآثار الناتجة عن المعالجات متماثلة حقاً، فيجب أن يكون مجموع الرتب متساوي لكل المعالجات فيما عدا الإختلافات الناتجة عن التغيرات العشوائية. ويحدد إختبار فريدمان بصفة جوهرية ما إذا كانت الإختلافات المشاهدة بين مجاميع الرتب كافية لإنكار صحة الفرض العدمي.

وسوف نوضح إختبار فريدان في مثال (١٥-٥) التالي. ولكننا نقدم أولا ملاحظات هامة. إفترض أن R_j تعرف مجموع الرتب للمعالجة رقم J (بمعنى العمود رقم J). وبذلك يتم تعريف مجاميع الرتب بالرموز $R_1, R_2, ... R_k$. عدد القطاعات يرمز لها بالرمز n ؛ وبذلك يكون العدد الكلي للمشاهدات هو nk . المقدر الإحصائي لإختبار فريدمان كالتالي:

$$S = \frac{12}{\text{nk}(k+1)}\left(R_1^2 + R_2^2 + \ldots\ldots + R_k^2\right) - 3\text{n}(K+1) \qquad \textbf{(15.4)}$$

فإذا كانت عد د القطاعات n وعدد المعالجات K كبير بدرجة كافية، فيكون المقدر الإحصائيS كافيا لكي يتم تقريبه إلى توزيع كا٢ بدجات حرية (K-1). وكقاعدة ارشادية في هذا الشأن هو تواجد عشر قطاعات على الأقل وتواجد أربعة معالجات على الأقل { بمعنى $(n > 10), (K \geq 4)$ } . وكما في إختبار Kruskal - Wallis، فإن قيمة P (P-value) هي إحتمال أن يتعدى المتغير العشوائي الذي يتبع كا٢ بدرجات حرية (K-1) القيمة المشاهدة للمقدر الإحصائي S. وكما هو الحال سابقاً مكن أن تتواجد رتب متساوية فيتم التعامل معها بإستخدام طريقة متوسط الرتب midrank method.

مثال (١٥-٥)

يحكم أربعة أشخاص على الأداء في مبارة للغوص تتضمن عشرة مشتركين. وتمثل البيانات التالية النقاط المسجلة، حيث يشير عدد النقاط 10 إلى الغوص التام. إستخدم المقدر الإحصائي لإختبار فريدمان لتحديد ما إذا كان من المكن أن يتواجد فروق يمكن إدراكها بين مواقع توزيعات النقاط المسجلة بواسطة الحكام الأربعة.

	الحكام			
اللاعب	1	2	3	4
1	8.5 (3)	8.6 (4)	8.2 (1)	8.4 (2)
2	9.8 (4)	9.7 (3)	9.4 (1)	9.6 (2)
3	7.9 (2)	8.1 (3)	7.5 (1)	8.2 (4)
4	9.7 (3)	9.8 (4)	9.6 (1.5)	9.6 (1.5)
5	6.2 (1)	6.8 (3)	6.9 (4)	6.5 (2)
6	8.9 (2.5)	9.2 (4)	8.7 (1)	8.9 (2.5)
7	9.2 (3.5)	9.2 (3.5)	8.7 (1)	8.9 (2)

8.6 (4)	8.4 (1.5)	8.5 (3)	8.4 (1.5)	8
9.5 (3)	8.9 (1)	9.6 (4)	9.2 (2)	9
9.3 (4)	8.6 (1)	9.2 (3)	8.8 (2)	10

الحـل :

لاحظ أن المعالجات هي الأربعة حكام . يمكن أن تختلف قدرات المتنافسين (اللاعبين) بصفة جوهرية، وبالتالي تسهم بمقدار كبير في تقديرات الغوص . لذلك يتم معالجتها بوضعها في قطاعات . وقد قدمنا في الجدول السابق رتب المشاهدات داخل الأقواس لكل متنافس (بمعنى داخل كل قطاع) . ومجموع الرتب لكل حكم هي كالتالي:

$$R_1 = 3 + 4 + 2 + 3 + 1 + 2.5 + 3.5 + 1.5 + 2 + 3 = 24.5$$

$$R_2 = 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3.5 + 3 + 4 + 3 = 34.5$$

$$R_3 = 1+1+1+1.5+4+1+1+1.5+1+1 = 14$$

$$R_4 = 2 + 2 + 4 + 1.5 + 2 + 2.5 + 2 + 4 + 3 + 4 = 27$$

ويمكن صياغة الفروض محل الإهتمام كالتالي :

H_o: الآثار الناتجة عن المعالجات (الحكام) متساوية .

H_a: تختلف الآثار الناتجة عن بعض المعالجات .

عند (K=4),(n=10) فإن قيمة المقدر الإحصائي لفريدمان هو :

$$S = \frac{12}{10(4)(4+1)}\left\{(24.5)^2 + (34.5)^2 + (14)^2 + (27)^2\right\} - 3(10)(4+1)$$
$$= 12.93$$

ومن جدول E في الملحق وبدرجات حرية {3=(K-1)}، نجد أن قيمة P (P-value) هي $\{P(\chi^2_3 > 12.93) < 0.005\}$ ونظرا لأن قيمة P(P-Value) هي عملياً صفر . فإن هذه البيانات تقدم دليل مقنع على وجود فروق في المواقع في النقاط المسجلة بين الحكام .

إستخدام الحاسب الآلي : Using the Computer

دعنا نعود إلى مثال (١٥-٥) لتوضيح نتائج إستخدام الحاسب الآلي بإستخدام الأمر FRIEDMAN في البرنامج الإحصائي Minitab . ويحتوى جدول (١٥-٦) على هذه النتائج .

جدول رقم (١٥-٦)

نتائج البرنامج الإحصائي Minitab لمثال رقم (١٥-٥)

Friedman test of C_3 by C_2 blocked by C_1

S=12.93 d.f.=3 p=0.005

S=13.47 d.f.=3 p=0.004 (adjusted for lies)

C_2	N	EST. Median	Sum of RANKS
1	10	8.9156	24.5
2	10	9.1031	34.5
3	10	8.6906	14.0
4	10	8.9531	27.0

Grand median =8.9156

ومن هذه النتيجة، لاحظ قيمة المقدر الإحصائي لفريدمان (S=12.93) وقيمة P (P-value=.005). وكما هو معتاد، يقدم البرنامج الإحصائي Minitab نتائج إضافية مثل مجموع الرتب لكل حكم ($R_4 = 27, R_3 = 14, R_2 = 34.5, R_1 = 24.5$) والقيمة المعدلة للمقدر الإحصائي هي (S=13.47).

تمارين

(١٥-١٣) ما هو الإختبار المعلمي الذي تعتبر طريقة كروسكال - واليس Kruskal - Wallis بديل لامعلمي مناسب له ؟ قارن بين هذين الإختبارين.

(١٥-١٤) بالإشارة إلى تمرين (٨-٤٠). قد تضمن هذا التمرين إنتاجية عينة مكونة من خمسة عمال لهم نفس مستوى المهارة. وتمثل البيانات- التي تم إعادتها هنا - عدد الوحدات التي ينتجها كل عامل على مدى ست فترات متساوية من الوقت. إستخدم إختبار Kruskal - Wallis للإجابة على الأجزاء (ب)- إلى أي مدى يمكن لهذه البيانات إنكار صحة الإدعاء القائل بأنه لا يوجد فروق، في المتوسط؟، (ج) ما هي الإفتراضات الضرورية ليكون التحليل الذي تقوم به صحيح ؟ هل النتيجة التي توصلت إليها هي نفس النتيجة في تمرين (٨-٤٠)؟

العامل				
5	4	3	2	1
48	57	39	52	45
44	49	37	55	47
55	52	46	58	43
53	50	45	49	48
49	48	42	47	50
52	55	41	57	44

(١٥-١٥) تم القيام بدراسة ما لتحديد ما إذا كانت الدرجات التي يحصل عليها الطلاب في امتحان GMAT لها تأثير في إختيار الطلاب لتخصصاتهم الجامعية. وقد تم إختبار عينات من الطلبة الذين تخرجوا من نفس الجامعة عشوائيا من أربعة تخصصات في الكلية وهي إدارة

الأعمال، العلوم، الهندسة، والفنون ولتقيد الاختلافات، سيتم الأخذ في الإعتبار فقط الطلبة الحاصلين على متوسطات نقاط التقدير(3.4) على الأقل. والبيانات التالية تمثل نسبة GMAT التي حققها هؤلاء الطلاب.

التخصص			
إدارة أعمال	علوم	هندسة	فنون
87	95	92	84
82	94	86	85
89	88	87	76
78	96	84	79
75	86	82	82
84	78	81	83

(أ) قم بعمل رسم بياني حيث يتم وضع GMAT المحققة علي المحور الرأسي والتخصص على المحور الأفقي. هل يرجح الشكل الذي قمت برسمه أن أداء GMAT يختلف- في- المتوسط- بإختلاف تخصص ما قبل التخرج؟

(ب) إستخدم إختبار Kruskal - Wallis لتحديد ما إذا كان آداء GMAT -في المتوسط يختلف بإختلاف تخصص ما قبل التخرج؟

(١٥-١٦) حكم أربعة خبراء مسابقة للتزحلق متضمنة عشرة متنافسين وتم إستخدام مدى معين للقياس يتراوح بين6,3 حيث تمثل 6 الإحراز التام. والبيانات كالتالي :

المتنافس	الحكم			
	A	B	C	D
1	5.2	5.4	5.4	5.1
2	4.6	4.8	4.5	4.3
3	5.8	5.7	5.9	5.6
4	4.2	4.4	4.3	4.1
5	5.6	5.4	5.3	5.8
6	5.7	5.5	5.6	5.8
7	5.4	5.3	5.5	5.2
8	4.1	4.2	4.2	4.3
9	5.9	5.8	5.8	5.7
10	5.0	5.1	5.2	5.3

(أ) ارسم هذه النقاط التي وضعها الحكام حيث يتم وضع تقديرات الحكام على المحور الرأسي ويتم وضع المتزحلق المقابل على المحور الأفقي. إستخدم رموزا مختلفة في الرسم للتمييز بين تقديرات الأربعة حكام. هل يرجح الشكل الذي قمت برسمه أن نقاط المحكمين تختلف- في المتوسط- بإختلاف الحكم ؟

(ب) بالإعتماد علي إختبار لا معلمي مناسب، هل يوجد سبب لإستنتاج أن النقاط المقدرة التي قام بتقديرها كل حكم من الحكام الأربعة تختلف- في المتوسط- بإختلاف الحكم ؟

(١٥-١٧) تم إعداد دراسة ما لتحديد درجة تصديق مشاهدي التليفزيون لإعلانات التليفزيون. وقد تم إختيار عشرة أشخاص عشوائيا وطلب منهم تصنيف خمس إعلانات مختلفة بإستخدام المقياس 1 (عدم القابلية للتصديق كلية) إلى المقياس 10 (القابلية للتصديق كلية). والبيانات كالتالي :

الشخص	الإعلانات				
	A	B	C	D	E
1	1	8	9	2	3
2	2	7	8	3	4
3	1	8	8	1	2
4	3	7	7	2	3
5	2	9	9	2	4
6	3	6	6	3	5
7	2	8	7	1	2
8	1	7	6	2	3
9	3	8	6	4	3
10	2	6	7	3	2

(أ) أي طريقة تكون مناسبة بشكل أفضل هنا، إستخدام إختبار معلمي أم إستخدام إختبار لامعلمي ؟ اشرح وجهة نظرك.

(ب) هل تثبت هذه البيانات بإقناع أنه توجد إختلافات- في المتوسط- في درجة التصديق المرتبطة بالاعلانات الخمس؟

(١٥-٥) معامل إرتباط الرتب لسبيرمان Spearman Rank Correlation Coefficient

في الجزء(٩-٧)، قمنا بتعريف معامل الإرتباط r بأنه مقياس الإرتباط الخطي بين متغيرين بالإعتماد على البيانات المشتقة من العينة عن المتغيرات. وتتضمن هذه المناقشة إفتراض أن المتغيرين محل الإهتمام قد تم تعريفهم على مقياس فترة على الأقل. ولكن ماذا يكون الحال لو أن المشاهدات كانت على مقياس ترتيبي فقط، مثل الرتب؟ فعلى سبيل المثال، إفترض أنه توجد مجموعة مكونة من 200 عميل. قد تم وضعها في ترتيب على أساس المبيعات السنوية. وإفترض أيضا، أننا نقوم بالإهتمام وكذلك ملاحظة مواعيد الأوامر التي يستجيب لها العملاء. وأنه لمن المفيد معرفة ما إذا كان العملاء يميلون إلى أن يكونوا أسرع استجابة أو - على الجانب الأخر- ما إذا كان زمن الإستجابة غير مرتبط برتب مبيعات العملاء. ويمثل معامل إرتباط الرتب لسبيرمان- المعروف بالرمز r_s- مقياس لا معلمي مبسط للإرتباط بالإعتماد على الرتب.

وبالنسبة للعينة العشوائية المكونة من n وحدة معاينة، إفترض أن بيانات المشاهدات الموجودة لدينا إما أن تكون في شكل رتب لكل زوج من المتغيرين Y,X أو وجود البيانات المشاهدة في شكلها الأصلي. ومعامل إرتباط الرتب لسبيرمان هو معامل إرتباط العينة الموجود في الجزء (٩-٧) {الصيغة (9.33)}، فيما عدا أننا نستخدم رتب المتغيرين Y,X بدلاً من إستخدام القيم الأصلية. وكما كان الحال في معامل إرتباط العينة r، فإن معامل إرتباط الرتب r_s معرفة على

المدى($-1 \le r_s \le 1$)؛ويقيس درجة الإرتباط الخطي بين رتب المتغيرين Y,X . وأخذاً في الاعتبار القيم الأصلية للمتغيرات X ، Y (مقابل رتبها) نجد أن تفسير r_s غير مطابق تماماً لما يعنيه r . فإذا كانت مشاهدات المتغيرين Y,X معرفة على مقياس فترى أو نسبي ، فإن معامل الإرتباط للعينة r يقيس درجة الإرتباط الخطى بين Y,X . ولكن أذا تم إستخدام رتب المتغيرين Y,X فقط فإن r_s يقيس ميل المتغيرين Y,X لأن يرتبطا بطريقة مطردة . بمعنى أنه إذا كان r_s قريباً من (+1) أو (-1) فهذا يعني أن هناك إرتباط* طردي متزايد أو طردي متناقص بين Y,X . بمعنى r_s أكثر معنى أو مغزى من r ، لأن r_s لا تتقيد بوصف العلاقة الخطية فقط .

مثال (١٥-٦)

طلب من خبيرين من خبراء الخمور أن يقوما بتصنيف عشرة أنواع من الخمور بإستخدام مقياس يبدأ من 1 (أسوأ تقدير ممكن) إلى 10 (أفضل تقدير ممكن) . وقد تم الحصول على التقديرات التالية .

نوع الخمر	تقديرات الخبير 1	تقديرات الخبير 2
1	9	6
2	2	4
3	8	7
4	5	3
5	10	9
6	7	9
7	1	3
8	4	6
9	4	7
10	3	1

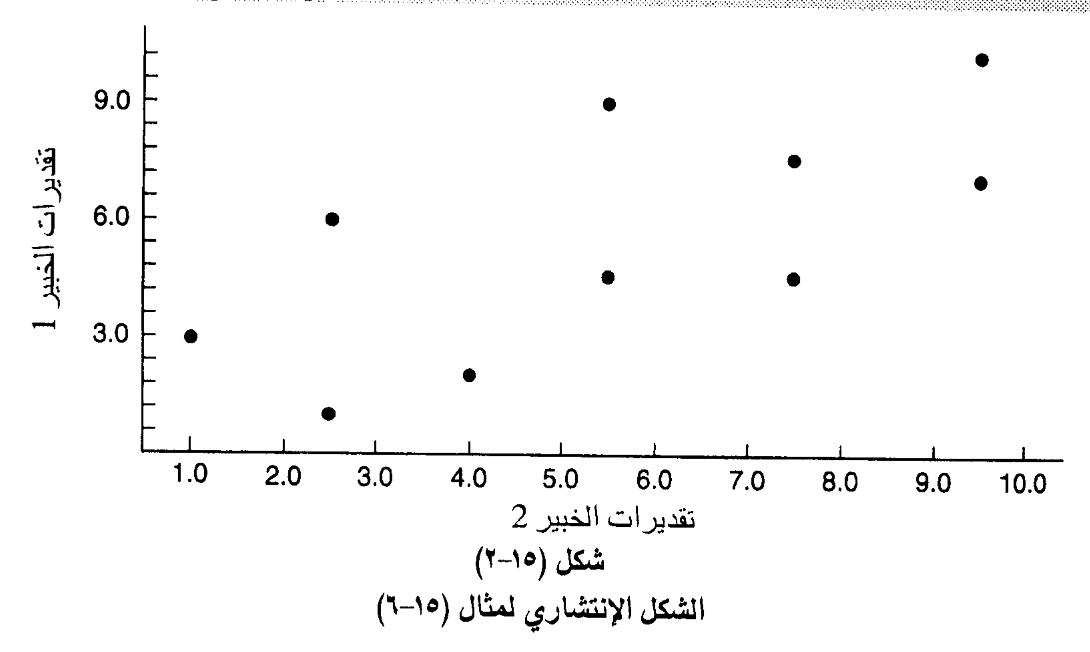
هل تشير هذه البيانات إلى وجود إرتباط بين تقديرات هذين الخبيرين للخمر؟ حدد وفسر معامل إرتباط الرتب لسبيرمان .

الحل

بإستخدام البرنامج الإحصائي Minitab، نقوم بتحويل تقديرات الخبراء إلى رتب ، ومن ثم إستخدام المعادلة (9.33) لتحديد قيمة r_s. (انظر إلى الملحق في نهاية هذا الفصل لمعرفة تعليمات تنفيذ البرنامج الإحصائي (Minitab) .

وقد تم التوصل إلى قيمة معامل إرتباط الرتب لسبيرمان لتكون (r_s=.683) وهذا يرجح وجود اتفاق قوي بطريقة واضحة بين تقديرات الخبراء . وهذه النتيجة متسقة مع ما يوضحه الشكل الإنتشاري لمجموعتي الرتب الموضحة في شكل (١٥-٢) .

* ويعنى التزايد (التناقص) بشكل مطرد أنه متى زادت X ، فإن قيمة Y المقترنة بها تتزايد . وهذا لايعني بالضرورة علاقة ارتباط خطية بين X ، Y .



شكل (١٥-٢)

الشكل الإنتشاري لمثال (١٥-٦)

تمارين

(١٥-١٨)إشرح الغرض والتفسير الملائم لمعامل إرتباط الرتب لسبيرمان ؟

(١٥-١٩) إلى أي مدى يختلف معامل إرتباط الرتب لسبيرمان عن معامل الإرتباط الذي تم مناقشته في الجزء(٩-٧) ؟ أشرح ذلك.

(١٥-٢٠) قام خبيران بالحكم على أداء ثمانية غواصين بإستخدام المقاييس من 1 (أسوء تقدير ممكن) إلى 10 (أفضل تقدير ممكن). وقد تم الحصول على النتائج التالية:-

الغواص	1	2	3	4	5	6	7	8
الخبير 1	3	4	8	8	4	6	4	7
الخبير 2	2	4	9	7	2	8	7	9

(أ) احسب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، وعلق على ما إذا كانت توجد علاقة واضحة. وإذا كان الأمر كذلك، هل يمكن أن تصف هذه العلاقة.

(ب) قم برسم الشكل الإنتشاري، بوضع رتب الخبير 1 على المحور الرأسي ورتب الخبير 2 على المحور الأفقي. هل يدعم هذا الشكل التفسير الذي قدمته في الجزء(أ)؟ وهل يقدم تلميحات إضافية؟ اشرح إجابتك.

(١٥-٢١) بإستخدام المقاييس من 1 (أسواء تقدير ممكن) إلى 10 (أفضل تقدير ممكن) قام خبيران بالتحكيم في مهرجان ملكة جمال أمريكا Miss America Pageant وكانت التقديرات كالتالي:

رقم المتسابقة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الخبير 1	2	6	5	9	3	7	9	2	6	2
الخبير 2	7	1	4	4	8	9	3	9	10	8

(أ) احسب وفسر معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وإذا كانت هناك علاقة واضحة بين تقديرات الخبيرين، هل يمكن أن تصف هذه العلاقة؟

(ب) قم برسم الشكل الإنتشاري، بوضع رتب الخبير 1 على المحور الرأسي ورتب الخبير 2 على المحور الأفقي. هل يدعم هذا الشكل التفسير الذي قدمته في الجزء(أ)؟ وهل يقدم تلميحات إضافية؟ اشرح إجابتك.

(١٥-٦) مراجعة عامة على الطرق المعلمية والطرق اللامعلمية

Overview of Parametric and Nonparametric Mthods

ظهرت ثلاث مزايا للطرق اللامعلمية كما تم مناقشتها في هذا الفصل:

(1) الإفتراضات المطلوبة لإستخدام الطرق اللامعلمية أقل جمودا من تلك المطلوبة لإستخدام الطرق المعلمية المقابلة. ومن ثم، تصبح الطرق اللامعلمية ملائمة لدراسة مجموعة أكبر من الحالات.

(2) الطرق اللامعلمية مناسبة تماماً للإستخدام عندما تكون المشاهدات معرفة على مقياس ترتيبي.

(3) الحسابات المطلوبة للطرق اللامعلية أسهل نسبيا من تلك التي تحتاجها الطرق المعلمية.

وبسبب الميزة الأولى، فإن الطرق الامعلمية تصبح مفيدة بشكل خاص عندما تكون العينات المستخدمة صغيرة الحجم، ووجود إعتبارات بخصوص الإلتزام بالافتراضات الخاصة بالتوزيع التي تتطلبها الطرق المعلمية. وبصفة خاصة، يتم إختبار مجموع الرتب لويلكوكسن وإختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن وإختبار كروسكال - واليس وإختبار فريدمان بشكل جيد نسبياً من حيث الكفاءة الإحصائية مع الطرق المعلمية المطابقة بالإعتماد على المؤشرات الإحصائية T,F. وعلى الجانب الآخر، وكما أشرنا في الفصل السابع والفصل الثامن، إن إختبارات T لها درجة حساسية عالية لإقتراض الاعتدالية (يتبع التوزيع الطبيعي) حيث يكون ذلك مطلوباً لاعتبارات رياضية للتعامل مع أحجام العينات المعتدلة التي تحتوي على 15 مشاهدة أوأكثر. بالإضافة إلى ذلك، فإن المؤشر الإحصائي T المجمع والمؤشر الإحصائي F في تحليل التباين لهم درجة حساسية عالية تجاه إفتراض تساوي التباينات إذا كانت أحجام العينات كبيرة ومتساوية وعندما تكون أحجام العينات المستخدمة كبيرة نسبياً والمشاهدات معرفة على مقياس الفترة أو مقياس النسب، فإنه يتم فقد بعض المعلومات عند تحويل المشاهدات إلى رتب وإستخدام الطرق اللامعلمية. بالنسبة لكل هذه الحالات، فإن الكفاءة الإحصائية للطرق اللامعلمية أقل من الطرق المعلمية المناظرة. ويمكن ألا تكون الميزة الثالثة ذو مغزى نظراً لأن البرامج الإحصائية اليوم تقوم بإجراء الحسابات المعلمية واللامعلمية بنفس درجة السهولة. والحالة الوحيدة التي تتميز فيها الطرق اللامعلمية بشكل واضح على الطرق المعلمية عندما تكون البيانات المتاحة معرفة على هيئة مقياس ترتيبي. وتطبيق الطرق المعلمية على المشاهدات الموضوعة على هيئة مقياس ترتيبي يصبح غير ملائم لأن تفسير أي فترة ليس له أي معنى.

(١٥-٧) ملخص : Summary

في هذا الفصل، تم تقديم الإختبارات الإستدلالية التي لا تشترط إفتراض معلومية توزيعات المجتمعات. ويطلق على هذه الإختبارات الطرق اللامعلمية أو طرق التوزيع الحر. وتتطلب هذه الطرق إفتراضات أقل وغالباً ما تكون أسهل في التطبيق من الإختبارات المعلمية المقابلة التي تم

مناقشها في الفصول السابقة. وتعتمد الإختبارات اللامعلمية التي قدمت هنا على تحويل بيانات (معلومات) العينة إلى رتب. وهذه الإختبارات مفيدة بصفة خاصة للحالات التي تكون فيها بيانات العينة على هيئة مقياس ترتيبي.

طريقة مجموع الرتب لويلكوكسن وطريقة الإشارة والرتب لويلكوكسن هي طرق مفيدة لمقارنة مواقع مجتمعين بالإعتماد على العينات المستقلة والعينات ذات القراءات المزدوجة، على التوالى. ويستخدم إختبار كروسكال – واليس في مقارنة مواقع مجتمعات عديدة بالإعتماد على العينات المستقلة ويكون إختبار فريدمان مناسباً للحالة التي تكون فيها العينات موضوعة في قطاعات.

وأخيراً، فإن معامل إرتباط الرتب لسبيرمان هو مقياس لا معلمي مفيد لقياس الإرتباط بالإعتماد على الرتب. ويلخص الجدول التالي إرتباط (association) الطرق اللامعلمية المحددة المقدمة في هذا الفصل مع نظائرها المعلمية، مع وجود أرقام الأجزاء المقدمة فيها هذه الطرق المعلمية.

الإختبار اللا معلمي	الإختبار المعلمي	الجزء Section
مجموع الرتب لويلكوكسن	T التجميعي (pooled T)	(٧-٣)
الإشارة والرتبة لويلكوكسن	T المزدوج (paired T)	(٧-٤)
كروسكال- واليس	تحليل التباين، عينات مستقلة	(٨-٢)
فريدمان	تحليل التباين، عينات في قطاعات	(٨-٣)
معامل إرتباط الرتب لسبيرمان	معامل الإرتباط	(٩-٧)

المراجع: References

(1) J. D.Gibbons. *Nonparametic statistical Inference-* New York: Mc Graw- Hill, 1971.

(2) M.Hollander and D.A.Wolf. *Nonparametic Statistical Method.* New York: Wiley, 1973.

تمارين إضافية:

(١٥-٢٢)ناقش المزايا التي تصبح من خلالها الإختبارات اللامعلمية متفوقة على الطرق المعلمية المقابلة. وأي ميزة من هذه المزايا يثبت في النهاية أنها ميزة واضحة؟ إشرح ذلك.

(١٥-٢٣) تم القيم بدراسة ما لمدة خمس سنوات لتحديد ما إذا كان هناك إختلاف في عدد المصابين بنزلات البرد التي يعاني منها المدخنين وغير المدخنين. وبالإستناد إلى عينات عشوائية مكونة من 14 غير مدخن، 12 مدخن، تمثل البيانات التالية العدد المشاهد للمصابين بنزلات البرد خلال فترة الخمس سنوات:

غير مدخن	1	0	2	7	3	1	2	2	4	3	5	0	2	1
مدخن	4	2	6	5	8	10	8	7	6	4	9	3		

هل يوجد سبب للإعتقاد أن هذه العينات العشوائية مأخوذة من مجتمعات مختلفة في الموقع؟

(١٥-٢٤) شركة لبحوث التسويق مهتمة بمقارنة قبول المستهلك لنوعين جدد من المنتجات هما B, A.
تم إختيار 12 مستهلك بطريقة عشوائية وطلب منهم تصنيف قبولهم للمنتج A بإستخدام المقياس من 1 (لا يقبله إطلاقاً) إلى 5 (يقبلة بشدة). وقد قام 12 مستهلك أختيروا عشوائياً أيضاً بتصنيف قبولهم للمنتج B. وقد تم الحصول على المعلومات التالية:

المنتج A	1	2	5	5	4	3	5	4	4	3	5	2
المنتج B	2	2	1	1	3	1	2	2	4	3	1	3

حدد ما إذا كان يمكن لدليل هذه العينة أن ينكر صحة الفرض العدمي القائل أن هذه العينات العشوائية مأخوذة من مجتمعات لها توزيعات متماثلة في المواقع.

(١٥-٢٥) شركات لبحوث التسويق مهتمة بمعرفة المذاق المفضل لنوعين من المشروبات الغازية المتنافسة. تم إختيار 14 شخص بطريقة عشوائية وطلب منهم تصنيف هذين المشروبين بإستخدام المقياس من 1 (لايحبه إطلاقاً) إلى 10(يحبه بشدة). وقد تم الحصول على المعلومات الآتية:

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
النوع A	7	5	9	4	8	10	4	3	7	2	8	6	6	9
النوع B	3	2	7	6	9	3	5	1	4	2	4	7	5	4

هل يقدم دليل هذه العينة سبباً للإعتقاد أنه توجد إختلافات في اختبار المذاق لهذين المشروبين؟

(١٥-٢٦) تم إختبار 12 يوماً عشوائياً، الآتي هو عدد الوحدات المباعة من نفس المنتج لأثنين من البائعين المتنافسين B, A:

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	42	58	47	39	41	56	59	37	38	46	43	51
B	46	57	48	59	64	52	65	59	37	65	68	49

هل يمكن لدليل هذه العينة أن ينكر صحة الفرض العدمي القائل بأن هذه العينات مأخوذة من مجتمعات لها توزيعات متماثلة؟ برر إجابتك.

(١٥-٢٧) في دراسة ما كان المطلوب هو تحديد ما إذا كانت دراسة الطلبة في مرحلة البكالوريوس لها تأثير على أداء الطالب أو الطالبة في أحد فصول الدراسات العليا بكلية الحقوق. وتم اختيار عينة عشوائية مكونة من 30 طالب وطالبة دراسات عليا بتلك الكلية. وتم وضع نقاط خاصة بأداء الطلبة، وتم تصنيفها حسب تخصص دراسات مرحلة البكالوريوس وكانت كما بالجدول التالي:

إدارة الأعمال	العلوم أو الهندسة	الفنون الليبرالية	مجالات أخرى
9	3	2	14
22	7	4	34
24	10	15	48
32	18	26	52
47	23	38	59
65	25	43	63
		45	67
		49	72
		55	79

هل تدل بيانات هذه العينة بطريقة مقنعة على أن دراسة مرحلة البكالوريوس لطالب لها تأثير على أدائه فى الدراسات العليا بكلية الحقوق؟

(١٥-٢٨) بالإشارة إلى تمرين (٨-٣٥) إستخدم إختبار كروسكال - واليس لإختبار الفرض العدمي القائل بأنه لا توجد فروق في نوعية المتانة. هل النتيجة التي توصلت إليها متماثلة مع تلك التي توصلت إليها في تمرين (٨-٣٥)؟ إشرح ذلك.

(١٥-٢٩) تم إختيار 12 طالب عشوائياً من فصل كبير من الطلاب الذين لم يتخرجوا بعد؛ وقد تم سرد درجات هؤلاء الطلاب في أربعة إمتحانات تمت في إمتحان نصف العام في الجدول التالي. حدد ما إذا كانت توجد فروق- في المتوسط- بين توزيعات الدرجات في الأربع إمتحانات.

الطالب	الامتحان			
	1	2	3	4
1	72	68	80	75
2	89	87	78	92
3	48	56	64	59
4	65	76	70	62
5	86	94	93	85
6	56	73	78	87
7	75	84	65	69
8	39	45	48	56
9	78	67	69	59
10	98	87	86	95
11	64	87	92	48
12	82	76	85	79

(١٥-٣٠) بالإشارة إلى تمرين (٨-٤٦) إستخدم طريقة لا معلمية مناسبة لتحديد ما إذا كانت توجد فروق- في المتوسط- بين توزيعات الأربع محلات تجارية. قارن النتيجة التي توصلت إليها بتلك الخاصة بتمرين (٨-٤٦).

(١٥-٣١) بالإشارة إلى تمرين (٩-٦٠). حدد معامل إرتباط الرتب لسبيرمان بتحويل قيم المتغيرين Y, X إلى رتب. قارن النتيجة التي توصلت إليها بتلك التي توصلت إليها في الجزء (ب) لتمرين (٩-٦٠).

(١٥-٣٢) قام مجموعة من محللي الإستثمار بوضع عشرة شركات في رتب من حيث القيمة الدفترية والنمو المحتمل كالتالي:

الشركة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
القيمة الدفترية	8	3	10	1	6	2	5	7	4	9
النمو	4	8	6	5	9	3	7	1	10	2

إحسب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان، وعلق على ما إذا كان هناك علاقة واضحة بين القيمة الدفترية للشركة ونموها المحتمل.

ملحق ١٥ : Appendix -15

تعليمات الحاسب الآلي باستخدام البرنامج الإحصائي Minitab والبرنامج الإحصائي SAS

سوف نقوم باستخدام مثال الأجور، مثال (١٥-٢) لتوضيح تعليمات البرنامج الإحصائي Minitab والبرنامج الإحصائي SAS وذلك لاختبار ويلكوكسن لمجموع الرتب wilcoxon rank sum test وسوف نستخدم بيانات مثال (١٥-٣) لاختبار الإشارة والرتب لويلكوكسن wilcoxon signed rank test وبيانات مثال (١٥-٤)، (١٥-٥) لاختبار كروسكال - واليس kruskal-wallis وكذلك اختبار فريدمان Friedman

البرنامج الإحصائي Minitab

اختبار مجموع الرتب لويلكوكسن Wilcoxon Rank Sum Procedure

تستخدم التعليمات التالية للحصول على المخرجات في جدول (١٥-١) لمثال الأجور. لاحظ أن العينة الخاصة بالذكور هي الأصغر وبالتالي سوف تقدم بياناتها أولاً. لاحظ أيضاً أنه لاتوجد أوامر فرعية نحتاجها بعد عمل أوامر Mann-whitney حيث أن اختبار الفرض البديل ذو جانبين.

```
MTB >   set c1
DATA >  24.7 27.6 28.4 30 29.4 29.9 30.5 29.6
DATA >  end
MTB >   set c2
DATA >  23.8 26.5 24.6 29.2 23.2 22.7 24.9 25.6 24.8
DATA >  28.2
DATA >  end
MTB >   mann-whitney c1 c2
```

والتعليمات التالية تعطينا المخرجات المدونة في جدول (١٥-٢)، لاحظ الاحتياج إلى الأمر الفرعي [Alternative=1] حيث أن الفرض البديل عبارة عن «أكبر من».

```
MTB >   set c1
DATA >  540 525 505 485 560 555
DATA >  end
MTB >   set c2
DATA >  525 460 480 515 500 470 490
DATA >  end
MTB >   mann-whitney c1 c2;
SUBC >  alternative = 1.
```

اختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن Wilcoxon Signed - Rank Procedure

التعليمات التالية تعطينا المخرجات المدونة في جدول (١٥-٣)، (١٥-٤) لمثال درجات الامتحان وكذلك لمثال (١٥-٣) على التوالي. لاحظ أننا استخدمنا الأمر LET لإنشاء العمود الخاص بالفروق قبل استخدامنا للأمر WTEST.

```
MTB >  set c1
DATA > 94 78 89 62 49 74 80 82 62 83 79
DATA > end
MTB >  set c2
DATA > 85 65 92 56 52 78 79 84 48 71 82
DATA > end
MTB >  let c3 = c1 - c2
MTB >  wtest c3;
SUBC > alternative = 1.

MTB >  set c1
DATA > 120 132 145 182 206 285 250 238 218 195 168
DATA > 149
DATA > end
MTB >  set c2
DATA > 125 128 140 194 210 265 256 228 214 189 168
DATA > 156
DATA > end
MTB >  let c3 = c1 - c2
MTB >  wtest c3
```

اختبار كروسكال – واليس Kruskal Wallis Procedure

التعليمات التالية تعطينا المخرجات المدونة في جدول (١٥-٥) والخاصة بالمثال (١٥-٤). لاحظ اننا استخدمنا الأمر READ لإدخال البيانات بالصورة التي وضحت في الملحق 8A. بمعنى أننا ندخل الحى الأول ثم الحي الثاني وهكذا.

```
MTB >  read c1 c2
DATA > 1.19 1
DATA > 1.05 1
DATA > 1.14 1
DATA > 1.25 1
DATA > 1.29 1
DATA > 1.08 2
DATA > 1.23 2
DATA > 1.26 2
DATA > 1.10 2
DATA > 1.18 2
DATA > 1.14 2
DATA > 0.98 3
DATA > 1.19 3
DATA > 1.08 3
DATA > 0.93 3
DATA > 1.23 3
DATA > 1.18 3
DATA > 1.12 4
DATA > 1.14 4
DATA > 1.31 4
DATA > 1.12 4
DATA > 1.19 4
DATA > end
MTB >  kruskal-wallis c1 c2
```

اختبار فريدمان Friedman Procedure

التعليمات التالية تعطينا المخرجات المدونة في جدول (١٥-٦) والخاصة بالمثال (١٥-٥). لاحظ أن أعمدة الميني تاب C1، C2، C3 تمثل رقم المتنافس (القطاعات) ورقم الحكام (المعالجات) والدرجة (الاستجابة) على التوالي.

```
MTB >   read c1 c2 c3
DATA > 1 1 8.5
DATA > 1 2 8.6
DATA > 1 3 8.2
DATA > 1 4 8.4
DATA > 2 1 9.8
       .
       .
       .
       .
DATA > 10 4 9.3
DATA > end
MTB >   friedman c3 c2 c1
```

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان The Spearman Rank Correlation Coefficient

والتعليمات التالية تحول المعدلات في مثال (١٥-٦) إلى تراتيب، ورسم التراتيب بيانات في شكل (١٥-٢) وكذلك حساب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان. في هذه التعليمات لاحظ اننا نستخدم الأمر RANK لتحويل المعدلات في الأعمدة C1، C2 إلى رتب وتخزينهم في الأعمدة C3، C4 على التوالى، ويستخدم الأمر Correlation لحساب قيمة r_s .

```
MTB >   set c1
DATA >  9 2 8 5 10 7 1 4 4 3
DATA >  end
MTB >   set c2
DATA >  6 4 7 3 9 9 3 6 7 1
DATA >  end
MTB >   rank c1 c3
MTB >   rank c2 c4
MTB >   correlation c3 c4
MTB >   plot c3 c4
```

البرنامج الإحصائي SAS

اختبار مجموع الرتب لويلكوكسن Wilcoxon rank sum test

وكما في أي تطبيقات خاصة بالبرنامج الإحصائي SAS فسوف نبدأ بالأوامر DATA، INPUT، CARDS. وبالنسبة لمثال الأجور فسوف نعتبر الأجر Salary هو المتغير التابع ويكون الأسلوب هو PPOC NPAR 1WAY WILCOXON ويكون من بين المعلومات الأخرى قيمة الإحصاء «107» وتكون قيمة «P-value» لاختبار الطرفين هي «0067.» والتي تعتمد على تقريب التوزيع الطبيعي، وبالإضافة إلى ذلك تعطينا قيمة إحصاء كروسكال - واليس «7.5868» والتي تعتمد على تقريب

توزيع كاى تربيع لعينتين مستقلتين وتكون قيمة «P-value» المناظرة «0059.». لاحظ أن هناك جملتين من الأوامر للبرنامج SAS والتي تتبع الجملة التي سبق ذكرها، وتكون الأولى هي كلمة CLASS والتي تعيد اسم المتغيرات المستقلة والتي تم إظهارها في جملة INPUT (الجنس). أما الثانية فهي جملة VAR والتي تكرر اسم المتغير التابع كما تم ذكره في جملة INPUT «هو الأجر Salary» والتعليمات التالية تزودنا بمخرجات الحاسب في نهاية البرنامج.

```
DATA;
INPUT SALARY GENDER;
CARDS;
23.8 1
26.5 1
 .
 .
 .
 .
28.2 1
24.7 2
27.6 2
 .
 .
 .
 .
29.6 2
PROC NPAR1WAY WILCOXON;
CLASS GENDER;
VAR SALARY;
```

```
          N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E

     Wilcoxon Scores (Rank Sums) for Variable SALARY
              Classified by Variable GENDER

            Sum of        Expected        Std Dev         Mean
 N          Scores        Under H0        Under H0        Score

 10           64.0          95.0        11.2546287      6.4000000
 8           107.0          76.0        11.2546287     13.3750000

    Wilcoxon 2-Sample Test (Normal Approximation)
    (with Continuity Correction of .5)

    S=  107.000          Z=  2.71000          Prob > |Z| =   0.0067

    T-Test approx. Significance =   0.0149

    Kruskal-Wallis Test (Chi-Square Approximation)
    CHISQ=  7.5868          DF=  1          Prob > CHISQ=   0.0059
```

اختبار الإشارة والرتبة لويلكوكسن Wilcoxon Signed Rank Prcedure

وبالنظر إلى مثال الامتحان السابق فإننا نقوم بوضع عنوان للاختبارين T1، T2 في جملة IN-PUT ثم نقوم بحساب متغير آخر D حيث أن «D=T1-T2» وهو عبارة عن الفرق بين الاختبارين، ويتم وضع هذه الجملة مباشرة بعد جملة INPUT ثم نقوم بكتابة الجملة PROC UNIVARIATE ويتبعها جملة VAR(D).

```
DATA;
INPUT T1 T2;
D = T1 - T2;
CARDS;
94 85
78 65
89 92
62 56
49 52
74 78
80 79
82 84
62 48
83 71
79 82
PROC UNIVARIATE;
VAR D;
```

```
                                                    Univariate Procedure

Variable=D

                  Moments                                              Quantiles(Def=5)

 N                   11  Sum Wgts          11      100% Max        14          99%         14
 Mean          3.636364  Sum               40       75% Q3         12          95%         14
 Std Dev       7.270113  Variance    52.85455       50% Med         1          90%         13
 Skewness       0.37123  Kurtosis    -1.85321       25% Q1         -3          10%         -3
 USS                674  CSS         528.5455        0% Min        -4           5%         -4
 CV            199.9281  Std Mean    2.192022                                   1%         -4
 T:Mean=0      1.658909  Pr>|T|        0.1281      Range           18
 Num ^= 0            11  Num > 0            6      Q3-Q1           15
 M(Sign)            0.5  Pr>=|M|       1.0000      Mode            -3
 Sgn Rank            13  Pr>=|S|       0.2764
```

اختبار كروسكال – واليس Kruskal Wallis Prcedure

كما سبق في أسلوب مجموع الرتب لولكوكسن فإن البرنامج الإحصائي SAS والحملة PROC NPAR 1 WAY WILCOXON يستخدم نفس الأسلوب بالنسبة لأسلوب كروسكال- ويلز، وبالنظر إلى بيانات المثال (١٥-٤) فإن مخرجات الحاسب تكون مدرجة في نهاية القائمة التالية:

```
DATA;
INPUT RATIO NEIBORHD;
CARDS;
1.19 1
1.05 1
1.14 1
1.25 1
1.29 1
1.08 2
1.23 2
1.26 2
1.10 2
1.18 2
1.14 2
0.98 3
1.19 3
1.08 3
0.93 3
1.23 3
1.18 3
1.12 4
1.14 4
1.31 4
1.12 4
1.19 4
PROC NPAR1WAY WILCOXON;
CLASS NEIBORHD;
```

N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E

Wilcoxon Scores (Rank Sums) for Variable RATIO
Classified by Variable NEIBORHD

NEIBORHD	N	Sum of Scores	Expected Under H0	Std Dev Under H0	Mean Score
1	5	68.0000000	57.5000000	12.7205649	13.6000000
2	6	70.5000000	69.0000000	13.5186259	11.7500000
3	6	52.5000000	69.0000000	13.5186259	8.7500000
4	5	62.0000000	57.5000000	12.7205649	12.4000000

Average Scores were used for Ties

Kruskal-Wallis Test (Chi-Square Approximation)
CHISQ= 1.7156   DF= 3   Prob > CHISQ= 0.6335

ملاحق عامة

الجـــــــداول الأحصـــــــائية

STATISTICAL TABLES

جدول A : قيم دالة توزيع ذو الحدين التجميعية

جدول B : قيم دالة التوزيع الطبيعي المعياري

جدول C : قيم توزيع T

جدول D : قيم توزيع كا^{٢}

جدول E : قيم توزيع F

جدول F : حدود إحصاء دربن – واطسون

جدول G : قيم احصاء مجمو الرتب لويلكوكسن

جدول H : قيم الاشارة والرتبة لويلكوكسن

جدول I : قيم دالة توزيع بواسون التجميعية

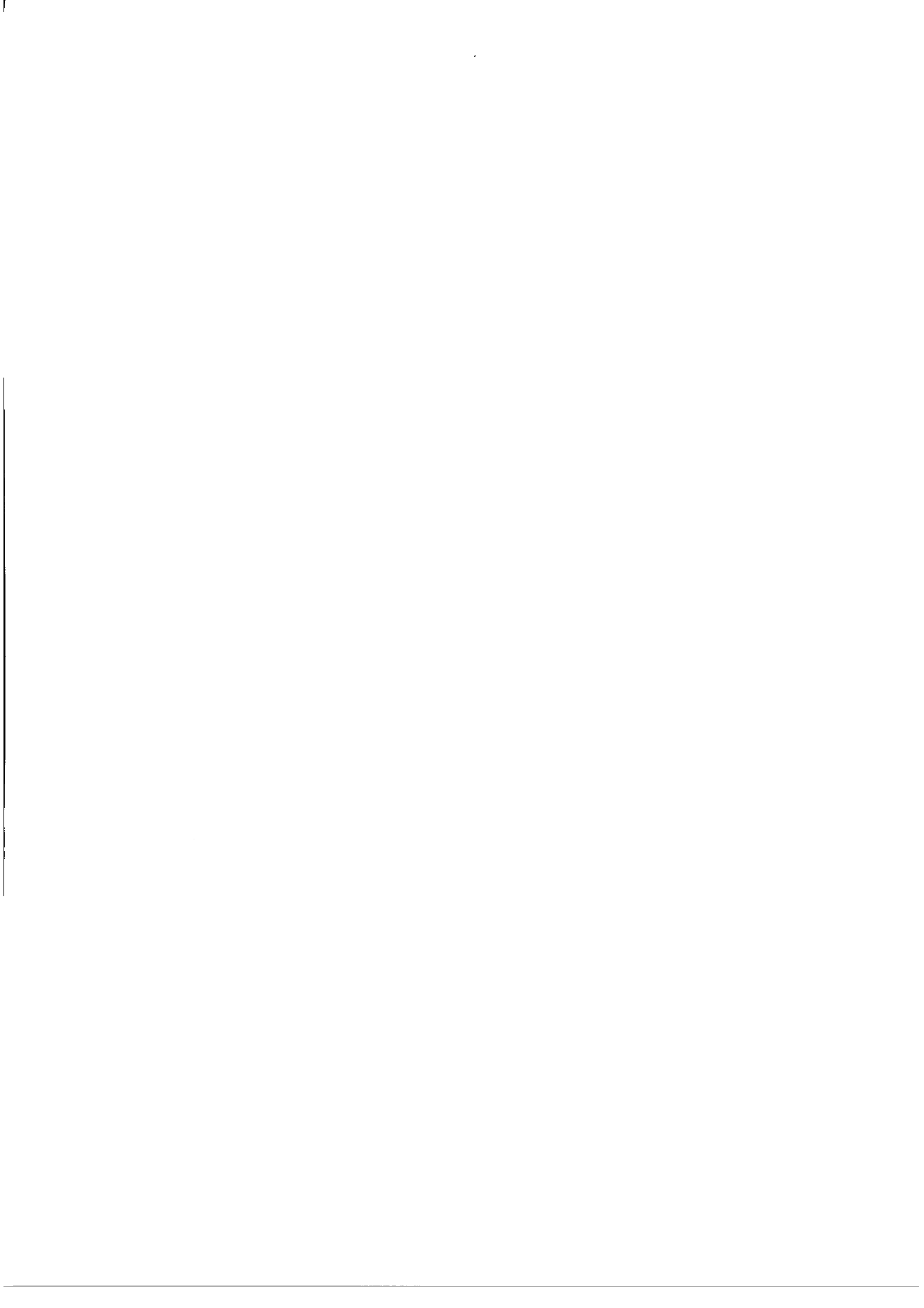


TABLE A

Values of the Binomial Cumulative Distribution Function $P(X \leq x) = F(x; n, \pi)$

n	x	π .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
2	0	.9801	.9025	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500	.1600	.0900	.0400	.0100	.0025	.0001
	1	.9999	.9975	.9900	.9600	.9100	.8400	.7500	.6400	.5100	.3600	.1900	.0975	.0199
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	.9703	.8574	.7290	.5120	.3430	.2160	.1250	.0640	.0270	.0080	.0010	.0001	.0000
	1	.9997	.9928	.9720	.8960	.7840	.6480	.5000	.3520	.2160	.1040	.0280	.0072	.0003
	2	1.0000	.9999	.9990	.9920	.9730	.9360	.8750	.7840	.6570	.4880	.2710	.1426	.0297
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.9606	.8145	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625	.0256	.0081	.0016	.0001	.0000	.0000
	1	.9994	.9860	.9477	.8192	.6517	.4752	.3125	.1792	.0837	.0272	.0037	.0005	.0000
	2	1.0000	.9995	.9963	.9728	.9163	.8208	.6875	.5248	.3483	.1808	.0523	.0140	.0006
	3	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9919	.9744	.9375	.8704	.7599	.5904	.3439	.1855	.0394
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.9510	.7738	.5905	.3277	.1681	.0778	.0313	.0102	.0024	.0003	.0000	.0000	.0000
	1	.9990	.9774	.9185	.7373	.5282	.3370	.1875	.0870	.0308	.0067	.0005	.0000	.0000
	2	1.0000	.9988	.9914	.9421	.8369	.6826	.5000	.3174	.1631	.0579	.0086	.0012	.0000
	3	1.0000	1.0000	.9995	.9933	.9692	.9130	.8125	.6630	.4718	.2627	.0815	.0226	.0010
	4	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9898	.9688	.9222	.8319	.6723	.4095	.2262	.0490
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	.9415	.7351	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156	.0041	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.9985	.9672	.8857	.6554	.4202	.2333	.1094	.0410	.0109	.0016	.0001	.0000	.0000
	2	1.0000	.9978	.9841	.9011	.7443	.5443	.3438	.1792	.0705	.0170	.0013	.0001	.0000
	3	1.0000	.9999	.9987	.9830	.9295	.8208	.6563	.4557	.2557	.0989	.0159	.0022	.0000
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9891	.9590	.8906	.7667	.5798	.3446	.1143	.0328	.0015
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9959	.9844	.9533	.8824	.7379	.4686	.2649	.0585
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(continued)

TABLE A (continued)

n	x	π = .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
7	0	.9321	.6983	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078	.0016	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9980	.9556	.8503	.5767	.3294	.1586	.0625	.0188	.0038	.0004	.0000	.0000	.0000
	2	1.0000	.9962	.9743	.8520	.6471	.4199	.2266	.0963	.0288	.0047	.0002	.0000	.0000
	3	1.0000	.9998	.9973	.9667	.8740	.7102	.5000	.2898	.1260	.0333	.0027	.0002	.0000
	4	1.0000	1.0000	.9998	.9953	.9712	.9037	.7734	.5801	.3529	.1480	.0257	.0038	.0000
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9812	.9375	.8414	.6706	.4233	.1497	.0444	.0020
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9922	.9720	.9176	.7903	.5217	.3017	.0679
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0	.9227	.6634	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9973	.9428	.8131	.5033	.2553	.1064	.0352	.0085	.0013	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.9999	.9942	.9619	.7969	.5518	.3154	.1445	.0498	.0113	.0012	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9996	.9950	.9437	.8059	.5941	.3633	.1737	.0580	.0104	.0004	.0000	.0000
	4	1.0000	1.0000	.9996	.9896	.9420	.8263	.6367	.4059	.1941	.0563	.0050	.0004	.0000
	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9988	.9887	.9502	.8555	.6846	.4482	.2031	.0381	.0058	.0001
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9915	.9648	.8936	.7447	.4967	.1869	.0572	.0027
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9832	.9424	.8322	.5695	.3366	.0773
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	.9135	.6302	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9966	.9288	.7748	.4362	.1960	.0705	.0195	.0038	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9999	.9916	.9470	.7382	.4628	.2318	.0898	.0250	.0043	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9994	.9917	.9144	.7297	.4826	.2539	.0994	.0253	.0031	.0001	.0000	.0000
	4	1.0000	1.0000	.9991	.9804	.9012	.7334	.5000	.2666	.0988	.0196	.0009	.0000	.0000
	5	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9747	.9006	.7461	.5174	.2703	.0856	.0083	.0006	.0000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9957	.9750	.9102	.7682	.5372	.2618	.0530	.0084	.0001
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9805	.9295	.8040	.5638	.2252	.0712	.0034
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9899	.9596	.8658	.6126	.3698	.0865
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE A (continued)

n	x	π												
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
10	0	.9044	.5987	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9957	.9139	.7361	.3758	.1493	.0464	.0107	.0017	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9999	.9885	.9298	.6778	.3828	.1673	.0547	.0123	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9990	.9872	.8791	.6496	.3823	.1719	.0548	.0106	.0009	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9999	.9984	.9672	.8497	.6331	.3770	.1662	.0473	.0064	.0001	.0000	.0000
	5	1.0000	1.0000	.9999	.9936	.9527	.8338	.6230	.3669	.1503	.0328	.0016	0000	0000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894	.9452	.8281	.6177	.3504	.1209	.0128	.0001	.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9877	.9453	.8327	.6172	.3222	.0702	.0010	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893	.9536	.8507	.6242	.2639	.0115	.0001
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9990	.9940	.9718	.8926	.6513	.0861	.0043
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.4013	.0956
													1.0000	1.0000
11	0	.8953	.5688	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9948	.8981	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9998	.9848	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327	.0059	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9984	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133	.0293	.0043	.0002	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9999	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744	.0994	.0216	.0020	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	1.0000	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000	.2465	.0782	.0117	.0003	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256	.4672	.2103	.0504	.0028	.0001	.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867	.7037	.4304	.1611	.0185	.0016	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673	.8811	.6873	.3826	.0896	.0152	.0002
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9941	.9698	.8870	.6779	.3026	.1019	.0052
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9964	.9802	.9141	.6862	.4312	.1047
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(continued)

TABLE A (continued)

n	x	π .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
12	0	.8864	.5404	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9938	.8816	.6590	.2749	.0850	.0196	.0032	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9998	.9804	.8891	.5583	.2528	.0834	.0193	.0028	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9978	.9744	.7946	.4925	.2253	.0730	0153	.0017	.0001	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9998	.9957	.9274	.7237	.4382	.1938	.0573	.0095	.0006	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	1.0000	.9995	.9806	.8822	.6652	.3872	.1582	.0386	.0039	.0001	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9999	.9961	.9614	.8418	.6128	.3348	.1178	.0194	.0005	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9905	.9427	.8062	.5618	.2763	.0726	.0043	.0002	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9847	.9270	.7747	.5075	.2054	.0256	.0022	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807	.9166	.7472	.4417	.1109	.0196	.0002
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9968	.9804	.9150	.7251	.3410	.1184	.0062
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9978	.9862	.9313	.7176	.4596	.1136
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	.8775	.5133	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9928	.8646	.6213	.2336	.0637	.0126	.0017	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9997	.9755	.8661	.5017	.2025	.0579	.0112	.0013	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9969	.9658	.7473	.4206	.1686	.0461	.0078	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9997	.9935	.9009	.6543	.3530	.1334	.0321	.0040	.0002	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	1.0000	.9991	.9700	.8346	.5744	.2905	.0977	.0182	.0012	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9999	.9930	.9376	.7712	.5000	.2288	.0624	.0070	.0001	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9988	.9818	.9023	.7095	.4256	.1654	.0300	.0009	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9960	.9679	.8666	.6470	.3457	.0991	.0065	.0003	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9922	.9539	.8314	.5794	.2527	.0342	.0031	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9888	.9421	.7975	.4984	.1339	.0245	.0003
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9874	.9363	.7664	.3787	.1354	.0072
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9903	.9450	.7458	.4867	.1225
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE A (continued)

n	x	π .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
14	0	.8687	.4877	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9916	.8470	.5846	.1979	.0475	.0081	.0009	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9997	.9699	.8416	.4481	.1608	.0398	.0065	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9958	.9559	.6982	.3552	.1243	.0287	.0039	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9996	.9908	.8702	.5842	.2793	.0898	.0175	.0017	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	1.0000	.9985	.9561	.7805	.4859	.2120	.0583	.0083	.0004	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9998	.9884	.9067	.6925	.3953	.1501	.0315	.0024	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9976	.9685	.8499	.6047	.3075	.0933	.0116	.0002	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9917	.9417	.7880	.5141	.2195	.0439	.0015	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9983	.9825	.9102	.7207	.4158	.1298	.0092	.0004	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9961	.9713	.8757	.6448	.3018	.0441	.0042	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9935	.9602	.8392	.5520	.1584	.0301	.0003
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9919	.9525	.8021	.4154	.1530	.0084
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9932	.9560	.7712	.5123	.1313
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	.8601	.4633	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9904	.8290	.5490	.1671	.0353	.0052	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9996	.9638	.8159	.3980	.1268	.0271	.0037	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9945	.9444	.6482	.2969	.0905	.0176	.0019	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9994	.9873	.8358	.5155	.2173	.0592	.0093	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9999	.9978	.9389	.7216	.4032	.1509	.0338	.0037	.0001	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9997	.9819	.8689	.6098	.3036	.0950	.0152	.0008	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9958	.9500	.7869	.5000	.2131	.0500	.0042	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9992	.9848	.9050	.6964	.3902	.1311	.0181	.0003	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9963	.9662	.8491	.5968	.2784	.0611	.0022	.0001	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9907	.9408	.7827	.4845	.1642	.0127	.0006	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9981	.9824	.9095	.7031	.3518	.0556	.0055	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9963	.9729	.8732	.6020	.1841	.0362	.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9948	.9647	.8329	.4510	.1710	.0096
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9953	.9648	.7941	.5367	.1399
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(continued)

TABLE A (continued)

n	x	π												
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
16	0	.8515	.4401	.1853	.0281	.0033	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9891	.8108	.5147	.1407	.0261	.0033	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9995	.9571	.7892	.3518	.0994	.0183	.0021	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9930	.9316	.5981	.2459	.0651	.0106	.0009	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9991	.9830	.7982	.4499	.1666	.0384	.0049	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9999	.9967	.9183	.6598	.3288	.1051	.0191	.0016	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9995	.9733	.8247	.5272	.2272	.0583	.0071	.0002	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9930	.9256	.7161	.4018	.1423	.0257	.0015	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9985	.9743	.8577	.5982	.2839	.0744	.0070	.0001	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9929	.9417	.7728	.4728	.1753	.0267	.0005	.0000	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9809	.8949	.6712	.3402	.0817	.0033	.0001	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9951	.9616	.8334	.5501	.2018	.0170	.0009	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894	.9349	.7541	.4019	.0684	.0070	.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979	.9817	.9006	.6482	.2108	.0429	.0005
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9967	.9739	.8593	.4853	.1892	.0109
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9967	.9719	.8147	.5599	.1485
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE A (continued)

n	x	π												
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
17	0	.8429	.4181	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9877	.7922	.4818	.1182	.0193	.0021	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9994	.9497	.7618	.3096	.0774	.0123	.0012	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9912	.9174	.5489	.2019	.0464	.0064	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9988	.9779	.7582	.3887	.1260	.0245	.0025	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9999	.9953	.8943	.5968	.2639	.0717	.0106	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9992	.9623	.7752	.4478	.1662	.0348	.0032	.0001	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9891	.8954	.6405	.3145	.0919	.0127	.0005	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9974	.9597	.8011	.5000	.1989	.0403	.0026	.0000	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9873	.9081	.6855	.3595	.1046	.0109	.0001	.0000	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9968	.9652	.8338	.5522	.2248	.0377	.0008	.0000	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9894	.9283	.7361	.4032	.1057	.0047	.0001	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9975	.9755	.8740	.6113	.2418	.0221	.0012	.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9936	.9536	.7981	.4511	.0826	.0088	.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988	.9877	.9226	.6904	.2382	.0503	.0006
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979	.9807	.8818	.5182	.2078	.0123
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9977	.9775	.8332	.5819	.1571
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(continued)

TABLE A (continued)

n	x	π												
		.01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
18	0	.8345	.3972	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9862	.7735	.4503	.0991	.0142	.0013	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9993	.9419	.7338	.2713	.0600	.0082	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9891	.9018	.5010	.1646	.0328	.0038	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9985	.9718	.7164	.3327	.0942	.0154	.0013	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9998	.9936	.8671	.5344	.2088	.0481	.0058	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9988	.9487	.7217	.3743	.1189	.0203	.0014	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	.9998	.9837	.8593	.5634	.2403	.0576	.0061	.0002	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9957	.9404	.7368	.4073	.1347	.0210	.0009	.0000	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9790	.8653	.5927	.2632	.0596	.0043	.0000	.0000	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9939	.9424	.7597	.4366	.1407	.0163	.0002	.0000	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9986	.9797	.8811	.6257	.2783	.0513	.0012	.0000	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9942	.9519	.7912	.4656	.1329	.0064	.0002	.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9846	.9058	.6673	.2836	.0282	.0015	.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9962	.9672	.8354	.4990	.0982	.0109	.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9918	.9400	.7287	.2662	.0581	.0007
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9858	.9009	.5497	.2265	.0138
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9820	.8499	.6028	.1655
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE A (continued)

n	x	π .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
19	0	.8262	.3774	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9847	.7547	.4203	.0829	.0104	.0008	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9991	.9335	.7054	.2369	.0462	.0055	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9868	.8850	.4551	.1332	.0230	.0022	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9980	.9648	.6733	.2822	.0696	.0096	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9998	.9914	.8369	.4739	.1629	.0318	.0031	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9983	.9324	.6655	.3081	.0835	.0116	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	.9997	.9767	.8180	.4878	.1796	.0352	.0028	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9933	.9161	.6675	.3238	.0885	.0105	.0003	.0000	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9674	.8139	.5000	.1861	.0326	.0016	.0000	.0000	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9895	.9115	.6762	.3325	.0839	.0067	.0000	.0000	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9972	.9648	.8204	.5122	.1820	.0233	.0003	.0000	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9884	.9165	.6919	.3345	.0676	.0017	.0000	.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9682	.8371	.5261	.1631	.0086	.0002	.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9904	.9304	.7178	.3267	.0352	.0020	.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9978	.9770	.8668	.5449	.1150	.0132	.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9945	.9538	.7631	.2946	.0665	.0009
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9992	.9896	.9171	.5797	.2453	.0153
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9989	.9856	.8649	.6226	.1738
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(continued)

TABLE A (continued)

n	x	π .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
20	0	.8179	.3585	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9831	.7358	.3917	.0692	.0076	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9990	.9245	.6769	.2061	.0355	.0036	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	1.0000	.9841	.8670	.4114	.1071	.0160	.0013	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9974	.9568	.6296	.2375	.0510	.0059	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9997	.9887	.8042	.4164	.1256	.0207	.0016	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	1.0000	.9976	.9133	.6080	.2500	.0577	.0065	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	.9996	.9679	.7723	.4159	.1316	.0210	.0013	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9900	.8867	.5956	.2517	.0565	.0051	.0001	.0000	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9974	.9520	.7553	.4119	.1275	.0171	.0006	.0000	.0000	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9829	.8725	.5881	.2447	.0480	.0026	.0000	.0000	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9949	.9435	.7483	.4044	.1133	.0100	.0001	.0000	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9790	.8684	.5841	.2277	.0321	.0004	.0000	.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9935	.9423	.7500	.3920	.0867	.0024	.0000	.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9793	.8744	.5836	.1958	.0113	.0003	.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9941	.9490	.7625	.3704	.0432	.0026	.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9840	.8929	.5886	.1330	.0159	.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9964	.9645	.7939	.3231	.0755	.0010
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9924	.9308	.6083	.2642	.0169
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9992	.9885	.8784	.6415	.1821
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

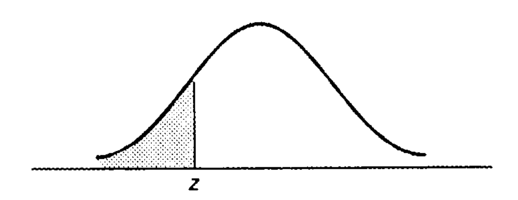
TABLE A (continued)

n	x	π = .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99
25	0	.7778	.2774	.0718	.0038	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.9742	.6424	.2712	.0274	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.9980	.8729	.5371	.0982	.0090	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.9999	.9659	.7636	.2340	.0332	.0024	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	1.0000	.9928	.9020	.4207	.0905	.0095	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	1.0000	.9988	.9666	.6167	.1935	.0294	.0020	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	1.0000	.9998	.9905	.7800	.3407	.0736	.0073	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	1.0000	1.0000	.9977	.8909	.5118	.1536	.0216	.0012	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	1.0000	1.0000	.9995	.9532	.6769	.2735	.0539	.0043	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	9	1.0000	1.0000	.9999	.9827	.8106	.4246	.1148	.0132	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9944	.9022	.5858	.2122	.0344	.0018	.0000	.0000	.0000	.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9985	.9558	.7323	.3450	.0778	.0060	.0001	.0000	.0000	.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9825	.8462	.5000	.1538	.0175	.0004	.0000	.0000	.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9940	.9222	.6550	.2677	.0442	.0015	.0000	.0000	.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9982	.9656	.7878	.4142	.0978	.0056	.0000	.0000	.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9868	.8852	.5754	.1894	.0173	.0001	.0000	.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9957	.9461	.7265	.3231	.0468	.0005	.0000	.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9988	.9784	.8464	.4881	.1091	.0023	.0000	.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9927	.9264	.6593	.2200	.0095	.0002	.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9980	.9706	.8065	.3833	.0334	.0012	.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9905	.9095	.5793	.0980	.0072	.0000
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9976	.9668	.7660	.2364	.0341	.0001
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9910	.9018	.4629	.1271	.0020
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9726	.7288	.3576	.0258
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9962	.9282	.7226	.2222
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLE B

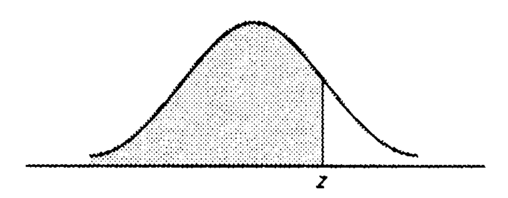
Values of the Standard Normal Cumulative Distribution Function

$P(Z \leq z) = F(z; 0, 1)$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABLE B (continued)

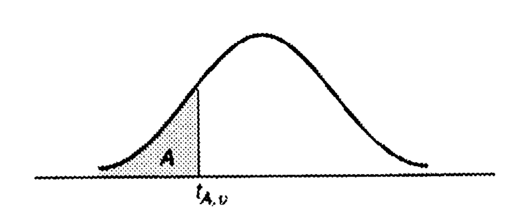


Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

TABLE C

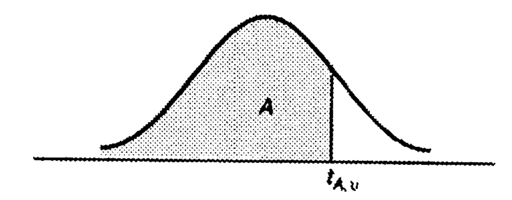
Quantile Values of the Student's T Distribuion

$$P(T \leq t_{A,\nu}) = A$$



μ	$t_{.001}$	$t_{.005}$	$t_{.010}$	$t_{.025}$	$t_{.050}$	$t_{.100}$	$t_{.200}$
1	−318.309	−63.657	−31.821	−12.706	−6.314	−3.078	−1.376
2	−22.327	−9.925	−6.965	−4.303	−2.920	−1.886	−1.061
3	−10.215	−5.841	−4.541	−3.182	−2.353	−1.638	−.978
4	−7.173	−4.604	−3.747	−2.776	−2.132	−1.533	−.941
5	−5.893	−4.032	−3.365	−2.571	−2.015	−1.476	−.920
6	−5.208	−3.707	−3.143	−2.447	−1.943	−1.440	−.906
7	−4.785	−3.499	−2.998	−2.365	−1.895	−1.415	−.896
8	−4.501	−3.355	−2.896	−2.306	−1.860	−1.397	−.889
9	−4.297	−3.250	−2.821	−2.262	−1.833	−1.383	−.883
10	−4.144	−3.169	−2.764	−2.228	−1.812	−1.372	−.879
11	−4.025	−3.106	−2.718	−2.201	−1.796	−1.363	−.876
12	−3.930	−3.055	−2.681	−2.179	−1.782	−1.356	−.873
13	−3.852	−3.012	−2.650	−2.160	−1.771	−1.350	−.870
14	−3.787	−2.977	−2.624	−2.145	−1.761	−1.345	−.868
15	−3.733	−2.947	−2.602	−2.131	−1.753	−1.341	−.866
16	−3.686	−2.921	−2.583	−2.120	−1.746	−1.337	−.865
17	−3.646	−2.898	−2.567	−2.110	−1.740	−1.333	−.863
18	−3.610	−2.878	−2.552	−2.101	−1.734	−1.330	−.862
19	−3.579	−2.861	−2.539	−2.093	−1.729	−1.328	−.861
20	−3.552	−2.845	−2.528	−2.086	−1.725	−1.325	−.860
21	−3.527	−2.831	−2.518	−2.080	−1.721	−1.323	−.859
22	−3.505	−2.819	−2.508	−2.074	−1.717	−1.321	−.858
23	−3.485	−2.807	−2.500	−2.069	−1.714	−1.319	−.858
24	−3.467	−2.797	−2.492	−2.064	−1.711	−1.318	−.857
25	−3.450	−2.787	−2.485	−2.060	−1.708	−1.316	−.856
26	−3.435	−2.779	−2.479	−2.056	−1.706	−1.315	−.856
27	−3.421	−2.771	−2.473	−2.052	−1.703	−1.314	−.855
28	−3.408	−2.763	−2.467	−2.048	−1.701	−1.313	−.855
29	−3.396	−2.756	−2.462	−2.045	−1.699	−1.311	−.854
30	−3.385	−2.750	−2.457	−2.042	−1.697	−1.310	−.854
35	−3.340	−2.724	−2.438	−2.030	−1.690	−1.306	−.852
40	−3.307	−2.704	−2.423	−2.021	−1.684	−1.303	−.851
45	−3.281	−2.690	−2.412	−2.014	−1.679	−1.301	−.850
50	−3.261	−2.678	−2.403	−2.009	−1.676	−1.299	−.849
60	−3.232	−2.660	−2.390	−2.000	−1.671	−1.296	−.848
70	−3.211	−2.648	−2.381	−1.994	−1.667	−1.294	−.847
80	−3.195	−2.639	−2.374	−1.990	−1.664	−1.292	−.846
90	−3.183	−2.632	−2.369	−1.987	−1.662	−1.291	−.846
100	−3.174	−2.626	−2.364	−1.984	−1.660	−1.290	−.845
200	−3.131	−2.601	−2.345	−1.972	−1.652	−1.286	−.843
500	−3.107	−2.586	−2.334	−1.965	−1.648	−1.283	−.842
1,000	−3.098	−2.581	−2.330	−1.962	−1.646	−1.282	−.842
∞	−3.090	−2.575	−2.326	−1.960	−1.645	−1.282	−.842

TABLE C (continued)



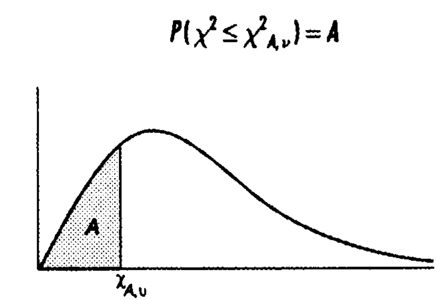
v	$t_{.800}$	$t_{.900}$	$t_{.950}$	$t_{.975}$	$t_{.990}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.656	318.294
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
100	.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
200	.843	1.286	1.652	1.972	2.345	2.601	3.131
500	.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
1,000	.842	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098
∞	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.575	3.090

$P(\chi^2 \le \chi^2_{A,\nu}) = A$

TABLE D

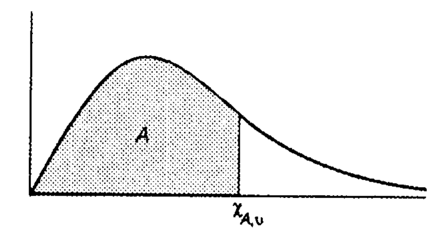
Quantile Values of the

Chi-Square Distribution



ν	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.100}$
1	.00	.00	.00	.00	.02
2	.01	.02	.05	.10	.21
3	.07	.11	.22	.35	.58
4	.21	.30	.48	.71	1.06
5	.41	.55	.83	1.15	1.61
6	.67	.87	1.24	1.63	2.20
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83
8	1.34	1.64	2.18	2.73	3.49
9	1.73	2.09	2.70	3.32	4.17
10	2.15	2.55	3.24	3.94	4.86
11	2.60	3.05	3.81	4.57	5.58
12	3.06	3.57	4.40	5.22	6.30
13	3.56	4.10	5.01	5.89	7.04
14	4.07	4.65	5.62	6.57	7.79
15	4.59	5.23	6.26	7.26	8.55
16	5.14	5.81	6.90	7.96	9.31
17	5.69	6.40	7.56	8.67	10.08
18	6.25	7.00	8.23	9.39	10.86
19	6.82	7.63	8.90	10.11	11.65
20	7.42	8.25	9.59	10.85	12.44
21	8.02	8.89	10.28	11.59	13.24
22	8.62	9.53	10.98	12.34	14.04
23	9.25	10.19	11.69	13.09	14.85
24	9.87	10.85	12.40	13.84	15.66
25	10.50	11.51	13.11	14.61	16.47
26	11.13	12.19	13.84	15.38	17.29
27	11.79	12.87	14.57	16.15	18.11
28	12.44	13.55	15.30	16.92	18.94
29	13.09	14.24	16.04	17.70	19.77
30	13.77	14.94	16.78	18.49	20.60
35	17.16	18.49	20.56	22.46	24.79
40	20.67	22.14	24.42	26.51	29.06
45	24.28	25.88	28.36	30.61	33.36
50	27.96	29.68	32.35	34.76	37.69
60	35.50	37.46	40.47	43.19	46.46
70	43.25	45.42	48.75	51.74	55.33
80	51.14	53.52	57.15	60.39	64.28
90	59.17	61.74	65.64	69.13	73.29
100	67.30	70.05	74.22	77.93	82.36

TABLE D (continued)



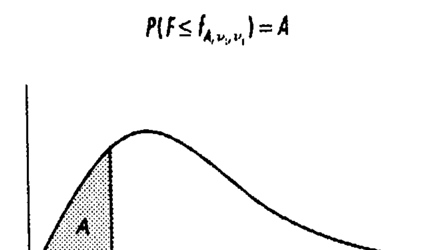
ν	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.995}$
1	2.71	3.84	5.02	6.64	7.90
2	4.60	5.99	7.38	9.22	10.59
3	6.25	7.82	9.36	11.32	12.82
4	7.78	9.49	11.15	13.28	14.82
5	9.24	11.07	12.84	15.09	16.76
6	10.65	12.60	14.46	16.81	18.55
7	12.02	14.07	16.02	18.47	20.27
8	13.36	15.51	17.55	20.08	21.94
9	14.69	16.93	19.03	21.65	23.56
10	15.99	18.31	20.50	23.19	25.15
11	17.28	19.68	21.93	24.75	26.71
12	18.55	21.03	23.35	26.25	28.25
13	19.81	22.37	24.75	27.72	29.88
14	21.07	23.69	26.13	29.17	31.38
15	22.31	25.00	27.50	30.61	32.86
16	23.55	26.30	28.86	32.03	34.32
17	24.77	27.59	30.20	33.43	35.77
18	25.99	28.88	31.54	34.83	37.21
19	27.21	30.15	32.87	36.22	38.63
20	28.42	31.42	34.18	37.59	40.05
21	29.62	32.68	35.49	38.96	41.45
22	30.82	33.93	36.79	40.31	42.84
23	32.01	35.18	38.09	41.66	44.23
24	33.20	36.42	39.38	43.00	45.60
25	34.38	37.66	40.66	44.34	46.97
26	35.57	38.89	41.94	45.66	48.33
27	36.74	40.12	43.21	46.99	49.69
28	37.92	41.34	44.47	48.30	51.04
29	39.09	42.56	45.74	49.61	52.38
30	40.26	43.78	46.99	50.91	53.71
35	46.06	49.81	53.22	57.36	60.31
40	51.80	55.75	59.34	63.71	66.80
45	57.50	61.65	65.41	69.98	73.20
50	63.16	67.50	71.42	76.17	79.52
60	74.39	79.08	83.30	88.40	91.98
70	85.52	90.53	95.03	100.44	104.24
80	96.57	101.88	106.63	112.34	116.35
90	107.56	113.14	118.14	124.13	128.32
100	118.49	124.34	129.56	135.82	140.19

TABLE E

Quantile Values of the

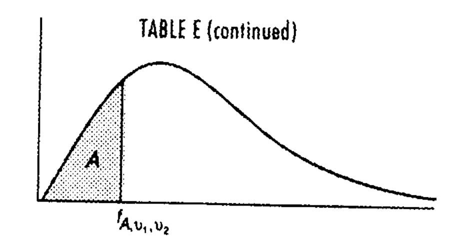
F Distribution

$P(F \leq f_{A,\nu_1,\nu_2}) = A$



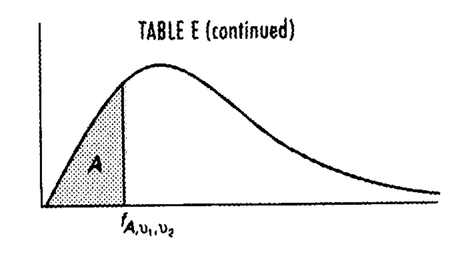
	$A = .01$									
	ν_1									
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.00	.01	.03	.05	.06	.07	.08	.09	.09	.10
2	.00	.01	.03	.06	.08	.09	.10	.12	.12	.13
3	.00	.01	.03	.06	.08	.10	.12	.13	.14	.15
4	.00	.01	.03	.06	.09	.11	.13	.14	.16	.17
5	.00	.01	.04	.06	.09	.11	.13	.15	.17	.18
6	.00	.01	.04	.07	.09	.12	.14	.16	.17	.19
7	.00	.01	.04	.07	.10	.12	.14	.16	.18	.19
8	.00	.01	.04	.07	.10	.12	.15	.17	.18	.20
9	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.15	.17	.19	.20
10	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.15	.17	.19	.21
11	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.15	.17	.19	.21
12	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.15	.18	.20	.21
13	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.18	.20	.22
14	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.18	.20	.22
15	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.18	.20	.22
16	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.18	.20	.22
17	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.18	.20	.22
18	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.18	.21	.22
19	.00	.01	.04	.07	.10	.13	.16	.19	.21	.23
20	.00	.01	.04	.07	.10	.14	.16	.19	.21	.23
21	.00	.01	.04	.07	.10	.14	.16	.19	.21	.23
22	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.16	.19	.21	.23
23	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.16	.19	.21	.23
24	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.16	.19	.21	.23
25	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.21	.23
26	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.21	.23
27	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.21	.23
28	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.21	.23
29	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.21	.23
30	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.22	.24
35	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.19	.22	.24
40	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.20	.22	.24
50	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.20	.22	.24
60	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.20	.22	.24
80	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.20	.23	.25
100	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.17	.20	.23	.25
200	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.18	.20	.23	.25
500	.00	.01	.04	.07	.11	.14	.18	.20	.23	.25
1,000	.00	.01	.04	.07	.11	.15	.18	.21	.23	.26

TABLE E (continued)



					$A = .01$					
					ν_1					
ν_2	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
1	.10	.11	.12	.12	.13	.13	.14	.14	.15	.15
2	.14	.14	.16	.17	.18	.19	.19	.20	.21	.22
3	.16	.17	.18	.20	.21	.22	.23	.24	.25	.26
4	.18	.18	.20	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.30
5	.19	.20	.22	.24	.26	.27	.28	.29	.31	.33
6	.20	.21	.23	.26	.28	.29	.30	.31	.33	.35
7	.20	.22	.24	.27	.29	.30	.32	.33	.35	.38
8	.21	.22	.25	.28	.30	.32	.33	.35	.37	.40
9	.22	.23	.26	.29	.31	.33	.35	.36	.39	.41
10	.22	.23	.26	.30	.32	.34	.36	.37	.40	.43
11	.22	.24	.27	.30	.33	.34	.37	.38	.41	.44
12	.23	.24	.27	.31	.33	.35	.38	.39	.42	.45
13	.23	.24	.28	.31	.34	.36	.38	.40	.43	.47
14	.23	.25	.28	.32	.35	.36	.39	.41	.44	.48
15	.24	.25	.28	.32	.35	.37	.40	.41	.45	.49
16	.24	.25	.29	.33	.36	.38	.40	.42	.46	.50
17	.24	.25	.29	.33	.36	.38	.41	.43	.46	.50
18	.24	.26	.29	.33	.36	.38	.41	.43	.47	.51
19	.24	.26	.29	.34	.37	.39	.42	.44	.48	.52
20	.24	.26	.30	.34	.37	.39	.42	.44	.48	.53
21	.25	.26	.30	.34	.37	.40	.43	.45	.49	.53
22	.25	.26	.30	.35	.38	.40	.43	.45	.49	.54
23	.25	.26	.30	.35	.38	.40	.43	.45	.50	.55
24	.25	.26	.30	.35	.38	.41	.44	.46	.50	.55
25	.25	.27	.31	.35	.38	.41	.44	.46	.51	.56
26	.25	.27	.31	.35	.39	.41	.44	.46	.51	.56
27	.25	.27	.31	.36	.39	.41	.45	.47	.52	.57
28	.25	.27	.31	.36	.39	.41	.45	.47	.52	.57
29	.25	.27	.31	.36	.39	.42	.45	.47	.52	.58
30	.25	.27	.31	.36	.39	.42	.45	.48	.53	.58
35	.26	.27	.32	.37	.40	.43	.46	.49	.54	.60
40	.26	.28	.32	.37	.41	.43	.47	.50	.56	.62
50	.26	.28	.32	.38	.42	.45	.49	.51	.58	.65
60	.26	.28	.33	.38	.42	.45	.50	.52	.59	.67
80	.27	.29	.33	.39	.43	.46	.51	.54	.61	.70
100	.27	.29	.34	.39	.44	.47	.52	.55	.63	.72
200	.27	.29	.34	.40	.45	.48	.53	.57	.66	.78
500	.28	.30	.35	.41	.46	.49	.55	.58	.68	.84
1,000	.28	.30	.35	.41	.46	.50	.55	.59	.69	.86

TABLE E (continued)



A = .025										
	ν_1									
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
1	.00	.03	.06	.08	.10	.11	.12	.13	.14	.14
2	.00	.03	.06	.09	.12	.14	.15	.17	.17	.18
3	.00	.03	.06	.10	.13	.15	.17	.18	.20	.21
4	.00	.03	.07	.10	.14	.16	.18	.20	.21	.22
5	.00	.03	.07	.11	.14	.17	.19	.21	.22	.24
6	.00	.03	.07	.11	.14	.17	.20	.21	.23	.25
7	.00	.03	.07	.11	.15	.18	.20	.22	.24	.25
8	.00	.03	.07	.11	.15	.18	.20	.23	.24	.26
9	.00	.03	.07	.11	.15	.18	.21	.23	.25	.26
10	.00	.03	.07	.11	.15	.18	.21	.23	.25	.27
11	.00	.03	.07	.11	.15	.18	.21	.24	.26	.27
12	.00	.03	.07	.11	.15	.19	.21	.24	.26	.28
13	.00	.03	.07	.11	.15	.19	.22	.24	.26	.28
14	.00	.03	.07	.12	.15	.19	.22	.24	.26	.28
15	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.24	.27	.28
16	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.25	.27	.29
17	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.25	.27	.29
18	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.25	.27	.29
19	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.25	.27	.29
20	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.25	.27	.29
21	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.22	.25	.27	.29
22	.00	.03	.07	.12	.16	.19	.23	.25	.27	.30
23	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.25	.28	.30
24	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.25	.28	.30
25	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.25	.28	.30
26	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.25	.28	.30
27	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.28	.30
28	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.28	.30
29	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.28	.30
30	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.28	.30
35	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.28	.30
40	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.29	.31
50	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.23	.26	.29	.31
60	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.24	.26	.29	.31
80	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.24	.27	.29	.32
100	.00	.03	.07	.12	.16	.20	.24	.27	.29	.32
200	.00	.03	.07	.12	.17	.20	.24	.27	.30	.32
500	.00	.03	.07	.12	.17	.21	.24	.27	.30	.32
1,000	.00	.03	.07	.12	.17	.21	.24	.27	.30	.32

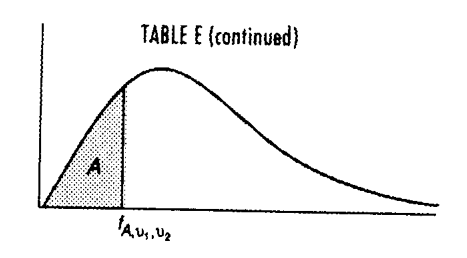
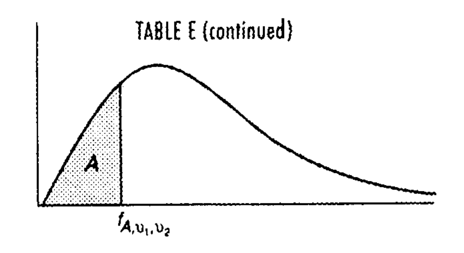


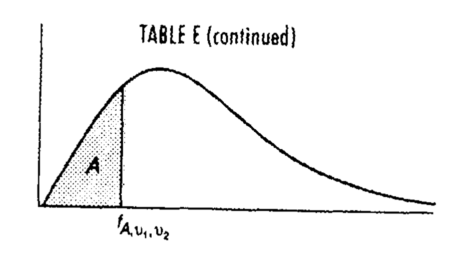
TABLE E (continued)

ν_2	$A = .025$									
	ν_1									
	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
1	.15	.15	.16	.17	.18	.18	.18	.19	.19	.20
2	.19	.20	.21	.22	.23	.24	.25	.25	.26	.27
3	.22	.22	.24	.26	.27	.28	.29	.29	.31	.32
4	.23	.24	.26	.28	.30	.31	.32	.33	.34	.36
5	.25	.26	.28	.30	.32	.33	.34	.35	.37	.39
6	.26	.27	.29	.32	.34	.35	.36	.37	.39	.41
7	.27	.28	.30	.33	.35	.36	.38	.39	.41	.43
8	.27	.28	.31	.34	.36	.38	.40	.41	.43	.45
9	.28	.29	.32	.35	.37	.39	.41	.42	.45	.47
10	.28	.30	.33	.36	.38	.40	.42	.43	.46	.49
11	.29	.30	.33	.37	.39	.41	.43	.44	.47	.50
12	.29	.31	.34	.37	.40	.41	.44	.45	.48	.51
13	.29	.31	.34	.38	.40	.42	.44	.46	.49	.52
14	.30	.31	.35	.38	.41	.43	.45	.47	.50	.53
15	.30	.31	.35	.39	.41	.43	.46	.47	.51	.54
16	.30	.32	.35	.39	.42	.44	.46	.48	.52	.55
17	.30	.32	.36	.40	.42	.44	.47	.49	.52	.56
18	.31	.32	.36	.40	.43	.45	.47	.49	.53	.57
19	.31	.32	.36	.40	.43	.45	.48	.50	.54	.57
20	.31	.33	.36	.41	.43	.46	.48	.50	.54	.58
21	.31	.33	.36	.41	.44	.46	.49	.51	.55	.59
22	.31	.33	.37	.41	.44	.46	.49	.51	.55	.59
23	.31	.33	.37	.41	.44	.47	.49	.51	.56	.60
24	.32	.33	.37	.42	.45	.47	.50	.52	.56	.60
25	.32	.33	.37	.42	.45	.47	.50	.52	.56	.61
26	.32	.33	.37	.42	.45	.47	.50	.52	.57	.61
27	.32	.33	.37	.42	.45	.48	.51	.53	.57	.62
28	.32	.34	.38	.42	.45	.48	.51	.53	.58	.62
29	.32	.34	.38	.42	.46	.48	.51	.53	.58	.63
30	.32	.34	.38	.43	.46	.48	.51	.54	.58	.63
35	.32	.34	.38	.43	.47	.49	.53	.55	.60	.65
40	.33	.34	.39	.44	.47	.50	.53	.56	.61	.67
50	.33	.35	.39	.44	.48	.51	.55	.57	.63	.69
60	.33	.35	.40	.45	.49	.52	.55	.58	.64	.71
80	.34	.35	.40	.46	.50	.53	.57	.59	.66	.74
100	.34	.36	.40	.46	.50	.53	.57	.60	.67	.76
200	.34	.36	.41	.47	.51	.54	.59	.62	.70	.81
500	.35	.36	.41	.48	.52	.55	.60	.64	.73	.86
1,000	.35	.37	.42	.48	.52	.56	.61	.64	.73	.88



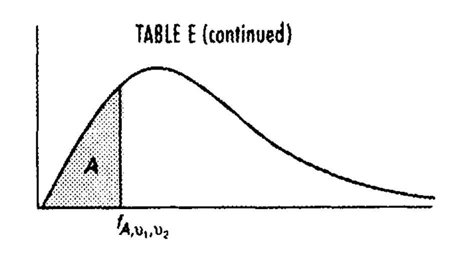
	A = .05									
	v_1									
v_2	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
1	.01	.05	.10	.13	.15	.17	.18	.19	.20	.20
2	.01	.05	.10	.14	.17	.19	.21	.22	.23	.24
3	.00	.05	.11	.15	.18	.21	.23	.25	.26	.27
4	.00	.05	.11	.16	.19	.22	.24	.26	.28	.29
5	.00	.05	.11	.16	.20	.23	.25	.27	.29	.30
6	.00	.05	.11	.16	.20	.23	.26	.28	.30	.31
7	.00	.05	.11	.16	.21	.24	.26	.29	.30	.32
8	.00	.05	.11	.17	.21	.24	.27	.29	.31	.33
9	.00	.05	.11	.17	.21	.24	.27	.30	.31	.33
10	.00	.05	.11	.17	.21	.25	.27	.30	.32	.34
11	.00	.05	.11	.17	.21	.25	.28	.30	.32	.34
12	.00	.05	.11	.17	.21	.25	.28	.30	.33	.34
13	.00	.05	.11	.17	.21	.25	.28	.31	.33	.35
14	.00	.05	.11	.17	.22	.25	.28	.31	.33	.35
15	.00	.05	.11	.17	.22	.25	.28	.31	.33	.35
16	.00	.05	.12	.17	.22	.25	.29	.31	.33	.35
17	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.31	.34	.36
18	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.36
19	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.36
20	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.36
21	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.36
22	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.36
23	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.36
24	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.34	.37
25	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.35	.37
26	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.35	.37
27	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.29	.32	.35	.37
28	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.30	.32	.35	.37
29	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.30	.32	.35	.37
30	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.30	.32	.35	.37
35	.00	.05	.12	.17	.22	.26	.30	.33	.35	.37
40	.00	.05	.12	.17	.22	.27	.30	.33	.35	.38
50	.00	.05	.12	.18	.22	.27	.30	.33	.36	.38
60	.00	.05	.12	.18	.23	.27	.30	.33	.36	.38
80	.00	.05	.12	.18	.23	.27	.30	.33	.36	.38
100	.00	.05	.12	.18	.23	.27	.31	.34	.36	.39
200	.00	.05	.12	.18	.23	.27	.31	.34	.37	.39
500	.00	.05	.12	.18	.23	.27	.31	.34	.37	.39
1,000	.00	.05	.12	.18	.23	.27	.31	.34	.37	.39

TABLE E (continued)

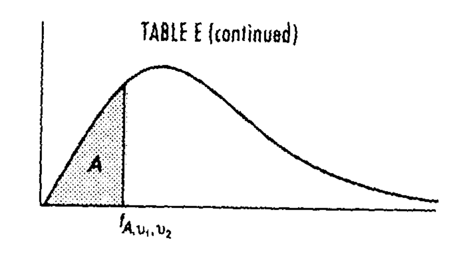


	$A = .05$									
	ν_1									
ν_2	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
1	.21	.21	.22	.23	.24	.24	.24	.25	.25	.26
2	.25	.26	.27	.29	.30	.30	.31	.31	.32	.33
3	.28	.29	.30	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38
4	.30	.31	.33	.35	.36	.37	.38	.39	.41	.42
5	.31	.32	.34	.37	.38	.39	.41	.42	.43	.45
6	.32	.33	.36	.38	.40	.41	.43	.44	.46	.47
7	.33	.34	.37	.40	.42	.43	.44	.45	.48	.50
8	.34	.35	.38	.41	.43	.44	.46	.47	.49	.51
9	.35	.36	.39	.42	.44	.45	.47	.48	.51	.53
10	.35	.36	.39	.43	.45	.46	.48	.49	.52	.54
11	.35	.37	.40	.43	.45	.47	.49	.50	.53	.56
12	.36	.37	.40	.44	.46	.48	.50	.51	.54	.57
13	.36	.38	.41	.44	.47	.48	.51	.52	.55	.58
14	.37	.38	.41	.45	.47	.49	.51	.53	.56	.59
15	.37	.38	.42	.45	.48	.50	.52	.53	.57	.60
16	.37	.38	.42	.46	.48	.50	.53	.54	.57	.60
17	.37	.39	.42	.46	.49	.51	.53	.55	.58	.61
18	.37	.39	.42	.46	.49	.51	.54	.55	.59	.62
19	.38	.39	.43	.47	.49	.51	.54	.56	.59	.63
20	.38	.39	.43	.47	.50	.52	.54	.56	.60	.63
21	.38	.39	.43	.47	.50	.52	.55	.56	.60	.64
22	.38	.40	.43	.48	.50	.52	.55	.57	.61	.64
23	.38	.40	.44	.48	.51	.53	.55	.57	.61	.65
24	.38	.40	.44	.48	.51	.53	.56	.58	.61	.65
25	.38	.40	.44	.48	.51	.53	.56	.58	.62	.66
26	.39	.40	.44	.48	.51	.53	.56	.58	.62	.66
27	.39	.40	.44	.49	.52	.54	.57	.58	.63	.67
28	.39	.40	.44	.49	.52	.54	.57	.59	.63	.67
29	.39	.40	.44	.49	.52	.54	.57	.59	.63	.68
30	.39	.41	.45	.49	.52	.54	.57	.59	.64	.68
35	.39	.41	.45	.50	.53	.55	.58	.60	.65	.70
40	.40	.41	.45	.50	.53	.56	.59	.61	.66	.71
50	.40	.42	.46	.51	.54	.57	.60	.63	.68	.73
60	.40	.42	.46	.51	.55	.57	.61	.63	.69	.75
80	.40	.42	.47	.52	.56	.58	.62	.65	.71	.78
100	.41	.43	.47	.52	.56	.59	.63	.66	.72	.79
200	.41	.43	.48	.53	.57	.60	.64	.67	.75	.84
500	.41	.43	.48	.54	.58	.61	.66	.69	.76	.88
1,000	.41	.43	.48	.54	.58	.61	.66	.69	.77	.90

TABLE E (continued)

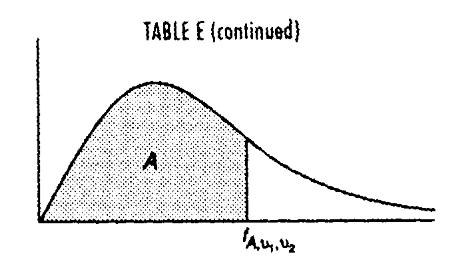


ν_2	A = .10									
	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
1	.03	.12	.18	.22	.25	.26	.28	.29	.30	.30
2	.02	.11	.18	.23	.26	.29	.31	.32	.33	.34
3	.02	.11	.19	.24	.28	.30	.33	.34	.36	.37
4	.02	.11	.19	.24	.28	.31	.34	.36	.37	.38
5	.02	.11	.19	.25	.29	.32	.35	.37	.38	.40
6	.02	.11	.19	.25	.29	.33	.35	.37	.39	.41
7	.02	.11	.19	.25	.30	.33	.36	.38	.40	.41
8	.02	.11	.19	.25	.30	.34	.36	.39	.40	.42
9	.02	.11	.19	.25	.30	.34	.37	.39	.41	.43
10	.02	.11	.19	.26	.30	.34	.37	.39	.41	.43
11	.02	.11	.19	.26	.30	.34	.37	.40	.42	.43
12	.02	.11	.19	.26	.31	.34	.37	.40	.42	.44
13	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.40	.42	.44
14	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.40	.43	.44
15	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.41	.43	.45
16	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.41	.43	.45
17	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.41	.43	.45
18	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.41	.43	.45
19	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.38	.41	.43	.45
20	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.39	.41	.44	.45
21	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.39	.41	.44	.46
22	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.39	.41	.44	.46
23	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.39	.42	.44	.46
24	.02	.11	.19	.26	.31	.35	.39	.42	.44	.46
25	.02	.11	.19	.26	.31	.36	.39	.42	.44	.46
26	.02	.11	.19	.26	.31	.36	.39	.42	.44	.46
27	.02	.11	.19	.26	.31	.36	.39	.42	.44	.46
28	.02	.11	.19	.26	.31	.36	.39	.42	.44	.46
29	.02	.11	.19	.26	.31	.36	.39	.42	.44	.46
30	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.39	.42	.44	.46
35	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.39	.42	.45	.47
40	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.39	.42	.45	.47
50	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.40	.43	.45	.47
60	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.40	.43	.45	.47
80	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.40	.43	.46	.48
100	.02	.11	.19	.26	.32	.36	.40	.43	.46	.48
200	.02	.11	.19	.27	.32	.37	.40	.43	.46	.48
500	.02	.11	.19	.27	.32	.37	.40	.44	.46	.48
1,000	.02	.11	.19	.27	.32	.37	.40	.44	.46	.49



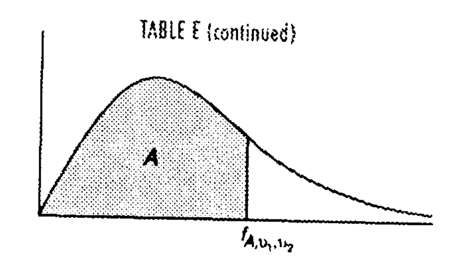
$A = .10$										
	ν_1									
ν_2	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
1	.31	.31	.33	.34	.34	.35	.35	.36	.36	.37
2	.35	.36	.37	.39	.40	.40	.41	.41	.42	.43
3	.38	.38	.40	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48
4	.39	.40	.42	.44	.46	.47	.48	.49	.50	.51
5	.41	.42	.44	.46	.48	.49	.50	.51	.52	.54
6	.42	.43	.45	.48	.49	.50	.52	.53	.55	.56
7	.43	.44	.46	.49	.51	.52	.53	.54	.56	.58
8	.43	.45	.47	.50	.52	.53	.55	.56	.58	.60
9	.44	.45	.48	.51	.53	.54	.56	.57	.59	.61
10	.44	.46	.49	.52	.54	.55	.57	.58	.60	.62
11	.45	.46	.49	.52	.54	.56	.58	.59	.61	.63
12	.45	.47	.50	.53	.55	.56	.58	.60	.62	.64
13	.46	.47	.50	.53	.56	.57	.59	.60	.63	.65
14	.46	.47	.50	.54	.56	.58	.60	.61	.64	.66
15	.46	.48	.51	.54	.56	.58	.60	.61	.64	.67
16	.46	.48	.51	.55	.57	.59	.61	.62	.65	.68
17	.47	.48	.51	.55	.57	.59	.61	.62	.65	.68
18	.47	.48	.52	.55	.58	.59	.62	.63	.66	.69
19	.47	.48	.52	.55	.58	.60	.62	.63	.66	.69
20	.47	.49	.52	.56	.58	.60	.62	.64	.67	.70
21	.47	.49	.52	.56	.58	.60	.63	.64	.67	.71
22	.47	.49	.52	.56	.59	.61	.63	.64	.68	.71
23	.48	.49	.53	.56	.59	.61	.63	.65	.68	.71
24	.48	.49	.53	.57	.59	.61	.64	.65	.68	.72
25	.48	.49	.53	.57	.59	.61	.64	.65	.69	.72
26	.48	.49	.53	.57	.60	.62	.64	.66	.69	.73
27	.48	.49	.53	.57	.60	.62	.64	.66	.69	.73
28	.48	.50	.53	.57	.60	.62	.64	.66	.70	.73
29	.48	.50	.53	.57	.60	.62	.65	.66	.70	.74
30	.48	.50	.53	.58	.60	.62	.65	.67	.70	.74
35	.48	.50	.54	.58	.61	.63	.66	.68	.71	.75
40	.49	.50	.54	.59	.61	.64	.66	.68	.72	.77
50	.49	.51	.55	.59	.62	.64	.67	.69	.74	.79
60	.49	.51	.55	.60	.63	.65	.68	.70	.75	.80
80	.50	.51	.55	.60	.63	.66	.69	.71	.76	.82
100	.50	.52	.56	.61	.64	.66	.70	.72	.77	.84
200	.50	.52	.56	.61	.65	.67	.71	.74	.80	.87
500	.51	.52	.57	.62	.65	.68	.72	.75	.81	.91
1,000	.51	.52	.57	.62	.66	.68	.72	.75	.82	.92

TABLE E (continued)



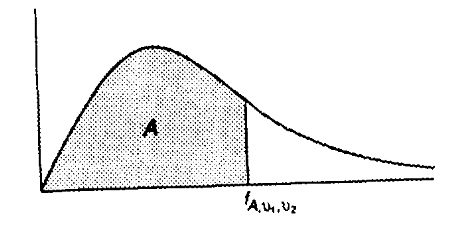
$A = .90$										
	ν_1									
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.79	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
35	2.85	2.46	2.25	2.11	2.02	1.95	1.90	1.85	1.82	1.79
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
50	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66
200	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
500	2.72	2.31	2.09	1.96	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64	1.61
1,000	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61

TABLE E (continued)



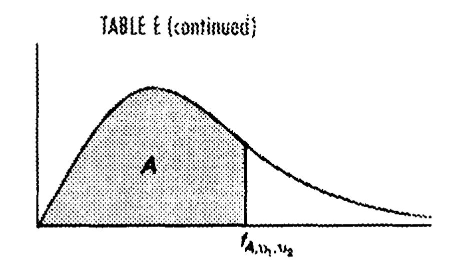
V_2	V_1 = 11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
	A = .90									
1	60.47	60.71	61.22	61.74	62.06	62.26	62.53	62.69	63.00	63.29
2	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.22	5.20	5.19	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.78	3.76
5	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.11
6	2.92	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.75	2.72
7	2.68	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.50	2.47
8	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.32	2.30
9	2.40	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.19	2.16
10	2.30	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.09	2.06
11	2.23	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.00	1.98
12	2.17	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.94	1.91
13	2.12	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.88	1.85
14	2.07	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.83	1.80
15	2.04	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.79	1.76
16	2.01	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.76	1.72
17	1.98	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.73	1.69
18	1.95	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.70	1.66
19	1.93	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.67	1.64
20	1.91	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.65	1.61
21	1.90	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.63	1.59
22	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.61	1.57
23	1.87	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.59	1.55
24	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.58	1.54
25	1.84	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.56	1.52
26	1.83	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.55	1.51
27	1.82	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.54	1.50
28	1.81	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.53	1.48
29	1.80	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.52	1.47
30	1.79	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.51	1.46
35	1.76	1.74	1.69	1.63	1.60	1.57	1.53	1.51	1.47	1.42
40	1.74	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.43	1.38
50	1.70	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.39	1.33
60	1.68	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.36	1.30
80	1.65	1.63	1.57	1.51	1.47	1.44	1.40	1.38	1.32	1.25
100	1.64	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.29	1.22
200	1.60	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.24	1.16
500	1.58	1.56	1.50	1.44	1.39	1.36	1.31	1.28	1.21	1.11
1,000	1.58	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.20	1.08

TABLE E (continued)

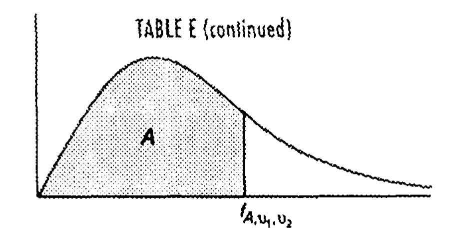


	A = .95									
	ν_1									
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.97
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.73
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85
1,000	3.85	3.01	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84

TABLE E (continued)

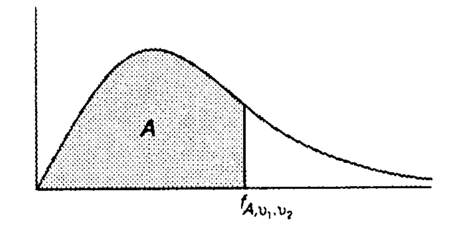


$A = .95$										
	ν_1									
ν_2	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
1	242.98	243.91	245.96	248.01	249.26	250.08	251.15	251.77	253.01	254.17
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.76	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.74	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.70	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.60	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.31	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.10	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.94	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.82	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	2.72	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.63	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.57	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	2.51	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.46	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	2.41	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	2.37	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.31	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	2.28	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	2.26	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	2.24	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	2.22	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	2.20	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	2.18	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	2.17	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	2.14	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	2.13	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
35	2.07	2.04	1.96	1.88	1.82	1.79	1.74	1.70	1.63	1.57
40	2.04	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	1.99	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	1.95	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
80	1.91	1.88	1.79	1.70	1.64	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
100	1.89	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
200	1.84	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
500	1.81	1.77	1.69	1.59	1.53	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1,000	1.80	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11



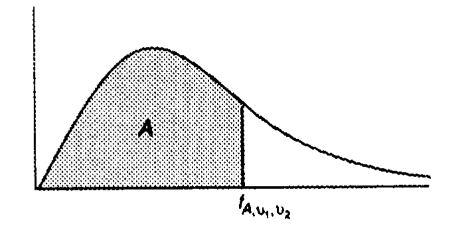
	$A = .975$									
	ν_1									
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.74	14.63	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.61	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.85
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	5.00	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
35	5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
80	5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18
200	5.10	3.76	3.18	2.85	2.63	2.47	2.35	2.26	2.18	2.11
500	5.05	3.72	3.14	2.81	2.59	2.43	2.31	2.22	2.14	2.07
1,000	5.04	3.70	3.13	2.80	2.58	2.42	2.30	2.20	2.13	2.06

TABLE E (continued)



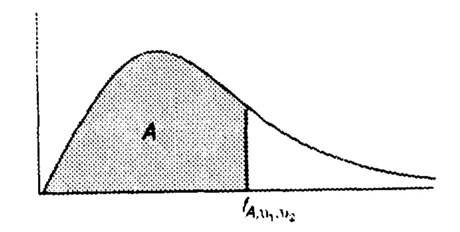
$A = .975$										
	v_1									
v_2	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1,000
2	39.41	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.37	14.33	14.26	14.17	14.11	14.08	14.04	14.01	13.96	13.91
4	8.79	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.32	8.26
5	6.57	6.53	6.43	6.33	6.27	6.23	6.17	6.14	6.08	6.02
6	5.41	5.37	5.27	5.17	5.11	5.06	5.01	4.98	4.92	4.86
7	4.71	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.21	4.15
8	4.24	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.74	3.68
9	3.91	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.40	3.34
10	3.66	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.15	3.09
11	3.47	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	2.96	2.89
12	3.32	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.80	2.73
13	3.20	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.67	2.60
14	3.09	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.56	2.50
15	3.01	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.47	2.40
16	2.93	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.40	2.32
17	2.87	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.33	2.26
18	2.81	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.27	2.20
19	2.76	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.22	2.14
20	2.72	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.17	2.09
21	2.68	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.13	2.05
22	2.65	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.09	2.01
23	2.62	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.14	2.06	1.98
24	2.59	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.02	1.94
25	2.56	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.00	1.91
26	2.54	2.49	2.39	2.28	2.21	2.16	2.09	2.05	1.97	1.89
27	2.51	2.47	2.36	2.25	2.18	2.13	2.07	2.03	1.94	1.86
28	2.49	2.45	2.34	2.23	2.16	2.11	2.05	2.01	1.92	1.84
29	2.48	2.43	2.32	2.21	2.14	2.09	2.03	1.99	1.90	1.82
30	2.46	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.88	1.80
35	2.39	2.34	2.23	2.12	2.05	2.00	1.93	1.89	1.80	1.71
40	2.33	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.74	1.65
50	2.26	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.66	1.56
60	2.22	2.17	2.06	1.94	1.87	1.82	1.74	1.70	1.60	1.50
80	2.16	2.11	2.00	1.88	1.81	1.75	1.68	1.63	1.53	1.41
100	2.12	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.48	1.36
200	2.06	2.01	1.90	1.78	1.70	1.64	1.56	1.51	1.39	1.25
500	2.02	1.97	1.86	1.74	1.65	1.60	1.52	1.46	1.34	1.17
1,000	2.01	1.96	1.85	1.72	1.64	1.58	1.50	1.45	1.32	1.13

TABLE E (concluded)



$A = .99$										
	V_1									
V_2	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.50	27.34	27.22
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36
1,000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34

TABLE E (concluded)



A = .99										
	V_1									
V_2	11	12	15	20	25	30	40	50	100	1.000
2	99.41	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.51
3	27.12	27.03	26.85	26.67	26.58	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	14.45	14.37	14.19	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.58	13.48
5	9.96	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.30	9.24	9.13	9.03
6	7.79	7.72	7.56	7.40	7.29	7.23	7.15	7.09	6.99	6.89
7	6.54	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	5.73	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	5.18	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	4.77	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	4.46	4.40	4.25	4.10	4.00	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	4.22	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	4.02	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	3.86	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	3.73	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	3.62	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	3.52	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	3.43	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	3.36	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	3.29	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	3.24	3.17	3.03	2.88	2.78	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	3.18	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	3.14	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	3.09	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	3.06	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	3.02	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	2.99	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	2.96	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	2.93	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	2.91	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.24	2.13	2.02
35	2.80	2.74	2.60	2.44	2.35	2.28	2.19	2.14	2.02	1.90
40	2.73	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	2.62	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	2.56	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
80	2.48	2.42	2.27	2.12	2.01	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
100	2.43	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
200	2.34	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	2.28	2.22	2.07	1.92	1.81	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1,000	2.27	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16

TABLE F

Bounds of the Durbin - Watson Statistic

	1 - α = .95									
n	k = 1		k =2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	.95	1.54	.82	1.75	.69	1.97	.56	2.21
16	1.10	1.37	.98	1.54	.86	1.73	.74	1.93	.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	.90	1.71	.78	1.90	.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	.93	1.69	.82	1.87	.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	.97	1.68	.86	1.85	.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	.90	1.83	.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	.93	1.81	.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	.96	1.80	.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	.99	1.79	.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

Source: J. Durbin and G. S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, II," *Biometrika* 38 (1951), 159–178. Reprinted with permission of the Biometrika Trustees.

TABLE G

Quantile Values of The Wilcoxon Rank Sum Statistic

		$P(R \le R_A) \approx A^*$									
n_1	n_2	.005	.01	.025	.05	.10	.90	.95	.975	.99	.995
4	4	—	—	11	12	13	23	24	25	—	—
4	5	—	10	12	13	14	26	27	28	30	—
4	6	10	11	12	14	15	29	30	32	33	34
4	7	11	12	13	15	17	31	33	35	36	37
4	8	11	12	14	16	18	34	36	38	40	41
4	9	12	13	15	17	19	37	39	41	43	44
4	10	12	14	16	18	20	40	42	44	46	48
5	5	15	16	18	19	21	34	36	37	39	40
5	6	16	17	19	20	22	38	40	41	43	44
5	7	17	18	20	22	24	41	43	45	47	48
5	8	18	19	21	23	26	44	47	49	51	52
5	9	19	20	22	25	27	48	50	53	55	56
5	10	19	21	24	26	29	51	54	56	59	61
6	6	23	24	26	28	30	48	50	52	54	55
6	7	24	26	28	30	32	52	54	56	58	60
6	8	25	27	29	32	34	56	58	61	63	65
6	9	26	28	31	33	36	60	63	65	68	70
6	10	28	30	33	35	38	64	67	69	72	74
7	7	33	34	37	39	42	63	66	68	71	72
7	8	34	36	39	41	44	68	71	73	76	78
7	9	35	38	41	43	47	72	76	78	81	84
7	10	37	39	42	46	49	77	80	84	87	89
8	8	44	46	49	52	55	81	84	87	90	92
8	9	45	48	51	54	58	86	90	93	96	99
8	10	47	50	54	57	61	91	95	98	102	105
9	9	57	59	63	66	70	101	105	108	112	114
9	10	59	61	66	69	74	106	111	114	119	121
10	10	71	74	79	83	87	123	127	131	136	139

*The given quantile value, R_A, is the one for which $P(R \le R_A)$ is closest to the column proportion A.

TABLE H

Quantile Values of The Wilcoxon Signed Rank Statistic

n	$P(W \le W_A) \approx A^*$									
	.005	.01	.025	.05	.10	.90	.95	.975	.99	.995
5	—	—	0	1	2	13	14	15	—	—
6	—	—	1	2	4	17	19	20	—	—
7	—	0	2	4	6	22	24	26	28	—
8	0	1	4	6	8	28	30	32	35	36
9	1	3	6	8	11	34	37	39	42	44
10	3	5	8	11	14	41	44	47	50	52
11	5	7	11	14	18	48	52	55	59	61
12	7	10	14	17	22	56	61	64	68	71
13	10	12	17	21	26	65	70	74	79	81
14	13	16	21	26	31	74	79	84	89	92
15	16	19	25	30	37	83	90	95	101	104
16	19	23	30	36	42	94	100	106	113	117
17	23	28	35	41	49	104	112	118	125	130
18	28	33	40	47	55	116	124	131	138	143
19	32	38	46	53	62	128	137	144	152	158
20	37	43	52	60	70	140	150	158	167	173

*The given quantile value, W_A, is the one for which $P(W \le W_A)$ is closest to the column proportion A.

TABLE I

Values of The Poisson Cumulative Distribution Function

$P(X \leq x) = F x; \lambda)$

x	λ = .1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1.0000	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	λ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4338	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(continued)

TABLE I (continued)

X	λ									
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.3796	.3546	.3309	.3084	.2873	.2674	.2487	.2311	.2146	.1991
2	.6496	.6227	.5960	.5697	.5438	.5184	.4936	.4695	.4460	.4232
3	.8386	.8194	.7993	.7787	.7576	.7360	.7141	.6919	.6696	.6472
4	.9379	.9275	.9163	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318	.8153
5	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258	.9161
6	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713	.9665
7	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901	.9881
8	.9997	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969	.9962
9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999

X	λ									
	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1847	.1712	.1586	.1468	.1359	.1257	.1162	.1074	.0992	.0916
2	.4012	.3799	.3594	.3397	.3208	.3027	.2854	.2689	.2531	.2381
3	.6248	.6025	.5803	.5584	.5366	.5152	.4942	.4735	.4533	.4335
4	.7982	.7806	.7626	.7442	.7254	.7064	.6872	.6678	.6484	.6288
5	.9057	.8946	.8829	.8705	.8576	.8441	.8301	.8156	.8006	.7851
6	.9612	.9554	.9490	.9421	.9347	.9267	.9182	.9091	.8995	.8893
7	.9858	.9832	.9802	.9769	.9733	.9692	.9648	.9599	.9546	.9489
8	.9953	.9943	.9931	.9917	.9901	.9883	.9863	.9840	.9815	.9786
9	.9986	.9982	.9978	.9973	.9967	.9960	.9952	.9942	.9931	.9919
10	.9996	.9995	.9994	.9992	.9990	.9987	.9984	.9981	.9977	.9972
11	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993	.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999

TABLE I (continued)

X	λ									
	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0845	.0780	.0719	.0663	.0611	.0563	.0518	.0477	.0439	.0404
2	.2238	.2102	.1974	.1851	.1736	.1626	.1523	.1425	.1333	.1247
3	.4142	.3954	.3772	.3595	.3423	.3257	.3097	.2942	.2793	.2650
4	.6093	.5898	.5704	.5512	.5321	.5132	.4946	.4763	.4582	.4405
5	.7693	.7531	.7367	.7199	.7029	.6858	.6684	.6510	.6335	.6160
6	.8787	.8675	.8558	.8436	.8311	.8180	.8046	.7908	.7767	.7622
7	.9427	.9361	.9290	.9214	.9134	.9050	.8960	.8867	.8769	.8666
8	.9755	.9721	.9683	.9642	.9597	.9549	.9497	.9442	.9382	.9319
9	.9905	.9889	.9871	.9851	.9829	.9805	.9778	.9749	.9717	.9682
10	.9966	.9959	.9952	.9943	.9933	.9922	.9910	.9896	.9880	.9863
11	.9989	.9986	.9983	.9980	.9976	.9971	.9966	.9960	.9953	.9945
12	.9997	.9996	.9995	.9993	.9992	.9990	.9988	.9986	.9983	.9980
13	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999

X	λ									
	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0372	.0342	.0314	.0289	.0266	.0244	.0224	.0206	.0189	.0174
2	.1165	.1088	.1016	.0948	.0884	.0824	.0768	.0715	.0666	.0620
3	.2513	.2381	.2254	.2133	.2017	.1906	.1801	.1700	.1604	.1512
4	.4231	.4061	.3895	.3733	.3575	.3422	.3272	.3127	.2987	.2851
5	.5984	.5809	.5635	.5461	.5289	.5119	.4950	.4783	.4619	.4457
6	.7474	.7324	.7171	.7017	.6860	.6703	.6544	.6384	.6224	.6063
7	.8560	.8449	.8335	.8217	.8095	.7970	.7842	.7710	.7576	.7440
8	.9252	.9181	.9106	.9027	.8944	.8857	.8766	.8672	.8574	.8472
9	.9644	.9603	.9559	.9512	.9462	.9409	.9352	.9292	.9228	.9161
10	.9844	.9823	.9800	.9775	.9747	.9718	.9686	.9651	.9614	.9574
11	.9937	.9927	.9916	.9904	.9890	.9875	.9859	.9841	.9821	.9799
12	.9976	.9972	.9967	.9962	.9955	.9949	.9941	.9932	.9922	.9912
13	.9992	.9990	.9988	.9986	.9983	.9980	.9977	.9973	.9969	.9964
14	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993	.9991	.9990	.9988	.9986
15	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9997	.9996	.9996	.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999

TABLE I (continued)

X	λ 6.2	6.5	6.8	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0	.0020	.0015	.0011	.0009	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000
1	.0146	.0113	.0087	.0073	.0047	.0030	.0019	.0012	.0008	.0005
2	.0536	.0430	.0344	.0296	.0203	.0138	.0093	.0062	.0042	.0028
3	.1342	.1119	.0928	.0818	.0591	.0424	.0301	.0212	.0149	.0103
4	.2592	.2237	.1920	.1730	.1321	.0996	.0744	.0550	.0403	.0293
5	.4141	.3690	.3270	.3007	.2414	.1912	.1496	.1157	.0885	.0671
6	.5742	.5265	.4799	.4497	.3782	.3134	.2562	.2068	.1650	.1301
7	.7160	.6728	.6285	.5987	.5246	.4530	.3856	.3239	.2687	.2202
8	.8259	.7916	.7548	.7291	.6620	.5926	.5231	.4557	.3918	.3328
9	.9016	.8774	.8502	.8305	.7764	.7166	.6530	.5874	.5218	.4579
10	.9486	.9332	.9151	.9015	.8622	.8159	.7634	.7060	.6453	.5830
11	.9750	.9661	.9552	.9467	.9208	.8881	.8487	.8030	.7520	.6968
12	.9887	.9840	.9779	.9730	.9573	.9362	.9091	.8758	.8364	.7916
13	.9952	.9929	.9898	.9872	.9784	.9658	.9486	.9262	.8981	.8645
14	.9981	.9970	.9956	.9943	.9897	.9827	.9726	.9585	.9400	.9165
15	.9993	.9988	.9982	.9976	.9954	.9918	.9862	.9780	.9665	.9513
16	.9997	.9996	.9993	.9990	.9980	.9963	.9934	.9889	.9823	.9730
17	.9999	.9998	.9997	.9996	.9992	.9984	.9970	.9947	.9911	.9857
18	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9997	.9993	.9987	.9976	.9957	.9928
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9995	.9989	.9980	.9965
20					1.0000	.9999	.9998	.9996	.9991	.9984
21					1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9993
22							1.0000	.9999	.9999	.9997
23							1.0000	1.0000	.9999	.9999
24									1.0000	1.0000
25									1.0000	1.0000

TABLE I (continued)

X	λ									
	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0012	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0049	.0023	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0151	.0076	.0037	.0018	.0009	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000
5	.0375	.0203	.0107	.0055	.0028	.0014	.0007	.0003	.0002	.0001
6	.0786	.0458	.0259	.0142	.0076	.0040	.0021	.0010	.0005	.0003
7	.1432	.0895	.0540	.0316	.0180	.0100	.0054	.0029	.0015	.0008
8	.2320	.1550	.0998	.0621	.0374	.0220	.0126	.0071	.0039	.0021
9	.3405	.2424	.1658	.1094	.0699	.0433	.0261	.0154	.0089	.0050
10	.4599	.3472	.2517	.1757	.1185	.0774	.0491	.0304	.0183	.0108
11	.5793	.4616	.3532	.2600	.1848	.1270	.0847	.0549	.0347	.0214
12	.6887	.5760	.4631	.3585	.2676	.1931	.1350	.0917	.0606	.0390
13	.7813	.6815	.5730	.4644	.3632	.2745	.2009	.1426	.0984	.0661
14	.8540	.7720	.6751	.5704	.4657	.3675	.2808	.2081	.1497	.1049
15	.9074	.8444	.7636	.6694	.5681	.4667	.3715	.2867	.2148	.1565
16	.9441	.8987	.8355	.7559	.6641	.5660	.4677	.3751	.2920	.2211
17	.9678	.9370	.8905	.8272	.7489	.6593	.5640	.4686	.3784	.2970
18	.9823	.9626	.9302	.8826	.8195	.7423	.6550	.5622	.4695	.3814
19	.9907	.9787	.9573	.9235	.8752	.8122	.7363	.6509	.5606	.4703
20	.9953	.9884	.9750	.9521	.9170	.8682	.8055	.7307	.6472	.5591
21	.9977	.9939	.9859	.9712	.9469	.9108	.8615	.7991	.7255	.6437
22	.9990	.9970	.9924	.9833	.9673	.9418	.9047	.8551	.7931	.7206
23	.9995	.9985	.9960	.9907	.9805	.9633	.9367	.8989	.8490	.7875
24	.9998	.9993	.9980	.9950	.9888	.9777	.9594	.9317	.8933	.8432
25	.9999	.9997	.9990	.9974	.9938	.9869	.9748	.9554	.9269	.8878
26	1.0000	.9999	.9995	.9987	.9967	.9925	.9848	.9718	.9514	.9221
27	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9983	.9959	.9912	.9827	.9687	.9475
28	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9991	.9978	.9950	.9897	.9805	.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9989	.9973	.9941	.9882	.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9986	.9967	.9930	.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9982	.9960	.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9990	.9978	.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9995	.9988	.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999